Математическая физика, анализ, геометрия
1999, т. 6, № 1/2, с. 55–80

Прямая и обратная задачи спектрального анализа для пятидиагональных симметрических матриц. II

М.А. Кудрявцев

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

E-mail: kudryavtsev@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 12 августа 1998 года

Настоящая работа является продолжением работы под тем же названием, I. Рассматриваются "вырожденные" пятидиагональные симметрические матрицы. Для них решены прямая и обратная задачи спектрального анализа. Полученные результаты обобщены на полубесконечные пятидиагональные матрицы.

Введение

В первой части работы было получено полное решение прямой и обратной задач для вещественных пятидиагональных симметрических матриц N-го порядка $J_N = ||f_{ij}||_{i,j=0}^{N-1}$, $f_{ij} = f_{ji}$; $f_{ij} = 0$, $|i-j| > 2$; $f_{i\ i+2} \neq 0$, $i = 0, \ldots, N-3$. Спектральными функциями таких матриц являются неубывающие кусочно-постоянные матричнозначные (2×2) функции $\sigma(\lambda)$, которые имеют N скачков с учетом кратности, невырожденное приращение $\sigma(+\infty) - \sigma(-\infty)$ и удовлетворяют на однократном спектре дополнительному условию (см. теорему 2.1). Необходимость этого дополнительного условия влечет качественное различие между обратными задачами для пятидиагональных матриц и трехдиагональных (якобиевых) матриц.

В связи с этим возникает вопрос: какой смысл можно придать *всем* неубывающим, невырожденным на бесконечности кусочно-постоянным матрицам 2×2, имеющим N скачков с учетом кратности (т.е. у которых сумма рангов скачков равна N)? Оказывается, все такие функции являются спектральными функциями более широкого класса пятидиагональных матриц — возможно вырождающихся пятидиагональных матриц, у которых на крайних диагоналях, начиная с некоторого места, могут стоять нули:

$$J_{N,N_1} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_0 & b_1 & a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 \\ 0 & c_1 & b_2 & a_3 & b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-1} \end{pmatrix}, \quad 2 \le N_1 \le N, \tag{3.0}$$

$$c_0, c_1, \dots, c_{N_1-3} \neq 0, \; c_{N_1-2} = \dots = c_{N-3} = 0, \; b_{N_1-1}, \dots, b_{N-2} \neq 0.$$

Частный случай, когда $N_1 = N$ (т.е. когда все $c_k \neq 0, k = 0, \dots, N-3$), соответствует уже рассмотренным в первой части работы обычным пятидиагональным матрицам J_N, которые отныне будем называть "невырожденными". Противоположный частный случай, когда $2 \le N_1 < N$ (т.е. на крайних диагоналях есть нули), будем называть вырожденным.

Заметим, что при $N_1 = 2$ матрица J_{N,N_1} является обычной якобиевой (трехдиагональной) матрицей.

Главным результатом настоящей работы является

Основная теорема. *Для того, чтобы матричнозначная функция $\sigma(\lambda)$ второго порядка была спектральной функцией некоторой пятидиагональной симметрической матрицы, возможно вырождающейся, необходимо и достаточно, чтобы она была неубывающей кусочно-постоянной матрицей, имеющей N скачков с учетом кратности, и чтобы матрица $\sigma(+\infty) - \sigma(-\infty)$ была невырожденной (т.е. обратимой).*

В пунктах 3, 4 дается решение прямой и обратной задач спектрального анализа для пятидиагональных матриц вида (3.0) (возможно вырождающихся). В пунктах 5–7 приводятся решения прямой и обратной спектральных задач для полубесконечных пятидиагональных матриц, в том числе вырожденных.

Результаты работы обобщаются на n-диагональные, $n = 2m+1$, $m > 2$, симметрические матрицы, однако соответствующие формулировки и доказательства в этом случае становятся весьма громоздкими.

3. Вырожденный случай. Прямая задача

Введем следующие обозначения.

$\mathbf{P}_\infty$ — пространство всех полиномов, $\mathbf{P}_i$ — подпространство $\mathbf{P}_\infty$ полиномов степени не выше $(i-1)$. Элементы пространства $\mathbf{P}_\infty$ (полиномы) обозначаются большими латинскими буквами ($R(\lambda), S(\lambda) \in \mathbf{P}_\infty$). Элементы пространств

$$\mathbf{Q}_\infty := \mathbf{P}_\infty \times \mathbf{P}_\infty,$$

$$\mathbf{Q}_{2m+1} := \mathbf{P}_{m+1} \times \mathbf{P}_m,$$
$$\mathbf{Q}_{2m} := \mathbf{P}_m \times \mathbf{P}_m$$

двумерных полиномиальных вектор-функций обозначим соответствующими строчными латинскими буквами:

$$r(\lambda) = \begin{pmatrix} R^{(1)}(\lambda) \\ R^{(2)}(\lambda) \end{pmatrix} \in \mathbf{Q}_\infty.$$

Так, $r(\lambda) = \begin{pmatrix} R^{(1)}(\lambda) \\ R^{(2)}(\lambda) \end{pmatrix} \in \mathbf{Q}_{2m}$ означает, что $R^{(1)}(\lambda)$ и $R^{(2)}(\lambda)$ — полиномы со степенями не выше $m-1$. Видно, что $\mathbf{Q}_2 \subset \mathbf{Q}_3 \subset \mathbf{Q}_4 \subset \ldots \subset \mathbf{Q}_k \subset \mathbf{Q}_{k+1} \subset \ldots \subset \mathbf{Q}_\infty$.

Высота $h(r)$ вектор-функции $r(\lambda) = \begin{pmatrix} R^{(1)}(\lambda) \\ R^{(2)}(\lambda) \end{pmatrix} \in \mathbf{Q}_\infty$ $(r \neq 0)$ определяется равенством

$$h(r) := \begin{cases} 2\, degR^{(1)}(\lambda), & degR^{(1)}(\lambda) > degR^{(2)}(\lambda), \\ 2\, degR^{(2)}(\lambda) + 1, & degR^{(2)}(\lambda) \geq degR^{(1)}(\lambda). \end{cases}$$

Мы считаем, что степень полинома $R(\lambda) \equiv 0$ равна $-\infty$, и тогда $h\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0$. Ясно, что $r(\lambda) \in \mathbf{Q}_{h(r)+1}$, но $r(\lambda) \notin \mathbf{Q}_{h(r)}$. Таким образом, высота $h(r)$ является аналогом степени в пространстве полиномиальных вектор-функций $\mathbf{Q}_\infty$.

Лемма 3.1. *Система вектор-функций* $\{r_k(\lambda)\}_{k=0}^{n-1} \subset \mathbf{Q}_\infty$, *удовлетворяющих условию*

$$h(r_k) = k, \tag{3.1}$$

образует базис в $\mathbf{Q}_n$.

Доказательство леммы совпадает с доказательством леммы 1.2 первой части работы. Поскольку $\mathbf{Q}_\infty = \bigcup_n \mathbf{Q}_n$, то из этой леммы, в частности, следует, что если дана система $\{r_k(\lambda)\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbf{Q}_\infty$, удовлетворяющая свойству (3.1), то любой элемент $\mathbf{Q}_\infty$ единственным образом представи́м в виде конечной линейной комбинации вектор-функций $r_k(\lambda)$.

Простейшим примером такой системы вектор-функций является система $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda^2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \lambda^k \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda^k \end{pmatrix}, \ldots$. Матрица перехода от этой системы к любой другой системе со свойством (3.1), как нетрудно убедиться, треугольна (на этом основано доказательство леммы 3.1).

Всякая неубывающая матричнозначная функция второго порядка $\sigma(\lambda)$ порождает в пространстве $\mathbf{Q}_\infty$ неотрицательную билинейную форму

$$< r(\lambda), s(\lambda) >_\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} (r(\lambda))^{\mathrm{T}} d\sigma(\lambda) s(\lambda), \quad r(\lambda), s(\lambda) \in \mathbf{Q}_\infty, \tag{3.2}$$

удовлетворяющую условию

$$< \lambda r(\lambda), s(\lambda) >_\sigma = < r(\lambda), \lambda s(\lambda) >_\sigma . \tag{3.3}$$

Поскольку в пп. 1, 2 невырожденный случай $N = N_1$ уже рассмотрен, разберем только вырожденный случай. Кроме того, не нарушая общности рассуждений, ограничимся рассмотрением случаев четного $N_1 = 2n_1 < N$ и нечетного $N = 2n + 1$.

Всякий собственный вектор $\vec{y} = (y(0), y(1), \dots, y(N-1))^{\mathrm{T}}$ матрицы J_{N,N_1}, отвечающий собственному значению λ, удовлетворяет уравнению

$$(J_{N,N_1} - \lambda I)\vec{y} = 0, \tag{3.4}$$

эквивалентному системе

$$a_0 y(0) + b_0 y(1) + c_0 y(2) = \lambda y(0), \tag{3.5}$$

$$b_0 y(0) + a_1 y(1) + b_1 y(2) + c_1 y(3) = \lambda y(1), \tag{3.6}$$

$$c_{k-2} y(k-2) + b_{k-1} y(k-1) + a_k y(k) + b_k y(k+1) + c_k y(k+2) = \lambda y(k),$$

$$k = 2, \dots, N_1 - 3, \tag{3.7}$$

$$c_{N_1-4} y(N_1-4) + b_{N_1-3} y(N_1-3) + a_{N_1-2} y(N_1-2) + b_{N_1-2} y(N_1-1) = \lambda y(N_1-2), \tag{3.8}$$

$$c_{N_1-3} y(N_1-3) + b_{N_1-2} y(N_1-2) + a_{N_1-1} y(N_1-1) + b_{N_1-1} y(N_1) = \lambda y(N_1-1), \tag{3.9}$$

$$b_{N_1-1+k} y(N_1-1+k) + a_{N_1+k} y(N_1+k) + b_{N_1+k} y(N_1+1+k) = \lambda y(N_1+k),$$

$$k = 0, \dots, N - N_1 - 2, \tag{3.10}$$

$$b_{N-2} y(N-2) + a_{N-1} y(N-1) = \lambda y(N-1). \tag{3.11}$$

Уравнения (3.8), (3.11) будем называть краевыми условиями. Система (3.5)–(3.7) имеет два линейно независимых решения $V^{(1)}(k,\lambda)$ и $V^{(2)}(k,\lambda)$, $k = 0, 1, \dots, N_1 - 1$, которые выберем так, чтобы они удовлетворяли начальным данным

$$V^{(1)}(0,\lambda) = d_{11},\ V^{(1)}(1,\lambda) = d_{12},\ V^{(2)}(0,\lambda) = 0,$$

$$V^{(2)}(1,\lambda) = d_{22} \quad (d_{ik} \in \mathbf{R},\ d_{11}d_{22} \neq 0).$$

