Математическая физика, анализ, геометрия
1999, т. 6, № 1/2, с. 100–123

Асимптотическое поведение функции Грина первой краевой задачи

В.А. Рыбалко

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47

E-mail: vrybalko@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 17 ноября 1997 года

Рассматривается первая краевая задача для уравнения Гельмгольца в области, внешней по отношению к периодической системе тел. Изучается асимптотическое поведение функции Грина этой задачи, когда период структуры и длина волны становятся малыми. Показано, что система тел может быть заменена эффективным потенциалом.

Введение

В работе рассматривается первая краевая задача для уравнения Гельмгольца в области, внешней по отношению к периодической системе тел. Изучается асимптотическое поведение функции Грина этой задачи, когда период структуры и длина волны становятся малыми. Качественно основной результат состоит в доказательстве того, что система тел ("препятствий") может быть заменена эффективным потенциалом (теорема 1.1).

Рассматриваемая задача по постановке родственна краевым задачам в областях с мелкозернистой границей, изученным впервые в монографии [1]. Однако в [1], как и в других работах по задачам усреднения (см., например, [2, 3]), исследуется асимптотическое поведение решений при фиксированной частоте и уменьшающемся пространственном периоде структуры, что соответствует длинноволновому приближению. Если же частота стремится к ∞, то задача становится значительно труднее. В настоящей работе сделано предположение, что длина волны имеет тот же порядок, что и период структуры, в то время как размеры "препятствий" значительно меньше. Благодаря этому главный член асимптотики функции Грина описывается уравнением Гельмгольца в пространстве без "препятствий", а их вклад учитывается введением добавки ("плотности" ёмкости) к спектральному параметру.

Работа построена следующим образом. Точная постановка задачи и формулировка главного результата даны в первом параграфе. Во втором параграфе рассмотрена система собственных функций ячеечной задачи специального вида, с помощью которых получено блоховское представление функций из L_2. Это представление фактически дает спектральное разложение замыкания оператора $\Delta + k^2$ с первым краевым условием. Главным результатом этого параграфа является блоховское представление функции Грина. Далее (§§ 3, 4) исследуются асимптотическое поведение первого собственного значения и первой собственной функции ячеечной задачи. Обоснование асимптотик (теорема 4.1) является наиболее трудоемким в данной работе. Наконец, в последнем параграфе приведено доказательство основной теоремы (1.1), которое базируется на результатах §§ 2, 4.

§ 1. Постановка задачи и формулировка основного результата

Пусть $F \subset \mathbf{R}^3$ — ограниченная односвязная область с гладкой границей, содержащая начало координат ; F_l — ее сжатие с коэффициентом l^{-1} $(x \in F_l \iff l^{-1}x \in F)$. Обозначим D_ε область следующего вида:

$$D_\varepsilon = \mathbf{R}^3 \setminus \bigcup_{m \in \mathbf{Z}^3} \overline{F_{l(\varepsilon)} + 2\pi m\varepsilon},$$

где $F_{l(\varepsilon)} + 2\pi m\varepsilon = \{x : x - 2\pi m\varepsilon \in F_{l(\varepsilon)}\}$. Будем предполагать, что $l(\varepsilon) << \varepsilon$, так что множества $\overline{F_{l(\varepsilon)} + 2\pi m\varepsilon}$ и $\overline{F_{l(\varepsilon)} + 2\pi m'\varepsilon}$ не пересекаются при $m \neq m'$ $(m, m' \in \mathbf{Z}^3)$.

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta G_\varepsilon(x,y) + æ^2(\varepsilon) G_\varepsilon(x,y) = \delta(x-y), \qquad x, y \in D_\varepsilon; \\ G_\varepsilon(x,y)\,|_{x \in \partial D_\varepsilon} = 0, \;\; y \in D_\varepsilon; \\ G_\varepsilon(x,y) \to 0, x \to \infty, y \in D_\varepsilon, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $æ(\varepsilon) = \alpha/\varepsilon + i\beta$ $(\alpha > 0\ ,\ \beta > 0)$. Как известно, при любом $\varepsilon > 0$ задача (1.1) имеет единственное решение. Целью настоящей работы является исследование асимптотического поведения функций Грина G_ε при $\varepsilon \to 0$.

Доопределим $G_\varepsilon(x,y)$ на множестве $\mathbf{R}^3 \setminus D_\varepsilon$, положив $G_\varepsilon(x,y) = 0$, при $x \in \mathbf{R}^3 \setminus D_\varepsilon$ или $y \in \mathbf{R}^3 \setminus D_\varepsilon$. Основной результат работы состоит в следующем.

Теорема 1.1. *Пусть $\alpha < 1/2$ и $l(\varepsilon) = o(\varepsilon^{3/2})$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда для произвольной ограниченной области Q_x норма разности функции $G_\varepsilon(x,y)$ и фундаментального решения уравнения*

$$\begin{cases} \Delta \Phi_\varepsilon(x,y) + [æ^2(\varepsilon) - q(\varepsilon)]\Phi_\varepsilon(x,y) = \delta(x-y), \;\; x, y \in \mathbf{R}^3; \\ \Phi_\varepsilon(x,y) \to 0, x \to \infty \end{cases} \tag{1.2}$$

($\Phi_\varepsilon(x,y) = -\frac{1}{4\pi|x-y|} e^{i\sqrt{æ^2(\varepsilon)-q(\varepsilon)}|x-y|}$) *в пространстве* $L_2(Q_x \times \mathbf{R}^3)$ *стремится к* 0 *при* $\varepsilon \to 0$:

$$\|\Phi_\varepsilon - G_\varepsilon\|^2_{L_2(Q_x\times\mathbf{R}^3)} = \int\limits_{Q_x} dx \int\limits_{\mathbf{R}^3} dy\ |G_\varepsilon(x,y) - \Phi_\varepsilon(x,y)|^2\ \to 0,\ \varepsilon \to 0.$$

Более того, для достаточно малых ε *верна оценка*

$$\|\Phi_\varepsilon - G_\varepsilon\|^2{}_{L_2(Q_x\times\mathbf{R}^3)} \le C\ \nu(\varepsilon),$$

где $\nu(\varepsilon) = max\{\varepsilon, l^4(\varepsilon)/\varepsilon^6, l^2(\varepsilon)/\varepsilon^2\}$.