Эти решения полиномиально зависят от λ, причем

$$deg V^{(1)}(2k,\lambda) = deg V^{(2)}(2k+1,\lambda) = k,$$

$$deg V^{(1)}(2k+1,\lambda) \le k,\ deg V^{(2)}(2k+2,\lambda) \le k, \quad k = 0, 1, \dots, N_1 - 1.$$

Доопределим $V^{(l)}(N_1,\lambda)$, $l=1,2$, так, чтобы $V^{(l)}(k,\lambda)$ удовлетворяли уравнению (3.9):

$$V^{(l)}(N_1,\lambda)=\frac{1}{b_{N_1-1}}((\lambda-a_{N_1-1})V^{(l)}(N_1-1,\lambda)$$

$$-c_{N_1-3}V^{(l)}(N_1-3,\lambda)-b_{N_1-2}V^{(l)}(N_1-2,\lambda))\,.$$

Обозначим через $U_1(N_1-1+k,\lambda)$, $U_2(N_1-1+k,\lambda)$, $k=0,1,\ldots,N-N_1$, фундаментальную систему решений уравнения (3.10), удовлетворяющую начальным данным

$$U_1(N_1-1,\lambda)=1,\ U_1(N_1,\lambda)=0,\ U_2(N_1-1,\lambda)=0,\ U_2(N_1,\lambda)=1\,.$$

Очевидно, что функции U_1 и U_2 являются полиномами от λ со степенями

$$degU_1(N_1+1+k,\lambda)=k,\quad degU_2(N_1+k,\lambda)=k\,.$$

Из решений $V^{(1)}(k,\lambda)$ и $V^{(2)}(k,\lambda)$, образующих фундаментальную систему решений системы (3.5)–(3.7), (3.9), и решений $U_1(N_1-1+k,\lambda)$, $U_2(N_1-1+k,\lambda)$, $k=0,1,\ldots,N-N_1$, образующих фундаментальную систему решений уравнения (3.10), построим решения $P^{(1)}(k,\lambda)$ и $P^{(2)}(k,\lambda)$, $k=0,1,\ldots,N-1$, образующие фундаментальную систему решений системы (3.5)–(3.7), (3.9), (3.10):

$$P^{(l)}(k,\lambda)=V^{(l)}(k,\lambda),\quad k=0,1,\ldots,N_1\,,$$

$$P^{(l)}(k,\lambda)=V^{(l)}(N_1-1,\lambda)U_1(k,\lambda)+V^{(l)}(N_1,\lambda)U_2(k,\lambda),\quad k=N_1+1,\ldots,N-1.$$

Из определения видно, что $P^{(l)}(N_1+k,\lambda)$, $l=1,2$; $k=0,1,\ldots,N-N_1-1$, — полиномы степени

$$degP^{(1)}(N_1+k,\lambda)\le\frac{N_1}{2}+k,\ degP^{(2)}(N_1+k,\lambda)=\frac{N_1}{2}+k\,.$$

При всех λ векторы $\overrightarrow{P^{(l)}}(\lambda)=(P^{(l)}(0,\lambda),\ldots,P^{(l)}(N-1,\lambda))^{\mathrm{T}}$, $l=1,2$, удовлетворяют уравнению

$$(J_{N,N_1}-\lambda I)\overrightarrow{P^{(l)}}(\lambda)=(J_{N,N_1}-\lambda I)\begin{pmatrix}P^{(l)}(0,\lambda)\\ \vdots\\ \vdots\\ P^{(l)}(N-1,\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ Q_1^{(l)}(\lambda)\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ Q_2^{(l)}(\lambda)\end{pmatrix},\quad(3.12)$$

где

$$Q_1^{(l)}(\lambda) = c_{N_1-4}P^{(l)}(N_1-4,\lambda) + b_{N_1-3}P^{(l)}(N_1-3,\lambda)$$

$$+(a_{N_1-2}-\lambda)P^{(l)}(N_1-2,\lambda) + b_{N_1-2}P^{(l)}(N_1-1,\lambda), \qquad (3.12.1)$$

$$Q_2^{(l)}(\lambda) = b_{N-2}P^{(l)}(N-2,\lambda) + (a_{N-1}-\lambda)P^{(l)}(N-1,\lambda), \quad l=1,2, \qquad (3.12.2)$$

— полиномы, определенные из краевых условий (3.8) и (3.11).

Степени полиномов $P^{(l)}(k,\lambda)$, $Q_1^{(l)}(\lambda)$, $Q_2^{(l)}(\lambda)$ приведены в таблице. Здесь же указаны степени полиномов $\lambda^k Q_1^{(l)}(\lambda)$, роль которых будет ясна позднее.

ПОЛИНОМ		$P^{(l)}(0,\lambda)$	$P^{(l)}(1,\lambda)$	$P^{(l)}(2,\lambda)$	$P^{(l)}(3,\lambda)$	$P^{(l)}(4,\lambda)$	...
Сте-	$l=1$	$=0$	≤ 0	$=1$	≤ 1	$=2$	...
пень	$l=2$	–	$=0$	≤ 0	$=1$	≤ 1	...

...	$P^{(l)}(N_1-2,\lambda)$	$P^{(l)}(N_1-1,\lambda)$	$Q_1^{(l)}(\lambda)$	$P^{(l)}(N_1,\lambda)$	$\lambda Q_1^{(l)}(\lambda)$
...	$=\frac{N_1}{2}-1$	$\leq \frac{N_1}{2}-1$	$=\frac{N_1}{2}$	$\leq \frac{N_1}{2}$	$=\frac{N_1}{2}+1$
...	$\leq \frac{N_1}{2}-2$	$=\frac{N_1}{2}-1$	$\leq \frac{N_1}{2}-1$	$=\frac{N_1}{2}$	$\leq \frac{N_1}{2}$

$P^{(l)}(N_1+1,\lambda)$	$\lambda^2 Q_1^{(l)}(\lambda)$	$P^{(l)}(N_1+2,\lambda)$	$\lambda^3 Q_1^{(l)}(\lambda)$	...
$\leq \frac{N_1}{2}+1$	$=\frac{N_1}{2}+2$	$\leq \frac{N_1}{2}+2$	$=\frac{N_1}{2}+3$	...
$=\frac{N_1}{2}+1$	$\leq \frac{N_1}{2}+1$	$=\frac{N_1}{2}+2$	$\leq \frac{N_1}{2}+2$	...

...	$\lambda^{N-N_1-1}Q_1^{(l)}(\lambda)$	$P^{(l)}(N-1,\lambda)$	$\lambda^{N-N_1}Q_1^{(l)}(\lambda)$	$Q_2^{(l)}(\lambda)$
...	$=N-\frac{N_1}{2}-1$	$\leq N-\frac{N_1}{2}-1$	$=N-\frac{N_1}{2}$	$\leq N-\frac{N_1}{2}$
...	$\leq N-\frac{N_1}{2}-2$	$=N-\frac{N_1}{2}-1$	$\leq N-\frac{N_1}{2}-1$	$=N-\frac{N_1}{2}$

Всякое решение системы (3.4) есть линейная комбинация векторов $\overrightarrow{P^{(1)}}(\lambda)$ и $\overrightarrow{P^{(2)}}(\lambda)$. Поэтому собственный вектор матрицы J_{N,N_1} следует искать в виде такой линейной комбинации. Если

$$\vec{y} = \alpha^{(1)}\overrightarrow{P^{(1)}}(\lambda) + \alpha^{(2)}\overrightarrow{P^{(2)}}(\lambda)$$

— собственный вектор, то согласно (3.12)

$$(J_{N,N_1}-\lambda I)(\alpha^{(1)}\overrightarrow{P^{(1)}}(\lambda) + \alpha^{(2)}\overrightarrow{P^{(2)}}(\lambda)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha^{(1)}Q_1^{(1)}(\lambda) + \alpha^{(2)}Q_1^{(2)}(\lambda) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha^{(1)}Q_2^{(1)}(\lambda) + \alpha^{(2)}Q_2^{(2)}(\lambda) \end{pmatrix} = 0.$$

Таким образом, для того чтобы для данного λ существовало ненулевое решение системы (3.4), необходимо и достаточно, чтобы определитель системы

$$\begin{cases} \alpha^{(1)}Q_1^{(1)}(\lambda) + \alpha^{(2)}Q_1^{(2)}(\lambda) = 0, \\ \alpha^{(1)}Q_2^{(1)}(\lambda) + \alpha^{(2)}Q_2^{(2)}(\lambda) = 0 \end{cases} \tag{3.13}$$

был равен нулю.

Лемма 3.2. *Кратность собственных значений матрицы J_{N,N_1} не превышает двух. Простые (двукратные) собственные значения совпадают с простыми (двукратными) корнями полинома $Q(\lambda) = Q_1^{(1)}Q_2^{(2)} - Q_1^{(2)}Q_2^{(1)}$.*

Пусть $L = 2N - N_1$, $p(k,\lambda) = \begin{pmatrix} P^{(1)}(k,\lambda) \\ P^{(2)}(k,\lambda) \end{pmatrix} \in \mathbf{Q}_L$, $q_1(\lambda) = \begin{pmatrix} Q_1^{(1)}(\lambda) \\ Q_1^{(2)}(\lambda) \end{pmatrix} \in \mathbf{Q}_L$ и $q_2(\lambda) = \begin{pmatrix} Q_2^{(1)}(\lambda) \\ Q_2^{(2)}(\lambda) \end{pmatrix} \in \mathbf{Q}_{L+2}$. Согласно таблице степеней, система из L вектор-функций $p(0,\lambda), \ldots, p(N_1-1,\lambda)$, $q_1(\lambda)$, $p(N_1,\lambda)$, $\lambda q_1(\lambda)$, $p(N_1+1,\lambda)$, $\ldots, \lambda^{N-N_1-1}q_1(\lambda)$, $p(N-1,\lambda)$ удовлетворяет условию (3.1) и, согласно лемме 3.1, она образует базис L-мерного пространства $\mathbf{Q}_L := \mathbf{P}_{N-\frac{N_1}{2}} \times \mathbf{P}_{N-\frac{N_1}{2}}$. В частности, вектор-функции $p(k,\lambda)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, линейно независимы. Поэтому справедлива

Лемма 3.3. *Отображение $U : \mathbf{H}_N \to \mathbf{Q}_L$ ($\mathbf{H}_N$ — это N-мерное евклидово пространство, в котором действует J_{N,N_1}), заданное равенством*

$$U\vec{x} = \widetilde{x}(\lambda) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)p(k,\lambda)\,,$$

является инъективным.