В (1.2) $q(\varepsilon) = c(F_{l(\varepsilon)})/Vol(2\pi\varepsilon Y)$ — *отношение ёмкости множества* $F_{l(\varepsilon)}$ *к объёму ячейки* $2\pi\varepsilon Y$ (*здесь и далее* $Y = (-1/2, 1/2)^3$ — *единичный куб,* $2\pi\varepsilon Y = (-\pi\varepsilon, \pi\varepsilon)^3$).

§ 2. Блоховское разложение функции Грина

Введем в рассмотрение область

$$\Omega_h = (-\pi,\pi)^3 \setminus \overline{F_h}.$$

Будем говорить, что функция u принадлежит классу $\tilde{C}_0^\infty(\Omega_h)$, если $u \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$, 2π-периодична по каждой переменной x_j ($j = \overline{1,3}$) и равна 0 в окрестности множества F_h . Параметр h считаем достаточно малым, чтобы $\overline{F}_h \subset (-\pi,\pi)^3$. Будем также допускать обращение h в 0, при этом договоримся, что $\Omega_0 = (-\pi,\pi)^3$, а $\tilde{C}_0^\infty(\Omega_0)$ — класс гладких($\in C^\infty(\mathbf{R}^3)$), 2π-периодичных по каждой переменной x_j ($j = \overline{1,3}$) функций .

Пусть A(k) — дифференциальный оператор вида

$$A(k) = -\sum_{p=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x_p} + ik_p\right)^2 \cdot = -e^{-ikx}\Delta\left(e^{ikx}\ \cdot\right),\ k \in Y,$$

с областью определения $D(A(k)) = \tilde{C}_0^\infty(\Omega_h)$. Введем в рассмотрение пространство

$$H^1(\Omega_h) = \overline{\tilde{C}_0^\infty(\Omega_h)},$$

где замыкание берётся по первой соболевской норме

$$\|u\|_1^2 = \int\limits_{\Omega_h} \{|\nabla u(x)|^2 + |u(x)|^2\}dx.$$

Другими словами, пространство $H^1(\Omega_h)$ состоит из функций, которые, будучи продолженными нулем в F_h, а затем 2π периодически по каждой переменной x_j $(j=\overline{1,3})$ во все пространство $\mathbf{R}^3$, принадлежат $L_2(Q)$ и имеют обобщенные производные первого порядка, также принадлежащие $L_2(Q)$, для любой ограниченной области Q. В дальнейшем, не оговаривая этого дополнительно, будем считать указанное продолжение сделанным.

Оператор $A(k)$ порождает в пространстве $H^1(\Omega_h)$ билинейную форму

$$(u,v)_{A(k),h} = \int\limits_{\Omega_h} \sum_{p=1}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial x_p} + ik_p\right) u(x) \overline{\left(\frac{\partial}{\partial x_p} + ik_p\right) v(x)} dx, \;\; u,v \in H^1(\Omega_h), \tag{2.1}$$

которая обладает свойствами:

1. $(u,v)_{A(k),h} = \int\limits_{\Omega_h} A(k)u(x)\overline{v(x)}dx = \int\limits_{\Omega_h} u(x)\overline{A(k)v(x)}dx$ $, u,v \in \tilde{C}_0^\infty(\Omega_h)$;
2. $(u,v)_{A(k),h} = \overline{(v,u)_{A(k),h}}$;
3. $|(u,v)_{A(k),h}| \leq a_1\|u\|_1\|v\|_1$;
4. $(u,u)_{A(k),h} \geq 0$;
5. $(u,u)_{A(k),h} \geq a_2\|u\|_1^2 - a_3\|u\|^2$,

где $\|\cdot\|$ — $L_2(\Omega_h)$ норма; a_1, a_2, a_3 — положительные константы, не зависящие от k $(k \in Y)$ и h. Отсюда следует, что существует расширение $A(k)$ до самосопряженного оператора, резольвента которого $(A(k)+\lambda)^{-1}$ компактна ($\lambda > 0$), а, значит, $A(k)$ имеет счетное множество собственных значений

$$0 \leq \lambda_1^2(k,h) \leq \lambda_2^2(k,h) \leq ...$$

и соответствующих им попарно ортогнальных собственных функций $\{\phi_j(x;k,h)\}_{j=1}^\infty$, которые считаем нормализованными, т.е. $\|\phi_j\| = 1$ $(j = \overline{1,\infty})$. При этом система собственных функций полна в $L_2(\Omega_h)$ и $H^1(\Omega_h)$. Несложно показать, что собственные значения являются непрерывными функциями от k, и не убывают по h:

$$\lambda_j^2(k,h_1) \geq \lambda_j^2(k,h_2) \;,\; h_1 \geq h_2 \geq 0 \;,\; j = \overline{1,\infty}. \tag{2.2}$$

При $h=0$ собственные значения и собственные функции оператора $A(k)$ вычисляются явно:

$$|m+k|^2, \;\; m \in \mathbf{Z}^3; \tag{2.3}$$

$$e^{im(x-y)}, \;\; m \in \mathbf{Z}^3. \tag{2.4}$$

Отметим (это необходимо для формулируемой ниже теоремы), что собственные функции могут быть выбраны так, чтобы они были измеримы как функции аргумента k [3].