Если $\{\alpha_j^{(1)}\overrightarrow{P^{(1)}}(\lambda_j) + \alpha_j^{(2)}\overrightarrow{P^{(2)}}(\lambda_j)\}_{j=1}^{N-1}$ — ортонормированная система собственных векторов матрицы J_{N,N_1}, отвечающая собственным значениям $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_N$, то мы определяем спектральную функцию матрицы J_{N,N_1}:

$$\sigma_D(\lambda) := \sum_{\lambda_j < \lambda} \|\alpha_j^{(l)}\alpha_j^{(k)}\|_{l,k=1}^2. \tag{3.14}$$

Буквально перенося с невырожденного случая соответствующие выкладки, получаем прямую теорему для вырожденного случая:

Теорема 3.1. *С каждой матрицей начальных данных $D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix}$ ($d_{lk} \in \mathbf{R}$, $d_{11}d_{22} \neq 0$) связана спектральная функция $\sigma_D(\lambda)$ матрицы J_{N,N_1}*

— неубывающая, кусочно-постоянная матрица второго порядка со скачками в точках спектра матрицы J_{N,N_1}, порождающая стандартные формулы разложения по собственным векторам:

$$\widetilde{x}(\lambda) = \sum x(k)p(k,\lambda), \quad x(k) = \int \widetilde{x}(\lambda)^{\mathrm{T}} d\sigma_D(\lambda)p(k,\lambda),$$

$$(J\vec{x})(k) = \int \lambda\widetilde{x}(\lambda)^{\mathrm{T}} d\sigma_D(\lambda)p(k,\lambda), \quad (\vec{x},\vec{y})_{\mathbf{H}_N} = \int \widetilde{x}(\lambda)^{\mathrm{T}} d\sigma_D(\lambda)\widetilde{y}(\lambda). \quad (3.15)$$

Следствие. *Спектральная функция порождает в пространстве $\mathbf{Q}_\infty$ неотрицательную билинейную форму (3.2), причем*

$$(\vec{x},\vec{y})_{\mathbf{H}_N} =< U\vec{x}, U\vec{y} >_{\sigma_J} .$$

Отметим элементарные свойства спектральной функции.

1) $D^T(\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma_D(\lambda))D = I$. (Следовательно, $\sigma_D(+\infty) - \sigma_D(-\infty)$ — невырожденная матрица.)

2) Спектральная матрица в простых точках спектра имеет скачки ранга 1, в двукратных точках спектра — скачки ранга 2; таким образом, она имеет N скачков с учетом кратности.

3) Для вектор-функций $q_1(\lambda) = \begin{pmatrix} Q_1^{(1)}(\lambda) \\ Q_1^{(2)}(\lambda) \end{pmatrix} \in \mathbf{Q}_{N_1+1}$ и $q_2(\lambda) = \begin{pmatrix} Q_2^{(1)}(\lambda) \\ Q_2^{(2)}(\lambda) \end{pmatrix} \in \mathbf{Q}_{L+2}$

$$< q_i(\lambda), q_i(\lambda) >_{\sigma_J} = \int (q_i(\lambda))^{\mathrm{T}} d\sigma_D(\lambda) q_i(\lambda) = 0, \quad i = 1,2 .$$

Свойство 3) является непосредственным следствием определения (3.14) и уравнений (3.13), которым удовлетворяют $\alpha_j^{(l)}$ и $Q_i^{(l)}(\lambda_j)$. Оно означает, что форма $< \cdot,\cdot >_{\sigma_J}$ вырождена в $\mathbf{Q}_{N_1+1}$ ($\mathbf{Q}_{N_1+1} \subset \mathbf{Q}_L \subset \mathbf{Q}_\infty$).

С учетом неотрицательности формы $< \cdot,\cdot >_{\sigma_J}$ из него следует, что для любой $r(\lambda) \in \mathbf{Q}_\infty$

$$< q_i(\lambda), r(\lambda) >_{\sigma_J} = 0, \quad i = 1,2 .$$

Более того, с помощью (3.3) получаем, что для всех $j \geq 0$

$$< \lambda^j q_i(\lambda), r(\lambda) >_{\sigma_J} = 0, \quad i = 1,2.$$

З а м е ч а н и е 1. В рассматриваемом нами вырожденном случае ($N > N_1$) инъективное отображение U N-мерного евклидова пространства $\mathbf{H}_N$ в L-мерное евклидово пространство $\mathbf{Q}_L$, конечно же, не является сюрьективным. То есть образом $\mathbf{H}_N$ является подпространство $U\mathbf{H}_N$ в $\mathbf{Q}_L$, натянутое на вектор-функции $\{p(k,\lambda)\}_{k=0}^{N-1}$. Описать этот образ более эффективно мы не можем. Можно только сказать, что $\mathbf{Q}_{N_1} \subset U\mathbf{H}_N$, из чего следует невырожденность формы $< \cdot, \cdot >_{\sigma_J}$ на пространстве $\mathbf{Q}_{N_1}$.

Однако, можно указать дополнение к $U\mathbf{H}_N$ в пространстве $\mathbf{Q}_L$. Это в точности $(L-N)$-мерное подпространство пространства $\mathbf{Q}_L$, на котором вырождается форма $< \cdot, \cdot >_{\sigma_J}$ (обозначим его через $\mathbf{G}_{\sigma,L}$). Вектор-функции $\{\lambda^j q_1(\lambda)\}_{j=0}^{N-N_1-1}$ образуют базис подпространства $\mathbf{G}_{\sigma,L}$.

Таким образом, отображение U является, на самом деле, унитарным отображением на фактор-пространство $\mathbf{Q}_L/\mathbf{G}_{\sigma,L}$. (Скалярное произведение на этом фактор-пространстве индуцируется обычным образом по неотрицательной билинейной форме $< \cdot, \cdot >_{\sigma_J}$.)

Отметим еще, что отображение U можно рассматривать как отображение в пространство всех двумерных полиномиальных вектор-функций $\mathbf{Q}_\infty := \mathbf{P}_\infty \times \mathbf{P}_\infty$. В расширенном пространстве $\mathbf{Q}_\infty$ ($\mathbf{Q}_L \subset \mathbf{Q}_\infty$) базисом подпространства $\mathbf{G}_{\sigma,\infty}$, на котором вырождается билинейная форма $< \cdot, \cdot >_{\sigma_J}$, являются уже вектор-функции вида $\lambda^j q_1(\lambda)$, $\lambda^j q_2(\lambda)$, $j \geq 0$. Тогда U следует рассматривать как унитарное отображение в фактор-пространство $\mathbf{Q}_\infty/\mathbf{G}_{\sigma,\infty}$ ($\mathbf{G}_{\sigma,\infty} = \{R_1(\lambda)q_1(\lambda) + R_2(\lambda)q_2(\lambda) \mid R_1(\lambda), R_2(\lambda)$ – полиномы$\}$).

З а м е ч а н и е 2. Во всякой точке ν_j двукратного спектра матрицы J_{N,N_1} $Q_1^{(1)}(\nu_j) = 0$. Учитывая степень $Q_1^{(1)}(\lambda)$, заключаем, что J_{N,N_1} имеет не более чем $\frac{N_1}{2}$ двукратных собственных значений.

З а м е ч а н и е 3. При $N_1 = 2$ трехдиагональную матрицу $J_{N,2}$ можно формально включить в общий случай пятидиагональных вырожденных матриц. Можно показать, что если $\sigma_D(\lambda)$ — спектральная матрица-функция матрицы $J_{N,2}$, рассматриваемой как вырожденная пятидиагональная, то верхний левый элемент матричнозначной функции $D^T\sigma_D(\lambda)D$ совпадает со спектральной функцией (в смысле классической теории матриц Якоби) $\rho(\lambda)$ якобиевой матрицы $J_{N,2}$.

4. "Вырожденные" пятидиагональные матрицы. Обратная задача

Теорема 4.1. *Пусть $\sigma(\lambda)$ — неубывающая кусочно-постоянная матрица-функция второго порядка, у которой сумма рангов скачков равна N, и матрица $\sigma(+\infty) - \sigma(-\infty)$ — невырожденна. Тогда существует пятидиагональная матрица J_{N,N_1}, для которой $\sigma(\lambda)$ является спектральной.*

При этом N_1 — такое число, что порожденная функцией $\sigma(\lambda)$ билинейная форма (3.2) вырожденна в пространстве $\mathbf{Q}_{N_1+1}$, но невырожденна в $\mathbf{Q}_{N_1}$. В частности, если $N_1 = 2$, то J_{N,N_1} — обычная якобиева (трехдиагональная) матрица.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в невырожденном случае, докажем теорему в два этапа. Сперва по билинейной форме $< \cdot, \cdot >_\sigma$ восстановим матрицу J_{N,N_1}, спектральная функция σ_J которой порождает ту же билинейную форму, что и σ. Потом из совпадения билинейных форм получим равенство $\sigma_J = \sigma$.

Не нарушая общности, будем считать, что N_1 — четное и $N_1 < N$ (невырожденный случай $N_1 = N$ рассмотрен в первой части). То, что $N_1 \geq 2$, следует из невырожденности σ на бесконечности. Определим $L := 2N - N_1$.

Обозначим через $\widetilde{q}(\lambda) = \begin{pmatrix} \widetilde{Q}^{(1)}(\lambda) \\ \widetilde{Q}^{(2)}(\lambda) \end{pmatrix} \in \mathbf{Q}_{N_1+1}$ вектор-функцию минимальной высоты ($h(q) = N_1$), на которой вырождается билинейная форма:

$$< \widetilde{q}(\lambda), \widetilde{q}(\lambda) >_\sigma = 0.$$

Утверждение. *Если* $r(\lambda) \in \mathbf{Q}_L$ *и* $< r(\lambda), r(\lambda) >_\sigma = 0$, *то*

$$r(\lambda) = S(\lambda)\widetilde{q}(\lambda),$$

где $S(\lambda)$ *— скалярный полином.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функцию $\sigma(\lambda)$ как неубывающую матрицу с N скачками можно представить в виде

$$\sigma(\lambda) = \sum_{\mu_j < \lambda} \|\alpha_j^{(k)} \alpha_j^{(l)}\|_{l,k=1}^2 .$$

Здесь $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_N$ — точки роста $\sigma(\lambda)$, повторяющиеся дважды в точках, где скачок — невырожденная матрица; при этом, если $\mu_j = \mu_{j+1}$, то $\alpha_j^{(1)}\alpha_{j+1}^{(2)} - \alpha_j^{(2)}\alpha_{j+1}^{(1)} \neq 0$. (Возможность такого представления показана в теореме 2.2 первой части работы.)

Вырождение формы $< \cdot, \cdot >_\sigma$ на $r(\lambda)$ означает, что

$$0 = \int r(\lambda)^{\mathrm{T}} d\sigma(\lambda) r(\lambda) = \sum_{j=1}^{N} r(\mu_j)^{\mathrm{T}} \|\alpha_j^{(k)} \alpha_j^{(l)}\|_{l,k=1}^2 r(\mu_j),$$

т.е., с учетом неотрицательности матриц $\|\alpha_j^{(k)} \alpha_j^{(l)}\|_{l,k=1}^2$,

$$\|\alpha_j^{(k)} \alpha_j^{(l)}\|_{l,k=1}^2 r(\mu_j) = 0$$

и аналогично для $\widetilde{q}(\lambda)$

$$\|\alpha_j^{(k)} \alpha_j^{(l)}\|_{l,k=1}^2 \widetilde{q}(\mu_j) = 0,$$

откуда

$$R^{(1)}(\mu_j)\widetilde{Q}^{(2)}(\mu_j) - R^{(2)}(\mu_j)\widetilde{Q}^{(1)}(\mu_j) = 0,$$

причем в точках невырожденного роста $\mu_j = \mu_{j+1}$ матричнозначной функции σ

$$R^{(1)}(\mu_j) = \widetilde{Q}^{(2)}(\mu_j) = R^{(2)}(\mu_j) = \widetilde{Q}^{(1)}(\mu_j) = 0,$$

так как $\alpha_j^{(1)}\alpha_{j+1}^{(2)} - \alpha_j^{(2)}\alpha_{j+1}^{(1)} \neq 0$. Таким образом, полином

$$R^{(1)}(\lambda)\widetilde{Q}^{(2)}(\lambda) - R^{(2)}(\lambda)\widetilde{Q}^{(1)}(\lambda)$$

имеет степень не более чем $(N-1)$ и равен нулю в N точках роста матрицы σ (т.е. в двукратных точках роста $\mu_j = \mu_{j=1}$, в частности, он имеет нуль не менее чем второй кратности). Следовательно, он тождественно равен нулю.

Рассмотрим, с учетом кратности, нули полинома $R^{(1)}(\lambda)$. Они являются либо корнями $R^{(2)}(\lambda)$, либо корнями $\widetilde{Q}^{(1)}(\lambda)$. Аналогично, все нули полинома $R^{(2)}(\lambda)$ — это корни либо $R^{(1)}(\lambda)$, либо $\widetilde{Q}^{(2)}(\lambda)$. Обозначив через $\widetilde{S}(\lambda)$ наибольший общий делитель полиномов $R^{(1)}(\lambda)$ и $R^{(2)}(\lambda)$, а через $\widetilde{T}(\lambda)$ — наибольший общий делитель полиномов $\widetilde{Q}^{(1)}(\lambda)$ и $\widetilde{Q}^{(2)}(\lambda)$, получаем

$$R^{(1)}(\lambda) = \frac{\widetilde{S}(\lambda)\widetilde{Q}^{(1)}(\lambda)}{\widetilde{T}(\lambda)}, \quad R^{(2)}(\lambda) = a\,\frac{\widetilde{S}(\lambda)\widetilde{Q}^{(2)}(\lambda)}{\widetilde{T}(\lambda)},$$

где a — некоторое число. Из соотношения

$$\widetilde{S}\widetilde{Q}^{(1)}\widetilde{Q}^{(2)} - a\widetilde{S}\widetilde{Q}^{(2)}\widetilde{Q}^{(1)} \equiv 0$$

получаем $a = 1$. Сократив общие корни $\widetilde{S}(\lambda)$ и $\widetilde{T}(\lambda)$, получим

$$R^{(1)}(\lambda) = \frac{S(\lambda)\widetilde{Q}^{(1)}(\lambda)}{T(\lambda)}, \quad R^{(2)}(\lambda) = \frac{S(\lambda)\widetilde{Q}^{(2)}(\lambda)}{T(\lambda)}, \tag{4.1}$$

где $S(\lambda)$ и $T(\lambda)$ не имеют общих корней.

Нам осталось доказать, что $T(\lambda) \equiv const$. В самом деле, пусть μ_0 — корень $T(\lambda)$. Во-первых, μ_0 — это точка роста $\sigma(\lambda)$, потому что в противном случае для вектор-функции $\widetilde{\widetilde{q}}(\lambda) = \frac{1}{\lambda-\mu_0}\widetilde{q}(\lambda)$, $h(\widetilde{\widetilde{q}}) = N_1 - 2$, имели бы

$$< \widetilde{\widetilde{q}}(\lambda), \widetilde{\widetilde{q}}(\lambda) >_\sigma = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{(\mu_j - \mu_0)^2}\widetilde{q}(\mu_j)^{\mathrm{T}}\|\alpha_j^{(k)}\alpha_j^{(l)}\|_{l,k=1}^2\widetilde{q}(\mu_j) = 0,$$

что противоречит тому, что $\widetilde{q}(\lambda)$ — вектор-функция минимальной высоты, на которой вырождается билинейная форма. Итак, μ_0 — это одна из точек μ_j скачка матрицы σ. Но тогда из соотношений (4.1) и того, что $S(\mu_0) \neq 0$, из равенства

$$\|\alpha_j^{(k)}\alpha_j^{(l)}\|_{l,k=1}^2 r(\mu_j) = 0, \quad \mu_j = \mu_0,$$

получается $\|\alpha_j^{(k)}\alpha_j^{(l)}\|_{l,k=1}^2\widetilde{\widetilde{q}}(\mu_j)=0$ $(\mu_j=\mu_0, \widetilde{\widetilde{q}}(\lambda)=\frac{1}{\lambda-\mu_0}\widetilde{q}(\lambda), h(\widetilde{\widetilde{q}})=N_1-2)$, откуда снова получается противоречие $<\widetilde{\widetilde{q}}(\lambda),\widetilde{\widetilde{q}}(\lambda)>_\sigma=0$. Таким образом, $T(\lambda)\equiv const$. Утверждение доказано.

С учетом того, что $h(\widetilde{q})=N_1$, т.е. $deg\widetilde{Q}^{(1)}=N_1/2$, $deg\widetilde{Q}^{(2)}\le N_1/2-1$, справедливо

Следствие. *Если* $r(\lambda)\in \mathbf{Q}_L$ *имеет степени* $\begin{pmatrix}\le k\\ =k\end{pmatrix}$, $k\le N-\frac{N_1}{2}-1$, *то*

$$<r(\lambda),r(\lambda)>_\sigma\ne 0\,.$$

Ортогонализуя в пространстве $\mathbf{Q}_L$ с неотрицательной билинейной формой $<\cdot,\cdot>_\sigma$ систему вектор-функций $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\lambda\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\\lambda\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\lambda^2\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\\lambda^2\end{pmatrix}$, $\dots$, $\begin{pmatrix}\lambda^{\frac{N_1}{2}-1}\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\\lambda^{\frac{N_1}{2}-1}\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0\\\lambda^{\frac{N_1}{2}}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\\lambda^{\frac{N_1}{2}+1}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\\lambda^{\frac{N_1}{2}+2}\end{pmatrix}$, $\dots$, $\begin{pmatrix}0\\\lambda^{N-\frac{N_1}{2}-2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\\lambda^{N-\frac{N_1}{2}-1}\end{pmatrix}$, получим систему систему из N ортогональных вектор-функций. Покажем, что эти вектор-функции ненулевой длины, т.е. на них не вырождается форма $<\cdot,\cdot>_\sigma$. В самом деле, первые N_1 функций из них принадлежат пространству $\mathbf{Q}_{N_1}$, на котором $<\cdot,\cdot>_\sigma$ невырожденна, а последующие имеют степени $\begin{pmatrix}\le k\\ =k\end{pmatrix}$, $\frac{N_1}{2}\le k\le N-\frac{N_1}{2}-1$. Поэтому, отнормировав векторы этой системы, получим ортонормированную систему $\widetilde{p}(0,\lambda),\widetilde{p}(1,\lambda)$, $\dots$, $\widetilde{p}(N_1-1,\lambda)$; $\widetilde{p}(N_1,\lambda),\dots,\widetilde{p}(N-1,\lambda)$. Элементы функций $\widetilde{p}(0,\lambda)$, $\dots$, $\widetilde{p}(N_1-1,\lambda)$, $\widetilde{q}(\lambda)$, $\widetilde{p}(N_1,\lambda)$, $\lambda\widetilde{q}(\lambda)$, $\widetilde{p}(N_1+1,\lambda)$, $\dots$, $\lambda^{N-N_1-1}\widetilde{q}(\lambda)$, $\widetilde{p}(N-1,\lambda)$ удовлетворяют таблице степеней, т.е. эти функции удовлетворяют свойству (3.1). Следовательно, по лемме 3.1, первые k функций этого набора образуют базис пространства $\mathbf{Q}_k$, $k=1,\dots,L$. При этом по построению $\widetilde{p}(k,\lambda)$ ортогональны $\mathbf{Q}_k$, $k\le N_1-1$ и $\widetilde{p}(N_1+k,\lambda)$ ортогональны $\mathbf{Q}_{N_1+1+2k}$, $k\ge 0$.

Если $k\le N-2$, то вектор-функции $p(k,\lambda)\in\mathbf{Q}_{L-2}$, $\lambda p(k,\lambda)\in\mathbf{Q}_L$. Следовательно, можно написать разложение

$$\lambda\widetilde{p}(k,\lambda)=\sum_{i=0}^{N-1}f_{ki}\widetilde{p}(i,\lambda)+S(k)(\lambda)\widetilde{q}(\lambda),\quad k\le N-2\,, \tag{4.2}$$

где $S(k)(\lambda)$ некоторый полином. Скалярно умножая (4.2) на $\widetilde{p}(i,\lambda)$, получаем

$$f_{ki}=<\lambda\widetilde{p}(k,\lambda),\widetilde{p}(i,\lambda)>_\sigma,$$

причем $f_{ki}=<\lambda\widetilde{p}(k,\lambda),\widetilde{p}(i,\lambda)>_\sigma=<\lambda\widetilde{p}(i,\lambda),\widetilde{p}(k,\lambda)>_\sigma=f_{ik}$.