Обозначим

$$\tilde{D}_{\varepsilon,l} = \mathbf{R}^3 \setminus \bigcup_{m\in\mathbf{Z}^3} \overline{F_l + 2\pi m\varepsilon}.$$

Теорема 2.1. *Пусть функция $f(x)$ принадлежит $L_2(\tilde{D}_{\varepsilon,l})$. Тогда для $f(x)$ имеет место представление*

$$f(x) = \frac{1}{\varepsilon^3}\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\int_Y dk\hat{f}_j(k;\varepsilon,l)e^{ikx/\varepsilon}\phi_j(x/\varepsilon;k,l/\varepsilon), \tag{2.5}$$

где

$$\hat{f}_j(k;\varepsilon,l) = \lim_{R\to\infty}\int\limits_{\{x:x<R\}\bigcap\tilde{D}_{\varepsilon,l}} dxf(x)\overline{e^{ikx/\varepsilon}\phi_j(x/\varepsilon;k,l/\varepsilon)}, \tag{2.6}$$

и верно равенство Парсеваля

$$\int\limits_{\tilde{D}_{\varepsilon,l}} dx|f(x)|^2 = \frac{1}{\varepsilon^3}\sum_{j=1}^{\infty}\int_Y dk|\hat{f}_j(k;\varepsilon,l)|^2. \tag{2.7}$$

Пределы в (2.5) и (2.6) понимаются в смысле сходимости в среднем.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, теорему достаточно доказать в частном случае, когда $\varepsilon = 1$ (общий случай сводится к этому частному с помощью замен $y(\in \tilde{D}_{1,h}) = x/\varepsilon(\in \tilde{D}_{\varepsilon,l})$ и $h = l/\varepsilon$). Докажем сначала утверждение теоремы для функций из класса $C_0^\infty(\tilde{D}_{1,h})$ — класса бесконечно дифференцируемых функций с компактно вложенными в $\tilde{D}_{1,h}$ носителями.

Пусть $g \in C_0^\infty(\tilde{D}_{1,h})$. Введем в рассмотрение функцию

$$\tilde{g}(x,k) = \sum_{m\in\mathbf{Z}^3} e^{-ik(x+2\pi m)}g(x+2\pi m),$$

которая, как легко видеть, принадлежит классу $\tilde{C}_0^\infty(\Omega_h)$ для любого $k \in Y$. Поскольку система функций $\{e^{i2\pi mk}\}_{m\in\mathbf{Z}^3}$ ортонормирована в $L_2(Y)$, то $g(x)$ восстанавливается через $\tilde{g}(x,k)$ по формуле

$$g(x) = \int_Y dke^{ikx}\tilde{g}(x,k).$$

Разложим функцию $\tilde{g}(x,k)$ в ряд Фурье по $\{\phi_j(x;k,h)\}_{j=1}^\infty$:

$$\tilde{g}(x,k) = \sum_1^\infty \hat{g}_j(k,h)\phi_j(x;k,h), \tag{2.8}$$

где

$$\hat{g}_j(k,h) = \int\limits_{\Omega_h} \tilde{g}(x,k)\overline{\phi_j(x;k,h)}dx = \int\limits_{\tilde{D}_{1,h}} g(x)\overline{e^{ikx}\phi_j(x;k,h)}dx.$$

В силу гладкости $\tilde{g}(x,k)$ ряд (2.8) сходится в $L_2(\Omega_h)$ равномерно по $k \in Y$. Пусть $\tilde{g}_N(x,k)$ — частичная сумма ряда (2.8):

$$\tilde{g}_N(x,k) = \sum_{j=1}^{N} \hat{g}_j(k,h)\phi_j(x;k,h).$$

Поскольку

$$\int\limits_{\tilde{D}_{1,h}} dx \left| g(x) - \int\limits_{Y} dk e^{ikx}\tilde{g}_N(x,k) \right|^2$$

$$= \sum_{m\in\mathbf{Z}^3} \int\limits_{\Omega_h+2\pi m} dx \left| \int\limits_{Y} dk e^{ikx}(\tilde{g}(x,k) - g_N(x,k)) \right|^2$$

$$= \int\limits_{\Omega_h} dx \sum_{m\in\mathbf{Z}^3} \left| \int\limits_{Y} dk\ e^{i2\pi mk} e^{ikx}(\tilde{g}(x,k) - \tilde{g}_N(x,k)) \right|^2$$

$$= \int\limits_{\Omega_h} dx \int\limits_{Y} dk \left| \tilde{g}(x,k) - \tilde{g}_N(x,k)) \right|^2,$$

то, действительно,

$$\int\limits_{Y} dke^{ikx}\tilde{g}_N(x,k) \to g(x),\ N \to \infty.$$

Для доказательства равенства Парсеваля (2.7) заметим, что

$$\int\limits_{Y} dk|\tilde{g}(x,k)|^2 = \sum_{m\in\mathbf{Z}^3} |g(x+2\pi m)|^2,$$

следовательно,

$$\int\limits_{\Omega_h} dx \int\limits_{Y} dk|\tilde{g}(x,k)|^2 = \int\limits_{\tilde{D}_{1,h}} dx|g(x)|^2.$$

Но

$$\int\limits_{\Omega_h} dx|\tilde{g}(x,k)|^2 = \sum_{1}^{\infty} |\hat{g}_j(k,h)|^2,$$

что и дает искомое равенство.

Ввиду того, что функции из класса $C_0^\infty(\tilde{D}_{1,h})$ плотны в $L_2(\tilde{D}_{1,h})$, утверждение теоремы верно для произвольной функции из $L_2(\tilde{D}_{1,h})$.

Следствие 1. *Пусть* $\tilde{f}(x,k) \in L_2(\Omega_0 \times Y)$ *и* 2π*-периодична по каждой переменной* x_j $(j = \overline{1,3})$, *тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *функция*

$$f(x) = \frac{1}{\varepsilon^3} \int\limits_Y dk e^{ikx/\varepsilon} \tilde{f}(x/\varepsilon, k)$$

принадлежит $L_2(\mathbf{R}^3)$ *и*

$$\int\limits_{\mathbf{R}^3} dx |f(x)|^2 = \frac{1}{\varepsilon^3} \int\limits_{\Omega_0} dx \int\limits_Y dk |\tilde{f}(x,k)|^2.$$

Следствие 2. *В пространстве* $S'(\tilde{D}_{\varepsilon,l})$ *для* δ*-функции верно разложение*

$$\delta(x-y) = \frac{1}{\varepsilon^3} \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_Y dk e^{ikx/\varepsilon} \phi_j(x/\varepsilon; k, l/\varepsilon) \overline{e^{iky/\varepsilon} \phi_j(y/\varepsilon; k, l/\varepsilon)}. \tag{2.9}$$

Действительно, для функции $f(x) \in C_0^\infty(\tilde{D}_{\varepsilon,l})$ имеем

$$f(x) = \frac{1}{\varepsilon^3} \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_Y dk \hat{f}_j(k) e^{ikx/\varepsilon} \phi_j(x/\varepsilon; k, l/\varepsilon)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^3} \lim_{N\to\infty} \int\limits_{\tilde{D}_{\varepsilon,l}} dy \left\{ \sum_{j=1}^{N} \int\limits_Y dk e^{ikx/\varepsilon} \phi_j(x/\varepsilon; k, l/\varepsilon) \overline{e^{iky/\varepsilon} \phi_j(y/\varepsilon; k, l/\varepsilon)} \right\} f(y),$$

откуда и следует (2.9).

Найдем теперь представление для искомой функции Грина. Положим $h(\varepsilon) = l(\varepsilon)/\varepsilon$, тогда $\tilde{D}_{\varepsilon,h(\varepsilon)} = D_\varepsilon$. Функцию $G_\varepsilon(x,y)$ ищем в виде

$$G_\varepsilon(x,y) = \frac{1}{\varepsilon^3} \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_Y dk \tilde{G}_j(y; k, \varepsilon) e^{ikx/\varepsilon} \phi_j(x/\varepsilon; k, h(\varepsilon)), \tag{2.10}$$

где коэффициенты $\tilde{G}_j(y; k, \varepsilon)$ подлежат определению. Подставим $\delta(x-y)$ и $G_\varepsilon(x,y)$ в виде представлений (2.9) и (2.10), соответственно, в уравнение (1.1). Имеем

$$\frac{1}{\varepsilon^3} \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_Y dk (\text{æ}^2(\varepsilon) - (\lambda_j(k,h)/\varepsilon)^2) \tilde{G}_j(y; k, \varepsilon) e^{ikx/\varepsilon} \phi_j(x/\varepsilon; k, h(\varepsilon))$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^3} \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_Y dk e^{ikx/\varepsilon} \phi_j(x/\varepsilon; k, h(\varepsilon)) \overline{e^{iky/\varepsilon} \phi_j(y/\varepsilon; k, h(\varepsilon))}.$$

Приравнивая коэффициенты при $e^{ikx/\varepsilon}\phi_j(x/\varepsilon;k,h(\varepsilon))$ в левой и правой частях последнего равенства, получаем, что $\tilde{G}_j(y;k,\varepsilon)=\varepsilon^2\overline{e^{iky/\varepsilon}\phi_j(y/\varepsilon;k,h(\varepsilon))}/(\varepsilon^2æ^2(\varepsilon)-\lambda_j^2(k,h(\varepsilon)))$. Таким образом,

$$G_\varepsilon(x,y)=\frac{1}{\varepsilon^3}\sum_{j=1}^{\infty}\int_Y\frac{e^{ik(x-y)/\varepsilon}\varepsilon^2dk}{\varepsilon^2æ^2(\varepsilon)-\lambda_j^2(k,h(\varepsilon))}\phi_j(x/\varepsilon;k,h(\varepsilon))\overline{\phi_j(y/\varepsilon;k,h(\varepsilon))}. \quad (2.11)$$

§ 3. Функция Грина ячеечной задачи

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} A(k)\hat{G}(x,y;k,\lambda)-\lambda^2\hat{G}(x,y;k,\lambda)=\delta_{\Omega_0}(x-y), \ x,y\in\Omega_0; \\ \hat{G}(x+2\pi m,y;k,\lambda)=G(x,y;k,\lambda), \ m\in\mathbf{Z}^3, \end{cases} \quad (3.1)$$

где $\lambda\neq|m+k|$ $(m\in\mathbf{Z}^3)$, $k\in Y$, $\delta_{\Omega_0}(x)$ — дельта-функция из пространства обобщенных функций над $\tilde{C}_0^\infty(\Omega_0)$. Несложно показать, что рассматриваемая задача имеет единственное решение. Более того, решение этой задачи выписывается явно:

$$\hat{G}(x,y;k,\lambda)=\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{m\in\mathbf{Z}^3}\frac{1}{|m+k|^2-\lambda^2}e^{im(x-y)}. \quad (3.2)$$

Целью настоящего параграфа является улучшение сходимости последнего ряда.

Заметим, что в случае, когда параметр λ чисто мнимый ($\lambda=i\theta$, $\theta>0$), для $\hat{G}(x,y;k,i\theta)$ вместе с (3.2) справедливо представление в виде быстро сходящегося ряда

$$\hat{G}(x,y;k,i\theta)=\frac{1}{4\pi}\sum_{m\in\mathbf{Z}^3}\frac{1}{|x-y+2\pi m|}e^{-ik(x-y+2\pi m)-\theta|x-y+2\pi m|}. \quad (3.3)$$

Действительно,

$$[A(k)-\theta^2]\left(\frac{1}{4\pi|x-y+2\pi m|}e^{-ik(x-y+2\pi m)-\theta|x-y+2\pi m|}\right)$$
$$=e^{-ik(x-y+2\pi m)}[\Delta-\theta^2]\left(\frac{1}{4\pi|x-y+2\pi m|}e^{-\theta|x-y+2\pi m|}\right)=\delta(x-y+2\pi m).$$

Отсюда получаем

$$[A(k)-\theta^2]\frac{1}{4\pi}\sum_{m\in\mathbf{Z}^3}\frac{1}{|x-y+2\pi m|}e^{-ik(x-y+2\pi m)-\theta|x-y+2\pi m|}=\delta_{\Omega_0}(x-y).$$

Легко видеть, что условия периодичности также выполняются, значит, в силу единственности решения задачи (3.1), представление (3.3) доказано.