Обозначим

$$a_k = f_{kk} =< \lambda\widetilde{p}(k,\lambda), \widetilde{p}(k,\lambda) >, \quad k = 0,1,\ldots,N-1,$$

$$b_k = f_{k\ k+1} =< \lambda\widetilde{p}(k,\lambda), \widetilde{p}(k+1,\lambda) >, \quad k = 0,1,\ldots,N-2,$$

$$c_k = f_{k\ k+2} =< \lambda\widetilde{p}(k,\lambda), \widetilde{p}(k+2,\lambda) >, \quad k = 0,1,\ldots,N-3.$$

Исследуем сначала (4.2) для $k \le N_1 - 3$. Во-первых, следя за высотами участвующих в разложении вектор-функций, видим, что $S(k)(\lambda) = 0$, $k = 0,\ldots,N_1-3$. Далее, так как $\widetilde{p}(i,\lambda)$ удовлетворяют таблице степеней, $h(\widetilde{p}(k,\lambda)) = k$, $h(\lambda\widetilde{p}(k,\lambda)) = k+2$. Поэтому

$$\lambda\widetilde{p}(k,\lambda) = g_k\widetilde{p}(k+2,\lambda) + r(k+2,\lambda)\,,$$

где число $g_k \neq 0$, а $r(k+2,\lambda) \in \mathbf{Q}_{k+2}$. Но $\widetilde{p}(k+2,\lambda)$ ортогонален всем векторам $\mathbf{Q}_{k+2}$. Поэтому, скалярно умножая последнее равенство на $\widetilde{p}(k+2,\lambda)$, получим

$$< \lambda\widetilde{p}(k,\lambda), \widetilde{p}(k+2,\lambda) >_\sigma = f_{k+2\ k} = f_{k\ k+2} = c_k = g_k \neq 0\,.$$

Если $i-k > 2$, то $\lambda\widetilde{p}(k,\lambda) \in \mathbf{Q}_{k+3}$, а вектор $\widetilde{p}(i,\lambda)$ ортогонален $\mathbf{Q}_i$, поэтому $f_{ki} =< \lambda\widetilde{p}(k,\lambda), \widetilde{p}(i,\lambda) >_\sigma = 0$. Если же $k - i > 2$, то $f_{ki} = f_{ik} = 0$.

Теперь конкретизируем (4.2) для вектор-функций $\lambda\widetilde{p}(N_1-1+k,\lambda)$, $k \ge 0$. С учетом высот $\widetilde{q}(\lambda)$ и $\widetilde{p}(i,\lambda)$

$$\lambda\widetilde{p}(N_1-1+k,\lambda) = \sum f_{N_1-1+k\ i}\widetilde{p}(i,\lambda) + S_k(\lambda)\widetilde{q}(\lambda)\,,$$

где $S_k(\lambda)$ — полином не выше, чем k-й степени. Далее, из того, что $\widetilde{p}(i,\lambda)$ удовлетворяют таблице степеней, видно, что для $k \ge 0$

$$\lambda\widetilde{p}(N_1-1+k,\lambda) = g_k\widetilde{p}(N_1+k,\lambda) + r(N_1+2k+1,\lambda)\,,$$

где число $g \neq 0$, а $r(N_1+2k+1,\lambda) \in \mathbf{Q}_{N_1+2k+1}$. Поэтому $< r(N_1+2k+1,\lambda), \widetilde{p}(N_1+k,\lambda) >_\sigma = 0$ и, следовательно, $b_{N_1-1+k} = g_k \neq 0$, $k \ge 0$.

Если $m - (N_1 - 1 + k) > 1$, то $\lambda\widetilde{p}(N_1-1+k,\lambda) \in \mathbf{Q}_{N_1+2k+2}$, а вектор $\widetilde{p}(m,\lambda)$ ортогонален $\mathbf{Q}_{N_1+2k+2}$. Следовательно, $f_{N_1-1+k\ m} = 0$. Последнее рассуждение показывает, что $f_{m\ N_1-1+k} = f_{N_1-1+k\ m} = 0, m-(N_1-1+k) > 1$, в частности, $c_{N_1-2} = c_{N_1-1} = \ldots = c_{N-3} = 0$.

Таким образом, $\widetilde{p}(0,\lambda)$, $\widetilde{p}(1,\lambda)$, ... , $\widetilde{p}(N-1,\lambda)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} a_0\widetilde{p}(0)+b_0\widetilde{p}(1)+c_0\widetilde{p}(2)=\lambda\widetilde{p}(0), \\ b_0\widetilde{p}(0)+a_1\widetilde{p}(1)+b_1\widetilde{p}(2)+c_1\widetilde{p}(3)=\lambda\widetilde{p}(1), \\ c_0\widetilde{p}(0)+b_1\widetilde{p}(1)+a_2\widetilde{p}(2)+b_2\widetilde{p}(3)+c_2\widetilde{p}(4)=\lambda\widetilde{p}(2), \\ \vdots \\ c_{k-2}\widetilde{p}(k-2)+b_{k-1}\widetilde{p}(k-1)+a_kp(k)+b_k\widetilde{p}(k+1)+c_k\widetilde{p}(k+2)=\lambda\widetilde{p}(k), \\ \vdots \\ c_{N_1-5}\widetilde{p}(N_1-5)+b_{N_1-4}\widetilde{p}(N_1-4)+a_{N_1-3}\widetilde{p}(N_1-3)+b_{N_1-3}\widetilde{p}(N_1-2) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +c_{N_1-3}\widetilde{p}(N_1-1)=\lambda\widetilde{p}(N_1-3), \\ c_{N_1-3}\widetilde{p}(N_1-3)+b_{N_1-2}\widetilde{p}(N_1-2)+a_{N_1-1}\widetilde{p}(N_1-1)+b_{N_1-1}\widetilde{p}(N_1) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +S_0(\lambda)\widetilde{q}(\lambda)=\lambda\widetilde{p}(N_1-1), \\ b_{N_1-1}\widetilde{p}(N_1-1)+a_{N_1}\widetilde{p}(N_1)+b_{N_1}\widetilde{p}(N_1+1)+S_1(\lambda)\widetilde{q}(\lambda)=\lambda\widetilde{p}(N_1), \\ b_{N_1}\widetilde{p}(N_1)+a_{N_1+1}\widetilde{p}(N_1+1)+b_{N_1+1}\widetilde{p}(N_1+2)+S_2(\lambda)\widetilde{q}(\lambda)=\lambda\widetilde{p}(N_1+1), \\ \vdots \\ b_{N-3}\widetilde{p}(N-3)+a_{N-2}\widetilde{p}(N-2)+b_{N-2}\widetilde{p}(N-1) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +S_{N-N_1-1}(\lambda)\widetilde{q}(\lambda)=\lambda\widetilde{p}(N-2). \end{cases} \tag{4.3}$$

Зная вектор-функции $\widetilde{p}(k,\lambda)$, $k=0,1,\ldots,N-1$, зададим систему вектор-функций $p(k,\lambda)$, $k=0,1,\ldots,N-1$:

$$p(k,\lambda)=\widetilde{p}(k,\lambda),\ k=0,1,\ldots,N_1-1,$$

а другие вектор-функции определим поочередно так, чтобы из составленного для них соотношения вида (4.3) исключить слагаемые $S_k(\lambda)\widetilde{q}(\lambda)$, т.е. для $p(k,\lambda)$, $k\ge N_1$, привести это соотношение к виду (3.9),(3.10):

$$p(N_1,\lambda)=\widetilde{p}(N_1,\lambda)+\frac{S_0(\lambda)}{b_{N_1-1}}\widetilde{q}(\lambda)\,.$$

Тогда

$$c_{N_1-3}p(N_1-3)+b_{N_1-2}p(N_1-2)+a_{N_1-1}p(N_1-1)+b_{N_1-1}p(N_1)=\lambda p(N_1-1)\,.$$

Теперь определим $p(N_1+1,\lambda)$ так, чтобы исключить $S_1(\lambda)\widetilde{q}(\lambda)$ из следующего соотношения и т.д. Так построенные $p(k,\lambda)$ отличаются от $\widetilde{p}(k,\lambda)$ на векторы нулевой длины. Следовательно, они тоже составляют ортонормированную систему. Однако теперь $p(k,\lambda)$ удовлетворяют уравнениям (3.5)–(3.7), (3.9), (3.10), т.е. порождены вырожденной пятидиагональной матрицей (3.0).

Определим, как в формулах (3.12), вектор-функции

$$q_1(\lambda)=c_{N_1-4}p(N_1-4,\lambda)+b_{N_1-3}p(N_1-3,\lambda)$$

$$+(a_{N_1-2}-\lambda)p(N_1-2,\lambda)+b_{N_1-2}p(N_1-1,\lambda)\,,$$
$$q_2(\lambda)=b_{N-2}p(N-2,\lambda)+(a_{N-1}-\lambda)p(N-1,\lambda)\,.$$

Используя это определение и определение элементов a_k, b_k, c_k восстановленной матрицы J_{N,N_1}, с учетом ортонормированности $p(k,\lambda)$, непосредственно проверяется, что

$$< q_i(\lambda), p(k,\lambda) >_\sigma = 0 \quad (i=1,2;\ k=0,1,\ldots,N-1)\,.$$

Учитывая, что $h(q)=h(\widetilde{q})=N_1$, находим

$$q_1(\lambda)-g\widetilde{q}(\lambda)=r(N_1,\lambda)\,,$$

где число $g\neq 0$, а $r(N_1,\lambda)\in\mathbf{Q}_{N_1}$, откуда

$$q_1(\lambda)-g\widetilde{q}(\lambda)=\sum_{k=0}^{N_1-1} < q_1(\lambda)-g\widetilde{q}(\lambda), p(k,\lambda) > p(k,\lambda)=0\,.$$

Итак, $q_1(\lambda)$ отличается от $\widetilde{q}(\lambda)$ постоянным множителем. Далее, из последнего равенства и свойства (3.3)

$$< \lambda^k q_i(\lambda), p(k,\lambda) >_\sigma = 0 \quad (i=1,2;\ k=0,\ldots,N-N_1)\,.$$

Как показано в п. 3, аналогичные соотношения справедливы и для билинейной формы $<\cdot,\cdot>_{\sigma_J}$, порожденной спектральной функцией $\sigma(\lambda)$ восстановленной матрицы J_{N,N_1}.