Для вещественных λ такое построение не проходит. В этом случае вычтем из $\hat{G}(x,y;k,\lambda)$ линейную комбинацию двух функций $\hat{G}(x,y;k,i)$ и $\hat{G}(x,y;k,i\sqrt{2})$:

$$\hat{G}(x,y;k,\lambda)-\alpha_1\hat{G}(x,y;k,i)-\alpha_2\hat{G}(x,y;k,i\sqrt{2})$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{m\in\mathbf{Z}^3}\left\{\frac{1}{|m+k|^2-\lambda^2}-\frac{\alpha_1}{|m+k|^2+1}-\frac{\alpha_2}{|m+k|^2+2}\right\}e^{im(x-y)}$$

и подберем коэффициенты α_1 и α_2 так, чтобы последний ряд, а также ряды, полученные в результате формального вычисления первых и вторых частных производных этого ряда, абсолютно сходились. При $\alpha_1=2+\lambda^2$ и $\alpha_2=-1-\lambda^2$ коэффициенты указанных рядов на бесконечности ведут себя как $O(1/|m|^4)$, что и обеспечивает абсолютную сходимость.

Таким образом,

$$\hat{G}(x,y;k,\lambda)$$
$$=\frac{1}{4\pi}\sum_{m\in\mathbf{Z}^3}\frac{e^{-ik(x-y+2\pi m)}}{|x-y+2\pi m|}\left((2+\lambda^2)e^{-|x-y+2\pi m|}-(1+\lambda^2)e^{-\sqrt{2}|x-y+2\pi m|}\right)$$
$$+\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{m\in\mathbf{Z}^3}\frac{2+\lambda^4-3\lambda^2}{(|m+k|^2-\lambda^2)(|m+k|^2+1)(|m+k|^2+2)}e^{im(x-y)}. \tag{3.4}$$

§ 4. Асимптотика первого собственного значения и первой собственной функции ячеечной задачи при $h\to 0$

Найдём первые члены разложения по степеням h наименьшего собственного значения $\lambda_1^2(k,h)$ и соответствующей ему собственной функции $\phi_1(x;k,h)$ задачи

$$\begin{cases} A(k)\phi_1(x;k,h)=\lambda_1^2(k,h)\phi_1(x;k,h)\ ,x\in\Omega_h;\\ \phi_1\in H^1(\Omega_h)\end{cases} \tag{4.1}$$

при $h\to 0$. С этой целью введем в рассмотрение потенциал

$$I_{\omega_h}^{\hat{G}}(x;k,\tilde{\lambda}_1(k,h))=\int_{\partial F_h}\hat{G}(x,y;k,\tilde{\lambda}_1(k,h))d\omega_h(y),$$

где ω_h — равновесная мера множества F_h, т. е. мера, для которой

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\partial F_h}\frac{d\omega_h(y)}{|x-y|}=1, x\in\partial F_h.$$

При этом, как известно, емкость $c(F_h)$ тела F_h вычисляется по формуле

$$c(F_h) = \int\limits_{\partial F_h} d\omega_h(y).$$

Обозначим

$$\tilde{\lambda}_1^2(k,h) = |k|^2 + c(F_h)/(2\pi)^3;$$

$$\gamma(t,\lambda) = (2+\lambda^2)(e^{-t}-1)/t - (1+\lambda^2)(e^{-\sqrt{2}t}-1)/t;$$

$$\psi(x,y;k,\lambda) = \frac{1}{2\pi^2}\left\{\frac{1+\lambda^2}{|k|^2+2} - \frac{2+\lambda^2}{|k|^2+1}\right.$$

$$\left. + \sum_{m\in\mathbf{Z}^3, m\neq 0} \frac{2+\lambda^4-3\lambda^2}{(|m+k|^2-\lambda^2)(|m+k|^2+1)(|m+k|^2+2)} e^{im(x-y)}\right\}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\sum_{m\in\mathbf{Z}^3, m\neq 0} \frac{e^{-ik(x-y+2\pi m)}}{|x-y+2\pi m|}\left((2+\lambda^2)e^{-|x-y+2\pi m|} - (1+\lambda^2)e^{-\sqrt{2}|x-y+2\pi m|}\right). \tag{4.2}$$

Согласно (3.4) имеем

$$\hat{G}(x,y;k,\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{|k|^2-\lambda^2} + \frac{1}{4\pi|x-y|}$$

$$+\frac{e^{-ik(x-y)}-1}{4\pi|x-y|} + \frac{e^{-ik(x-y)}}{4\pi}\gamma(|x-y|,\lambda) + \frac{1}{4\pi}\psi(x,y;k,\lambda),$$

и, соответственно,

$$I_{\omega_h}^{\hat{G}}(x;k,\lambda) = \frac{c(F_h)}{(2\pi)^3}\frac{1}{|k|^2-\lambda^2} + I_{\omega_h}(x) + R_{\omega_h}(x;k,\lambda),$$

где

$$R_{\omega_h}(x;k,\lambda)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial F_h}\left\{\frac{e^{-ik(x-y)}-1}{|x-y|} + e^{-ik(x-y)}\gamma(|x-y|,\lambda) + \psi(x,y;k,\lambda)\right\} d\omega_h(y),$$

$$I_{\omega_h}(x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial F_h}\frac{d\omega_h(y)}{|x-y|}.$$

Теорема 4.1. *При $h\to 0$ верны равномерные по $k \in K_\alpha = \{k : |k| \le 1/4+\alpha/2\}$ оценки $|\tilde{\lambda}_1^2(k,h) - \lambda_1^2(k,h)| = O(h^2)$, $\|\xi(k,h)/(2\pi)^{3/2} - \phi_1(\cdot;k,h)\|^2 = O(h^2)$, где $|\xi(k,h)| = 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем в рассмотрение функцию

$$\varphi(x;k,h) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} I^{\hat{G}}_{\omega_h}(x;k,\tilde{\lambda}_1(k,h)) + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\chi_h(x) R_{\omega_h}(x;k,\tilde{\lambda}_1(k,h))$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}[1 - I_{\omega_h}(x)] + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}(\chi_h(x) - 1)R_{\omega_h}(x;k,\tilde{\lambda}_1(k,h)),$$

где $\chi_h(x)$ — периодическая срезающая функция, которая строится следующим образом. Пусть $\tilde{\chi}(x)$ — гладкая ($\in C^\infty(\mathbf{R}^3)$) функция, равная 1 на F_2, и такая, что $supp(\tilde{\chi}) \subset F_3$; с ее помощью χ_h определяем по формуле

$$\chi_h(x) = \begin{cases} \tilde{\chi}(x/h), \ x \in \overline{\Omega}_0; \\ \tilde{\chi}((x - 2\pi m)/h), \ x - 2\pi m \in \overline{\Omega}_0, \ m \in \mathbf{Z}^3. \end{cases}$$

Остановимся на свойствах функции φ. Следующие четыре из них элементарным образом вытекают из свойств потенциала $I^{\hat{G}}_{\omega_h}(x;k,\tilde{\lambda}_1(k,h))$ и определения функции χ_h:

$a)[A(k) - \tilde{\lambda}_1^2(k,h)]\varphi(x;k,h) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}[A(k) - \tilde{\lambda}_1^2(k,h)]I^{\hat{G}}_{\omega_h}(x;k,\tilde{\lambda}_1(k,h)) = 0,$ $\quad x \in \Omega_{3h}, \ k \in K_\alpha, \ h \le h_0;$

$b)\ \varphi(x+2\pi m;k,h) = \varphi(x;k,h), \quad m \in \mathbf{Z}^3, \ k \in K_\alpha, \ h \le h_0;$

$c)\ \varphi(x;k,h) = 0, \quad x \in F_h, \ k \in K_\alpha, \ h \le h_0;$

$d)\ \varphi \in C(\mathbf{R}^3) \bigcap C^\infty(\mathbf{R}^3 \setminus \bigcup_{m\in\mathbf{Z}^3} \{x : \ x+2\pi m \in \partial F_h\}), \quad k \in K_\alpha, \ h \le h_0,$

где $h_0 > 0$ выбирается так, чтобы $\tilde{\lambda}_1^2(k,h) < |m+k|^2$ для всех $h \le h_0, k \in K_\alpha$ и $m \in \mathbf{Z}^3 \setminus 0$. В дополнение к свойству a) оценим невязку $\left[A(k) - \tilde{\lambda}_1^2\right]\varphi$ в слое $F_{3h} \setminus F_h$. Запишем её в виде

$$\left[A(k) - \tilde{\lambda}_1^2(k,h)\right]\varphi(x;k,h)$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left[A(k) - \tilde{\lambda}_1^2(k,h)\right]\left(\chi_h(x) R_{\omega_h}(x;k,\tilde{\lambda}_1(k,h))\right)$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\chi_h(x)\left[A(k) - \tilde{\lambda}_1^2(k,h)\right] R_{\omega_h}(x;k,\tilde{\lambda}_1(k,h))$$
$$-\frac{2}{(2\pi)^{3/2}}\nabla\chi_h(x)\cdot\nabla R_{\omega_h}(x;k,\tilde{\lambda}_1(k,h))$$
$$+\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}R_{\omega_h}(x;k,\tilde{\lambda}_1(k,h))\left[A(k) - |k|^2\right]\chi_h(x) \tag{4.3}$$

и оценим каждое слагаемое отдельно. Начнем с последнего. Очевидно, функция χ_h и её производные удовлетворяют неравенствам $|\chi_h(x)| \le 1$, $|\nabla\chi_h(x)| \le C_1/h$, $|\Delta\chi_h(x)| \le C_2/h^2$, отсюда следует, что

$$\left|\left[A(k) - |k^2|\right]\chi_h(x)\right| \le C/h^2, \ k \in K_\alpha. \tag{4.4}$$

Функцию $R_{\omega_h}(x;k,\tilde{\lambda}_1^2(k,h))$ представим в виде суммы трех слагаемых

$$R^I_{\omega_h}(x;k) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial F_h} \frac{e^{-ik(x-y)}-1}{|x-y|}d\omega_h(y),$$

$$R^{II}_{\omega_h}(x;k,h) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial F_h} e^{-ik(x-y)}\gamma(|x-y|,\tilde{\lambda}_1(k,h))d\omega_h(y),$$

$$R^{III}_{\omega_h}(x;k,h) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial F_h} \psi(x,y;k,\tilde{\lambda}_1(k,h))d\omega_h(y)$$

и покажем, что в каждом из выписанных интегралов модуль подынтегрального выражения можно оценить сверху константой, не зависящей от k и h (для $k \in K_\alpha$ и достаточно малых h). Действительно, легко видеть, что $|e^{-ik(x-y)}-1|/|x-y| \le 1$ $(k \in K_\alpha)$; функции $|\psi(x,y;k,\tilde{\lambda}_1(k,h))|$ и $|\gamma(|x-y|,\tilde{\lambda}_1(k,h))|$ непрерывны по совокупности аргументов (x,y,k,h) на множестве $T_{h_1} = \{(x,y,k,h) : x \in \overline{\Omega}_0, y \in \overline{F}_{h_1}, k \in K_\alpha, h \le h_1\}$ для некоторого достаточно малого h_1 (непрерывность первой функции следует из того, что ряды в представлении (4.2) для ψ сходятся равномерно на T_{h_1}, непрерывность второй очевидна), а значит, в силу компактности T_{h_1}, они ограничены на этом множестве. Таким образом,

$$\left|R_{\omega_h}(x;k,\tilde{\lambda}_1^2(k,h))\right| \le \int\limits_{\partial F_h} C d\omega_h(y) = Cc(F_h),\ x \in \Omega_0,\ k \in K_\alpha,\ h \le h_1\,. \tag{4.5}$$

Отсюда, с учетом (4.4), получаем

$$\left|R_{\omega_h}(x;k,\tilde{\lambda}_1^2(k,h))\left[A(k)-|k|^2\right]\chi_h(x)\right| \le C/h,\ x \in \Omega_0,\ k \in K_\alpha,\ h \le h_1. \tag{4.6}$$

Оценим теперь $|\nabla R_{\omega_h}|$. Аналогично тому, как это было сделано для самой функции ψ, доказывается, что $|\nabla_x \psi(x,y;k,h)| \le C$ для $(x,y,k,h) \in T_{h_1}$, следовательно,

$$|\nabla R^{III}_{\omega_h}(x;k,h)| \le Cc(F_h),\ x \in \Omega_0,\ k \in K_\alpha,\ h \le h_1. \tag{4.7}$$