Система вектор-функций $\{p(k,\lambda)\}_{k=0}^{N-1}$, $\{\lambda^k q_1(\lambda)\}_{k=0}^{N-N_1-1}$ образует базис пространства $\mathbf{Q}_L$. Вместе с функциями $\lambda^{N-N_1}q_1(\lambda)$ и $q_2(\lambda)$ она образует базис пространства $\mathbf{Q}_{L+2}$. Нами показано, что вектор-функции $\{p(k,\lambda)\}_{k=0}^{N-1}$ образуют ортонормированную систему в пространстве $\mathbf{Q}_L$ как с билинейной формой $<\cdot,\cdot>_\sigma$, так и с билинейной формой $<\cdot,\cdot>_{\sigma_J}$. Кроме того, обе билинейные формы обращаются в нуль на вектор-функциях $\lambda^k q_1(\lambda)$ и $q_2(\lambda)$. Как и в невырожденном случае, получено совпадение форм $<\cdot,\cdot>_\sigma$ и $<\cdot,\cdot>_{\sigma_J}$ на парах векторов из $\mathbf{Q}_{L+2}\times\mathbf{Q}_L$, т.е.

$$< r(\lambda, s(\lambda) >_\sigma = < r(\lambda), s(\lambda) >_{\sigma_J} \quad (r(\lambda)\in\mathbf{Q}_{L+2},\ s(\lambda)\in\mathbf{Q}_L)\,.$$

Нам осталось доказать, что это совпадение влечет совпадение самих неубывающих функций, если у обеих функций сумма рангов скачков равна N. Аналогичный факт для невырожденного случая доказывается теоремой 2.2 первой части работы. Мы лишь укажем, как это доказательство видоизменяется в вырожденном случае. Представим неубывающую, кусочно-постоянную $\sigma(\lambda)$ в виде

$$\sigma(\lambda)=\sum_{\mu_j<\lambda}\|\alpha_j^{(l)}\alpha_j^{(k)}\|_{l,k=1}^2,$$

где μ_j, $j = 1, \ldots, N$ — это точки роста функции $\sigma(\lambda)$, дважды повторяющиеся в точках, где скачок — обратимая матрица.

Лемма 4.1. *Для каждого* $m = 1, 2, \ldots, N$ *существует такая не равная нулю вектор-функция* $r_m(\lambda) = \begin{pmatrix} R_m^{(1)}(\lambda) \\ R_m^{(2)}(\lambda) \end{pmatrix} \in \mathbf{Q}_L$, *что*

$$\alpha_i^{(1)} R_m^{(1)}(\mu_i) + \alpha_i^{(2)} R_m^{(2)}(\mu_i) = 0, \quad i \neq m, i = 1, \ldots, m-1, m+1, \ldots, N, \tag{4.4}$$

$$\alpha_m^{(1)} R_m^{(1)}(\mu_m) + \alpha_m^{(2)} R_m^{(2)}(\mu_m) \neq 0\,. \tag{4.5}$$

Заметим, что доказательство теоремы 2.2 первой части работы тоже опирается на существование таких вектор-функций $r_m(\lambda)$ (формулы (4.4) и (4.5) повторяют формулы (2.10) и (2.11)), однако приведенное там доказательство этого существования неприменимо, если форма $< \cdot, \cdot >_\sigma$ вырожденна в $\mathbf{Q}_N$. Но всю оставшуюся часть доказательства теоремы 2.2 можно перенести на вырожденный случай дословно. Поэтому для того, чтобы доказать совпадение матричнозначных функций $\sigma = \sigma_J$, нам осталось доказать только эту лемму.

Доказательство. Зададим произвольным образом дополнительные $N - N_1$ точек $\mu_{N+1} < \mu_{N+2} < \ldots < \mu_L$ так, чтобы они не совпадали с точками роста функции σ. Определим в них числа $\alpha_{N+1}^{(l)}, \ldots, \alpha_L^{(l)}$, $l = 1, 2$, так, чтобы

$$\alpha_i^{(1)} \widetilde{Q}^{(1)}(\mu_i) + \alpha_i^{(2)} \widetilde{Q}^{(2)}(\mu_i) \neq 0, \quad i = N+1, \ldots, L\,.$$

(Напомним, что $\widetilde{q}(\lambda) = \begin{pmatrix} \widetilde{Q}^{(1)}(\lambda) \\ \widetilde{Q}^{(2)}(\lambda) \end{pmatrix}$ — вектор-функция минимальной высоты $h(\widetilde{q}) = N_1$, на которой вырождаются билинейные формы $< \cdot, \cdot >_\sigma$ и $< \cdot, \cdot >_{\sigma_J}$.)

Предположим, что мы построили вектор-функцию $r_m(\lambda) = \begin{pmatrix} R_m^{(1)}(\lambda) \\ R_m^{(2)}(\lambda) \end{pmatrix} \in \mathbf{Q}_L$ ($r_m \neq 0$), для которой

$$\alpha_i^{(1)} R_m^{(1)}(\mu_i) + \alpha_i^{(2)} R_m^{(2)}(\mu_i) = 0, \quad i \neq m, i = 1, \ldots, m-1, m+1, \ldots, L\,.$$

(В отличие от (4.4) здесь $L - 1$ равенств, а не $N - 1$.) Покажем, что отсюда, кроме (4.4), немедленно следует и (4.5). В самом деле, предположим, что

$$\alpha_m^{(1)} R_m^{(1)}(\mu_m) + \alpha_m^{(2)} R_m^{(2)}(\mu_m) = 0\,.$$

Тогда

$$< r_m, r_m >_\sigma = \int r_m(\lambda)^{\mathrm{T}} d\sigma(\lambda) r_m(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} (\alpha_i^{(1)} R_m^{(1)}(\mu_i) + \alpha_i^{(2)} R_m^{(2)}(\mu_i))^2 = 0.$$

По утверждению, приведенному в начале данного раздела,

$$r_m(\lambda) = S(\lambda)\widetilde{q}(\lambda),$$

где $S(\lambda)$ — полином (он имеет степень не выше $(N - N_1 - 1)$, поскольку в противном случае $r_m(\lambda)$ не принадлежала бы пространству $\mathbf{Q}_L$). Но в этом случае из равенств

$$\alpha_i^{(1)} R_m^{(1)}(\mu_i) + \alpha_i^{(2)} R_m^{(2)}(\mu_i) = S(\mu_i)(\alpha_i^{(1)} \widetilde{Q}^{(1)}(\mu_i) + \alpha_i^{(2)} \widetilde{Q}^{(2)}(\mu_i)) = 0,$$
$$i = N+1, \ldots, L\,;$$
$$\alpha_i^{(1)} \widetilde{Q}^{(1)}(\mu_i) + \alpha_i^{(2)} \widetilde{Q}^{(2)}(\mu_i) \neq 0,\ i = N+1, \ldots, L\,,$$

немедленно следует

$$S(\mu_{N+1}) = S(\mu_{N+2}) = \ldots = S(\mu_L) = 0\,.$$

отсюда $S(\lambda) \equiv 0$, потому что $degS(\lambda) \leq N - N_1 - 1$. Из этого противоречия получаем (4.5).

Таким образом, мы свели лемму к следующему факту: для заданной последовательности $2(L-1)$ чисел $\alpha_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)}$ и $L-1$ точек μ_i, $i = 1, \ldots, m-1, m+1, \ldots, L$, (возможно, повторяющихся дважды) существует такая не равная нулю вектор-функция $r_m(\lambda) \in \mathbf{Q}_L$, что

$$\alpha_i^{(1)} R_m^{(1)}(\mu_i) + \alpha_i^{(2)} R_m^{(2)}(\mu_i) = 0,\ i = 1, \ldots, m-1, m+1, \ldots, L\,.$$

Этот факт доказан в теореме 2.2 первой части работы (формула (2.12) и далее). Лемма доказана.

Имея для каждой точки роста μ_m матрицы σ такую вектор-функцию, можно применить доказательство теоремы 2.2 для вырожденного случая. Таким образом, $\sigma = \sigma_J$. Теорема доказана.

Итак, и в вырожденном ($N_1 < N$), и в невырожденном ($N_1 = N$) случаях спектральная функция пятидиагональной матрицы J_{N,N_1} — это неубывающая матрица второго порядка, имеющая N скачков с учетом кратности. Обратно, всякая функция такого вида является спектральной для некоторой J_{N,N_1}. Поэтому справедлива

Теорема 4.2 (основная теорема для случая пятидиагональных матриц вида J_{N,N_1}). *Для того чтобы матричнозначная функция $\sigma(\lambda)$ второго порядка была спектральной функцией некоторой возможно вырождающейся пятидиагональной симметрической матрицы J_{N,N_1} порядка N, необходимо и достаточно, чтобы она была неубывающей кусочно-постоянной матрицей, имеющей N скачков с учетом кратности, и чтобы $\sigma(+\infty) - \sigma(-\infty)$ была невырожденной.*

При этом число N_1 $(c_{N_1-3} \neq 0, c_{N_1-2} = 0)$ *определяется тем, что форма* $< \cdot,\cdot >_\sigma$ *вырожденна в пространстве* $\mathbf{Q}_{N_1+1}$*, но невырожденна в пространстве* $\mathbf{Q}_{N_1}$*, т.е. существует такая вектор-функция* $q(\lambda) \in \mathbf{Q}_\infty$ *высоты* $h(q) = N_1$*, что*

$$< q(\lambda), q(\lambda) >_\sigma = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (q(\lambda))^{\mathrm{T}} d\sigma(\lambda) q(\lambda) = 0,$$

и $q(\lambda)$ *— вектор-функция минимальной высоты (за исключением* $q \equiv 0$*), обладающая этим свойством.*

Еще раз заметим, что при $N_1 = 2$ матрица J_{N,N_1} вырождается в трехдиагональную матрицу.

5. Прямая задача для полубесконечных невырожденных матриц

Рассматривается полубесконечная пятидиагональная матрица

$$J = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ b_0 & a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ c_0 & b_1 & a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & c_1 & b_2 & a_3 & b_3 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad c_k \neq 0,\ k = 0, 1, \dots . \tag{5.0}$$

Матрица J рассматривается как оператор, действующий на некотором многообразии в l^2. Все финитные векторы принадлежат этому многообразию.