Несложно показать, что и

$$|\nabla R^{II}_{\omega_h}(x;k,h)| \le Cc(F_h),\ x \in \Omega_0,\ k \in K_\alpha,\ h \le h_1 \tag{4.8}$$

(опять же модуль подынтегрального выражения, после дифференцирования под знаком интеграла, равномерно ограничен). Наконец, $|\nabla R^I_{\omega_h}|$ оценивается следующим образом:

$$|\nabla R^I_{\omega_h}(x;k,h)| \le \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial F_h}\left|\nabla_x \frac{e^{-ik(x-y)}-1}{|x-y|}\right| d\omega_h(y)$$

$$\leq \int\limits_{\partial F_h} \frac{C}{|x-y|} d\omega_h(y) \leq C, \ k \in K_\alpha \, . \tag{4.9}$$

Итак,

$$|\nabla R_{\omega_h}(x;k,h) \cdot \nabla \chi_h(x)| \leq |\nabla R_{\omega_h}(x;k,h)||\nabla \chi_h(x)| \leq C/h, \ k \in K_\alpha, \ h \leq h_1 \, . \tag{4.10}$$

Возводя в квадрат левую и правую часть последнего неравенства, а также неравенства (4.6), а затем интегрируя их по $F_{3h} \setminus F_h$, получаем, что $L_2(F_{3h} \setminus F_h)$ нормы последних двух слагаемых в правой части равенства (4.3) есть $O(h)$. Докажем, что это верно и для первого слагаемого. Имеем

$$\left[A(k) - \tilde{\lambda}_1^2(k,h)\right] R_{\omega_h}(x;k,h) = \left[A(k) - \tilde{\lambda}_1^2(k,h)\right] (1 - I_{\omega_h}(x))$$

$$= 2i(k,\nabla) I_{\omega_h}(x) - \frac{c(F_h)}{(2\pi)^3}(1 - I_{\omega_h}(x)).$$

Как известно,

$$\int |\nabla I_{\omega_h}(x)|^2 dx = c(F_h). \tag{4.11}$$

Кроме того, $0 < I_{\omega_h}(x) \leq 1$ и $|\chi_h(x)| \leq 1$, поэтому

$$\int\limits_{F_{3h}\setminus F_h} \left|\chi_h(x) \left[A(k) - \tilde{\lambda}_1^2(k,h)\right] R_{\omega_h}(x;k,\tilde{\lambda}_1(k,h))\right|^2 dx \leq Ch, \ k \in K_\alpha \, .$$

Таким образом, для достаточно малых h верно неравенство

$$\int\limits_{F_{3h}\setminus F_h} \left|\left[A(k) - \tilde{\lambda}_1^2(k,h)\right] \varphi(x,k,h)\right|^2 dx \leq Ch, \ k \in K_\alpha \, . \tag{4.12}$$

В дальнейшем нам понадобятся ещё три простых свойства функции φ:

e) $|\varphi(x;k,h)| \leq C, \ k \in K_\alpha, h \leq h_1$;

f) $\|\varphi(\cdot;k,h) - 1/(2\pi)^{3/2}\|^2 = \int\limits_{\Omega_0} |\varphi(x;k,h) - 1/(2\pi)^{3/2}|^2 dx \leq Ch^2$, $k \in K_\alpha, \ h \leq h_1$;

g) $\|\varphi(\cdot;k,h)\|^2 = \int\limits_{\Omega_0} |\varphi(x;k,h)|^2 dx = 1 + r(k,h)$,

где $|r(k,h)| \leq Ch$ для $k \in K_\alpha, h \leq h_1$. Свойство e) следует из неравенства $|I_{\omega_h}(x)| \leq 1$ и оценки (4.5). Для доказательства свойства f) разобъем область интегрирования Ω_0 на шар B_h радиуса $2diam(F_h)$ с центром в нуле и $\Omega_0 \setminus B_h$. Интеграл по множеству B_h, как легко видеть, есть $O(h^3)$, а по $\Omega_0 \setminus B_h$ оценивается следующим образом:

$$\int\limits_{\Omega_0\setminus B_h} |\varphi(x;k,h) - 1/(2\pi)^{3/2}|^2 dx$$

$$\leq \frac{2}{(2\pi)^3} \int\limits_{\Omega_0 \setminus B_h} |I_{\omega_h}(x)|^2 dx + \frac{2}{(2\pi)^3} \int\limits_{\Omega_0 \setminus B_h} |R_{\omega_h}(x; k, \tilde{\lambda}_1(k,h))|^2 dx,$$

причем в силу (4.5) второе слагаемое имеет порядок h^2. Заметим, что

$$|I_{\omega_h}(x)| \leq \int\limits_{\partial F_h} \frac{d\omega_h}{4\pi dist(x, F_h)} = \frac{c(F_h)}{4\pi dist(x, F_h)}\,,\ x \in \mathbf{R}^3 \setminus F_h\,,$$

поэтому, переходя к сферическим координатам, получаем

$$\int\limits_{\Omega_0 \setminus B_h} |I_{\omega_h}(x)|^2 dx \leq c(F_h)^2 \int\limits_{2diam(F_h)}^{diam(\Omega_0)} \frac{r^2 dr}{(r - diam(F_h))^2} = O(h^2),$$

что и доказывает свойство f). Наконец, свойство g) следует из неравенств

$$1 - \|\varphi(\cdot; k,h) - 1/(2\pi)^{3/2}\| \leq \|\varphi(\cdot; k,h)\| \leq 1 + \|\varphi(\cdot; k,h) - 1/(2\pi)^{3/2}\|$$

и свойства e).