Конечноразностное уравнение

$$\begin{cases} a_0 y(0) + b_0 y(1) + c_0 y(2) = \lambda y(0)\,, \\ b_0 y(0) + a_1 y(1) + b_1 y(2) + c_1 y(3) = \lambda y(1)\,, \\ c_0 y(0) + b_1 y(1) + a_2 y(2) + b_2 y(3) + c_2 y(4) = \lambda y(2)\,, \\ \vdots \\ c_{k-2} y(k-2) + b_{k-1} y(k-1) + a_k y(k) + b_k y(k+1) + c_k y(k+2) = \lambda y(k)\,, \\ \vdots \end{cases} \tag{5.1}$$

имеет два линейно независимых решения $P^{(1)}(k,\lambda)$ и $P^{(2)}(k,\lambda)$, заданные начальными данными

$$P^{(1)}(0,\lambda) = d_{11},\ P^{(1)}(1,\lambda) = d_{12},\ P^{(2)}(0,\lambda) = 0,$$

$$P^{(2)}(1,\lambda) = d_{22} \quad (d_{ik} \in \mathbf{R},\ d_{11}d_{22} \neq 0)$$

и образующие его фундаментальную систему. $P^{(l)}(k,\lambda)$, $l = 1,2;$ $k = 0,1,2,\ldots,$ полиномиально зависят от λ и имеют степени:

$$degP^{(1)}(2k,\lambda) = degP^{(2)}(2k+1,\lambda) = k\,,$$

$$degP^{(2)}(2k+2,\lambda) \leq k,\ degP^{(1)}(2k+1,\lambda) \leq k\,.$$

Иными словами, высота вектор-функций $p(k,\lambda)$ равна k:

$$h(p(k,\lambda)) = k.$$

Обозначим через J_N $(N > 2)$ главный угловой минор порядка N матрицы J. Спектральные функции $\sigma_N(\lambda)$ матриц J_N обладают свойством

$$\int (p(k,\lambda))^{\mathrm{T}} d\sigma_N(\lambda) p(j,\lambda) = \delta_{kj}, \quad k,j < N. \tag{5.2}$$

Из последовательности $\sigma_N(\lambda)$ монотонных матричнозначных функций выделим подпоследовательность, сходящуюся к некоторой неубывающей матричнозначной функции $\sigma(\lambda)$ всюду, кроме, быть может, счетного множества точек. Из равенства (5.2) следует, что у матрицы-функции $\sigma(\lambda)$ (т.е. у ее элементов — функций $\sigma_{lk}(\lambda)$, $l,k = 1,2$) существуют все моменты и

$$\int (p(k,\lambda))^{\mathrm{T}} d\sigma(\lambda) p(j,\lambda) = \delta_{kj} \quad (k,j < N). \tag{5.3}$$

Определение. *Всякую матричнозначную функцию, порождающую равенство Парсеваля (5.3), будем называть спектральной функцией матрицы J.*

З а м е ч а н и е. Вообще говоря, таких функций может быть много, и условия, когда она единственна, связаны с вопросом о существенной самосопряженности.

Очевидно, $\sigma(\lambda)$ как предельная функция удовлетворяет условию нормировки

$$D^T(\int d\sigma(\lambda))D = D^T(\int d\sigma_N(\lambda))D = I.$$

Рассмотрим пространство $\mathbf{L}^2_\sigma(-\infty,\infty)$ двумерных вектор-функций, квадратично-суммируемых в смысле порожденной $\sigma(\lambda)$ матричнозначной меры, т.е. таких функций s, для которых

$$\int (s(\lambda))^{\mathrm{T}} d\sigma(\lambda) s(\lambda) < \infty.$$

Очевидно, $\mathbf{Q}_\infty \subset \mathbf{L}^2_\sigma(-\infty,\infty)$.

Скалярное произведение в $\mathbf{L}^2_\sigma(-\infty,\infty)$ задается формулой (3.2):

$$< r(\lambda), s(\lambda) >_\sigma = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (r(\lambda))^{\mathrm{T}} d\sigma(\lambda) s(\lambda), \quad r(\lambda), s(\lambda) \in \mathbf{L}^2_\sigma(-\infty,\infty).$$

Можно доказать, что пространство $\mathbf{L}^2_\sigma(-\infty,\infty)$ полно относительно этого скалярного произведения, т.е. гильбертово.

Согласно равенству (5.3), система $\{p(k,\lambda)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормирована в пространстве $\mathbf{L}^2_\sigma(-\infty,\infty)$. Поэтому отображение $U : l^2 \to \mathbf{L}^2_\sigma(-\infty,\infty)$, определенное равенством

$$U\vec{x} = \widetilde{x}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)p(k,\lambda)), \quad \vec{x} = (x(0), x(1), \ldots, x(k), \ldots)^{\mathrm{T}} \in l^2;$$

$$p(k,\lambda) \in \mathbf{L}^2_\sigma(-\infty,\infty),$$

изометрично.

Напомним, что элементами пространства $\mathbf{Q}_\infty$ являются всевозможные конечные линейные комбинации векторов $p(k,\lambda), k = 0,1,2,\ldots$. Значит, U — изометрический оператор, отображающий финитные векторы пространства l^2 на $\mathbf{Q}_\infty$ со скалярным произведением (3.2). Таким образом, это скалярное произведение невырожденно на $\mathbf{Q}_\infty$.

Из последнего, в частности, следует, что $\sigma(\lambda)$ имеет бесконечное число точек роста. Действительно, в противном случае мы представили бы $\sigma(\lambda) = \sum_{\lambda_j<\lambda} \|\alpha_j^{(l)}\alpha_j^{(k)}\|_{l,k=1}^2$ и нашли бы $r(\lambda) = \begin{pmatrix} R^{(1)}(\lambda) \\ R^{(2)}(\lambda) \end{pmatrix} \in \mathbf{Q}_\infty$, для которой $\alpha_i^{(1)} R^{(1)}(\lambda_i) + \alpha_i^{(2)} R^{(2)}(\lambda_i) = 0$ (существование такой $r(\lambda) \in \mathbf{Q}_\infty$ для заданных $\alpha_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)}, \lambda_i$ указано в доказательстве леммы 3.2), откуда $< r(\lambda), r(\lambda) >_\sigma = 0$.

Таким образом, справедлива

Теорема 5.1. *С каждой матрицей начальных данных D связана спектральная функция $\sigma_D(\lambda)$ матрицы J — неубывающая матрица второго порядка с бесконечным числом точек роста, у которой существуют все моменты, и порождающая формулы (3.15) разложения по собственным векторам.*

6. Обратная задача для невырожденных полубесконечных матриц

Теорема 6.1. *Пусть неубывающая матрица-функция $\sigma(\lambda)$ второго порядка, имеющая все моменты, порождает по формуле (3.2) невырожденное скалярное произведение в пространстве $\mathbf{Q}_\infty$. Тогда существует полубесконечная пятидиагональная матрица J, для которой $\sigma(\lambda)$ является спектральной.*

Доказательство. Скалярное произведение (3.2) удовлетворяет равенству (3.3). Осуществляя ортогонализацию елементов $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\lambda\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\\lambda\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\lambda^2\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\\lambda^2\end{pmatrix}$,…, $\begin{pmatrix}\lambda^m\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\\lambda^m\end{pmatrix}$,…, мы получим ортонормированную систему вектор-функций $\{p(k,\lambda)\}_{k=0}^{\infty}$. Так же, как это делается в конечномерном случае (теорема 2.1), обозначив

$$a_k =< \lambda p(k,\lambda), p(k,\lambda) >_\sigma,\ b_k =< \lambda p(k,\lambda), p(k+1,\lambda) >_\sigma,$$

$$c_k =< \lambda p(k,\lambda), p(k+2,\lambda) >_\sigma, \quad k = 0,1,\ldots,$$

доказываем, что $p(0,\lambda), p(1,\lambda),\ldots,p(m,\lambda),\ldots$ удовлетворяют соотношениям (5.1), где $c_k \neq 0$, т.е. порождены полубесконечной матрицей (5.0). По построению же они удовлетворяют равенству (5.3). То есть функция σ является спектральной для матрицы J. Теорема доказана.

При доказательстве теоремы, кроме невырожденности скалярного произведения (3.2), использовалось только то, что оператор умножения на λ является симметрическим в пространстве $\mathbf{Q}_\infty$ с этим скалярным произведением (т.е. выполняется равенство (3.3)). Восстановление же пятидиагональной матрицы проводилось только по скалярному произведению $< \cdot,\cdot >_\sigma$, удовлетворяющему этому свойству. Поэтому справедливо

Следствие. *Любое невырожденное скалярное произведение в пространстве $\mathbf{Q}_\infty$, удовлетворяющее условию (3.3), имеет вид (3.2), где $\sigma_J(\lambda)$ — спектральная матрица-функция некоторой полубесконечной пятидиагональной матрицы J.*

7. Возможно вырождающиеся полубесконечные матрицы

Рассмотрим полубесконечные пятидиагональные симметрические матрицы, у которых на крайней диагонали возможно появление нулей, т.е. либо

$$c_k \neq 0,\ k = 0,1,\ldots \quad \text{(невырожденные матрицы)},$$

либо

$$c_0, c_1, \ldots, c_{N_1-3} \neq 0,\ c_{N_1-2} = c_{N_1-1} = \ldots = 0,$$

$$b_{N_1-1}, b_{N_1}, \ldots \neq 0 \quad \text{(вырожденные матрицы)}.$$

Так же, как результаты пп. 1, 2 обобщались в пп. 5, 6 на полубесконечные невырожденные матрицы, результаты пп. 3, 4 обобщаются на полубесконечные матрицы описанного вида. Справедлива

Теорема 7.1. *Для того чтобы матричнозначная функция $\sigma(\lambda)$ второго порядка была спектральной функцией некоторой полубесконечной пятидиагональной матрицы описанного вида, необходимо и достаточно, чтобы она была неубывающей матрицей с бесконечным числом точек роста, имеющей все моменты, и чтобы матрица $\sigma(+\infty) - \sigma(-\infty)$ была невырожденной.*

При этом билинейная форма, порожденная спектральной функцией в пространстве $\mathbf{Q}_\infty$, вырожденна (невырожденнна) тогда и только тогда, когда соответствующая ей пятидиагональная матрица вырожденна (невырожденна).

В вырожденном случае число N_1 ($c_{N_1-3} \neq 0, c_{N_1-2} = 0$) определяется тем, что $< \cdot, \cdot >_\sigma$ невырожденна в пространстве $\mathbf{Q}_{N_1}$, но вырожденна в $\mathbf{Q}_{N_1+1}$, т.е. существует такая вектор-функция $q(\lambda) \in \mathbf{Q}_\infty$ высоты $h(q) = N_1$, что

$$< q(\lambda), q(\lambda) >_\sigma = \int (q(\lambda))^{\mathrm{T}} d\sigma(\lambda) q(\lambda) = 0,$$

и $q(\lambda)$ — это вектор-функция минимальной высоты (за исключением $q(\lambda) \equiv 0$), обладающая этим свойством.

Если $N_1 = 2$, то J — трехдиагональная полубесконечная матрица, которую можно формально рассматривать как пятидиагональную вырожденную, и верхний левый элемент матрицы-функции $D^T \sigma_D(\lambda) D$ (D — матрица начальных условий) совпадает со спектральной функцией (в смысле теории матриц Якоби) $\rho(\lambda)$ трехдиагональной матрицы J.

Приведем без доказательства критерий вырожденности билинейной формы $< \cdot, \cdot >_\sigma$, порожденной в пространстве $\mathbf{Q}_\infty$ неубывающей матрицей $\sigma(\lambda)$.

Теорема 7.2 (критерий вырожденности билинейной формы). *Для того, чтобы неубывающая матричнозначная функция $\sigma(\lambda)$ второго порядка, с бесконечным числом точек роста, имеющая все моменты, порождала по формуле (3.2) вырожденную билинейную форму в пространстве $\mathbf{Q}_\infty$, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид*

$$\sigma(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \begin{pmatrix} h_1^2 & h_1 h_2 \\ h_1 h_2 & h_2^2 \end{pmatrix} d\rho(\lambda) + \sigma_0'(\lambda),$$

где $\rho(\lambda)$ — неубывающая на $\mathbf{R}$ функция, у которой существуют все моменты, имеющая бесконечное число точек роста, функции h_1, h_2: $0 \leq h_2 \leq 1$, $h_1^2 + h_2^2 = 1$ — такие, что либо $\frac{h_1}{h_2}$, — рациональная почти всюду по мере $d\rho(\lambda)$, либо $h_2 = 0$ почти всюду по мере $d\rho(\lambda)$, $\sigma_0'(\lambda)$ — произвольная неубывающая матрица-функция, имеющая конечное число точек роста.

Из этой теоремы следует, что "вырожденная" полубесконечная пятидиагональная матрица может иметь только конечное число кратных точек спектра, число которых не превышает $N_1/2$.

Один числовой пример. Рассмотрим полубесконечную пятидиагональную вырожденную матрицу описанного в п. 7 вида (N_1 — нечетное), где $a_k = 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$,

$$c_0 = c_1 = \ldots = c_{N_1-3} = 1/2,\ c_{N_1-2} = c_{N_1-1} = \ldots = 0,$$

$$b_0 = b_1 = \ldots = b_{N_1-2} = 0,\ b_{N_1-1} = b_{N_1} = \ldots = 1/2.$$

В частном случае $N_1 = 3$ матрица выглядит так:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Пространство l^2, в котором действует оператор J, разлагается в прямую ортогональную сумму подпространств $L_1 = \mathrm{Lin}\ \{\vec{e}_0, \vec{e}_2, \vec{e}_4, \ldots,\ \vec{e}_{N_1-3}, \vec{e}_{N_1-1}; \vec{e}_{N_1}, \vec{e}_{N_1+1},\ \ldots\}$, $L_2 = \mathrm{Lin}\{\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_5, \ldots, \vec{e}_{N_1-2}\}$, где $\vec{e}_0 = (1, 0, 0, \ldots)^{\mathrm{T}}$, $\vec{e}_1 = (0, 1, 0, \ldots)^{\mathrm{T}}, \ldots$ — орты стандартного базиса l^2 (базисом L_1 являются орты с четными номерами до $N_1 - 1$ включительно и все последующие, а базисом L_2 — орты с нечетными номерами до $N_1 - 2$ включительно).

Пространства L_1 и L_2 являются инвариантными для J. В самом деле, для этого достаточно показать, что для всех векторов $\vec{e}_i$ из базисного набора L_1 и $\vec{e}_j$ из базисного набора L_2

$$(J\vec{e}_j, \vec{e}_i) = (\vec{e}_j, J\vec{e}_i) = 0.$$

Действительно, пусть $i = 0, 2, 4, \ldots, N_1-1, N_1, N_1+1, \ldots$, а $j = 1, 3, 5, \ldots, N_1-2$ (условимся и в дальнейшем обозначать через i и j соответственно индексы из этих наборов).

Если $|i-j| > 2$, то элемент $(J\vec{e}_j, \vec{e}_i)$ матрицы J расположен не ближе чем на четвертой по счету от главной диагонали и равен нулю для пятидиагональной матрицы J. Если $|i - j| = 2$, то ситуация, когда $\vec{e}_i \in L_1, \vec{e}_j \in L_2$, возможна лишь при $i = N_1, j = N_1 - 2$. Но тогда

$$(J\vec{e}_{N_1-2}, \vec{e}_{N_1}) = c_{N_1-2} = 0.$$

Наконец, если $|i-j|=1$, то

$$(J\vec{e}_j, \vec{e}_{j-1}) = b_{j-1} = 0, \quad (J\vec{e}_j, \vec{e}_{j+1}) = b_j = 0.$$

Итак, подпространства L_1 и L_2 инвариантны для J. На бесконечномерном L_1 в выделенном нами базисе J записывается как полубесконечная якобиева матрица

$$J(L_1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

(в самом деле, $(J\vec{e}_i, \vec{e}_{i+2}) = c_i = 1/2,\ i = 0, 2, \dots, N_1 - 3; \quad (J\vec{e}_i, \vec{e}_{i+1}) = b_i = 1/2,\ i = N_1 - 1, N - 1, \dots$, а остальные элементы матрицы, как легко проверить, равны нулю).

На $\frac{N_1-1}{2}$-мерном подпространстве L_2 в выбранном нами базисе J действует как главный угловой минор порядка $\frac{N_1-1}{2}$ матрицы $J(L_1)$ (обозначим этот минор через $J(L_2)$).

Можно увидеть, что при единичной матрице начальных условий $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ последовательности полиномов $P^{(2)}(1,\lambda), P^{(2)}(3,\lambda), \dots, P^{(2)}(j,\lambda), \dots, P^{(2)}(N_1-2,\lambda)$, а также $P^{(1)}(0,\lambda)$, $P^{(1)}(2,\lambda), \dots, P^{(1)}(i,\lambda), \dots$ — это полиномы Чебышева второго рода, порожденные якобиевой матрицей $J(L_1)$. Вектор-функция $q_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ Q^{(2)}(\lambda) \end{pmatrix}$, где полином $Q^{(2)}(\lambda)$ совпадает, с точностью до постоянного множителя, с характеристическим полиномом матрицы $J(L_2)$.

Таким образом, в приведенном примере спектральный анализ матрицы J свелся к спектральному анализу двух якобиевых матриц: конечной $J(L_2)$ и бесконечной $J(L_1)$. Спектральная функция, соответствующая единичной матрице начальных условий D, представляется в виде

$$\sigma(\lambda) = \begin{pmatrix} \rho_\infty(\lambda) & 0 \\ 0 & \rho_{\frac{N_1-1}{2}}(\lambda) \end{pmatrix},$$

где

$$d\rho_\infty(\lambda) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-\lambda^2}\,d\lambda, & |\lambda| \le 1 \\ 0, & |\lambda| > 1 \end{cases}$$

— спектральная функция якобиевой матрицы $J(L_1)$, а $\rho_{\frac{N_1-1}{2}}(\lambda)$ — спектральная функция ее минора порядка $\frac{N_1-1}{2}$ (в частном случае $N_1 = 3$ это — спектральная функция матрицы первого порядка (0), равная нулю при $\lambda \le 0$ и единице при $\lambda > 0$).

Заметим, что $\frac{N_1-1}{2}$ точек роста функции $\rho_{\frac{N_1-1}{2}}(\lambda)$ являются собственными значениями оператора $J|_{L_2}$ и точками непрерывного спектра оператора $J|_{L_1}$. Как видим, вырожденная матрица J имеет конечное число $\frac{N_1-1}{2}$ точек кратного спектра.

Спектр оператора заполняет сегмент $[-1,1]$, а его норма равна единице.

Спектральную матрицу можно разложить так, как это сделано в теореме 7.2: $h_1 \equiv 1$, $h_2 \equiv 0$, $\rho(\lambda) = \rho_\infty(\lambda)$, $d\sigma_0(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d\rho_{\frac{N_1-1}{2}}(\lambda)$. Как видим, h_2/h_1 — рациональная функция, а двукратные точки спектра матрицы J совпадают с $\frac{N_1-1}{2}$ точками роста функции $\rho_{\frac{N_1-1}{2}}(\lambda)$.

Выводы

Всякой возможно вырождающейся конечной либо полубесконечной пятидиагональной матрице J отвечает спектральная матричнозначная функция $\sigma(\lambda)$ — неубывающая матрица 2×2, имеющая все моменты, причем $\sigma(+\infty) - \sigma(-\infty)$ невырожденна. Если матрица J — конечного порядка N, то $\sigma(\lambda)$ — кусочно-постоянная и сумма рангов ее скачков равна N; если J — полубесконечная, то $\sigma(\lambda)$ имеет бесконечное число точек роста.

Обратно, всякая неубывающая 2×2-матрица $\sigma(\lambda)$, имеющая все моменты, у которой $\sigma(+\infty) - \sigma(-\infty)$ — невырожденна, является спектральной для некоторой пятидиагональной конечной или полубесконечной возможно вырождающейся матрицы J. Если $\sigma(\lambda)$ — кусочно-постоянная и сумма рангов ее скачков равна N, то матрица J — порядка N; если $\sigma(\lambda)$ имеет бесконечное число точек роста, то матрица J — полубесконечна.

Спектральные функции *невырожденных* матриц J порядка N (N — нечетное) выделяются *дополнительным условием*

$$\sigma(\lambda) = \sum_{\mu_j < \lambda} k_j \|\widetilde{Q}^{(l)}(\mu_j)\widetilde{Q}^{(k)}(\mu_j)\|^2_{l,k=1} + \sum_{\nu_i < \lambda} C_i, \qquad (2.1)$$

где $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_N$ — произвольная последовательность точек вещественной оси, среди которых $2m+1$ однократных точек $\mu_1, \ldots, \mu_{2m+1}$ и p — двукратных $\nu_1, \ldots, \nu_p$ ($N = 2m+1+2p$), $\widetilde{Q}^{(1)}(\lambda), \widetilde{Q}^{(2)}(\lambda)$ — произвольные действительные полиномы со степенями $\deg\widetilde{Q}^{(1)}(\lambda) \leq m$, $\deg\widetilde{Q}^{(2)}(\lambda) = m+1$, не имеющие общих корней, k_j — произвольные положительные числа, а C_i — произвольные строго положительные матрицы второго порядка.

(В случае четного $N = 2n = 2m + 2p$ меняются только число точек μ_j (на $2m$) и степени полиномов: $\deg\widetilde{Q}^{(1)}(\lambda) = m$, $\deg\widetilde{Q}^{(2)}(\lambda) \leq m$.)

Список литературы

[1] *Н.И. Ахиезер*, Классическая проблема моментов. Физматгиз, Москва (1961).

[2] *Ю.М. Березанский*, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Наукова думка, Киев (1965).

[3] *Ф. Аткинсон*, Дискретные и непрерывные граничные задачи. Мир, Москва (1968).

[4] *Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман*, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Наука, Москва (1966).

The direct and inverse problem of spectral analysis for five-diagonal simmetric matrices. II

M.A. Kudryavtsev

This paper is the continuation of the previous paper of the same title, I. "Degenerated" five-diagonal simmetric matrices are considered. The solution of the direct and inverse problem of spectral analysis for such matrices is given. The results obtained are extended for semi-infinite five-diagonal matrices.

Пряма та обернена задачі спектрального аналізу для п'ятидіагональних симетричних матриць. II

М.О. Кудрявцев

Ця робота є продовженням роботи з тією ж назвою, I. Розглядаються "вироджені" п'ятидіагональні симетричні матриці. Для них розв'язано пряму та обернену задачі спектрального аналізу. Одержані результати узагальнено на півнескінченні п'ятидіагональні матриці.