Разложим функцию φ в ряд Фурье

$$\varphi(x; k,h) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(k,h)\phi_j(x; k,h).$$

Поскольку $\varphi \in H^1(\Omega_h)$ (это следует из свойств b), c), d) и оценок (4.7)–(4.11)), последний ряд сходится не только в $L_2(\Omega_h)$, но и в метрике пространства $H^1(\Omega_h)$. Поэтому можно записать:

$$\int\limits_{\Omega_h} \left[A(k) - \tilde{\lambda}_1^2(k,h)\right] \varphi(x,k,h)\overline{\varphi(x,k,h)} dx$$

$$= (\varphi(\cdot,k,h), \varphi(\cdot,k,h))_{A(k),h} - \tilde{\lambda}_1^2(k,h)\|\varphi(\cdot,k,h)\|^2$$

$$= (\lambda_1^2(k,h) - \tilde{\lambda}_1^2(k,h))|a_1(k,h)|^2 + \sum_{j=2}^{\infty}(\lambda_j^2(k,h) - \tilde{\lambda}_1^2(k,h))|a_j(k,h)|^2\,. \quad (4.13)$$

С другой стороны,

$$\left|\int\limits_{\Omega_h} \left[A(k) - \tilde{\lambda}_1^2(k,h)\right] \varphi(x,k,h)\overline{\varphi(x,k,h)} dx\right|$$

$$= \left|\int\limits_{F_{3h} \setminus F_h} \left[A(k) - \tilde{\lambda}_1^2(k,h)\right] \varphi(x,k,h)\overline{\varphi(x,k,h)} dx\right|$$

$$\leq \left\{ \int\limits_{F_{3h}\setminus F_h} \left| \left[A(k) - \tilde{\lambda}_1^2(k,h) \right] \varphi(x,k,h) \right|^2 dx \int\limits_{F_{3h}\setminus F_h} |\varphi(x,k,h)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

$$\leq Ch^2, \ k \in K_\alpha, \ h \leq h_1, \tag{4.14}$$

где использованы неравенство (4.12) и свойство e) функции φ. Покажем, что (4.13) и (4.14) влекут за собой следующую оценку:

$$\sum_{j=2}^{\infty} \lambda_j^2(k,h)|a_j(k,h)|^2 \leq Ch, \ k \in K_\alpha \tag{4.15}$$

при $h \to 0$. Действительно, как было показано ранее, $\lambda_j^2(k,h) \geq \lambda_j^2(k,0), \ j = \overline{1,\infty}$, при этом $\lambda_j^2(k,0) \geq 1/4, \ j = \overline{2,\infty}$, значит, для $k \in K_\alpha$

$$\lambda_j^2(k,h) - \tilde{\lambda}_1^2(k,h) \geq 1/4 - |k|^2 - c(F_h)/(2\pi)^3, \ j = \overline{2,\infty};$$

$$\tilde{\lambda}_1^2(k,h) - \lambda_1^2(k,h) \leq c(F_h)/(2\pi)^3; \tag{4.16}$$

следовательно,

$$\frac{3 - 4\alpha^2 - 4\alpha - c(F_h)/(2\pi)^3}{16} \sum_{j=2}^{\infty} |a_j(k,h)|^2 \leq \sum_{j=2}^{\infty} \left(\lambda_j^2(k,h) - \tilde{\lambda}_1^2(k,h) \right) |a_j(k,h)|^2$$

$$= (\tilde{\lambda}_1^2(k,h) - \lambda_1^2(k,h))|a_1(k,h)|^2 + \int\limits_{\Omega_h} \left[A(k) - \tilde{\lambda}_1^2(k,h) \right] \varphi(x,k,h)\overline{\varphi(x,k,h)}dx$$

$$\leq c(F_h)\|\varphi(\cdot;k,h)\|^2/(2\pi)^3 + Ch^2 \leq Ch, \ k \in K_\alpha, \ h \leq h_1.$$

Отсюда вытекает, что существует такое $h_2 > 0$, что

$$\sum_{j=2}^{\infty} |a_j(k,h)|^2 \leq Ch, \ k \in K_\alpha, \ h \leq h_2. \tag{4.17}$$

Умножая последнее неравенство на $\tilde{\lambda}_1^2(k,h)$ и складывая с (4.13), с учетом (4.14) и (4.16), получаем

$$\sum_{j=2}^{\infty} \lambda_j^2(k,h)|a_j(k,h)|^2 \leq c(F_h)\|\varphi(\cdot;k,h)\|^2/(2\pi)^3 + \tilde{\lambda}_1^2(k,h)Ch + Ch^2,$$

$$k \in K_\alpha, \ h \leq h_2,$$

и тем самым оценка (4.15) доказана. Заметим, что при её выводе в качестве нижней границы для $\lambda_1^2(k,h)$ мы брали $\lambda_1^2(k,0)$, что сильно огрубило эту оценку (как будет доказано ниже, для левой части в (4.15) имеет место оценка порядка h^2).

Покажем, что

$$|\lambda_1^2(k,h) - \tilde{\lambda}_1^2(k,h)| \le Ch^2, \ k \in K_\alpha, h \le h_2. \tag{4.18}$$

Для этого введем в рассмотрение функцию

$$\tilde{\varphi}(x;k,h) = \tilde{\xi}(k,h)\varphi(x;k,h),$$

где

$$\tilde{\xi}(k,h) = 1/a_1(k,h).$$

В силу (4.17), свойства e) функции φ и равенства Парсеваля

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j(k,h)|^2 = \|\varphi(\cdot;k,h)\|^2$$

справедливо неравенство

$$\left| |\tilde{\xi}(k,h)| - 1 \right| \le Ch, \ k \in K_\alpha, \ h \le h_2,$$

следовательно, функция $\tilde{\varphi}$ обладает свойствами, аналогичными всем свойствам функции φ, за исключением f), вместо которого для неё имеем

$$f') \int\limits_{\Omega_0} \left| \tilde{\varphi}(x;k,h) - \tilde{\xi}(k,h)/(2\pi)^{3/2} \right|^2 dx \le Ch^2, \ k \in K_\alpha, \ h \le h_2,$$

и верно следующее неравенство:

$$\int\limits_{F_{3h} \setminus F_h} \left| \left[A(k) - \tilde{\lambda}_1^2(k,h) \right] \tilde{\varphi}(x,k,h) \right|^2 dx \le Ch, \ k \in K_\alpha, \ h \le h_2. \tag{4.12$'$}$$

Поскольку коэффициент при ϕ_1 в разложении функции $\tilde{\varphi}$ в ряд Фурье по $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ равен 1 и $\tilde{\varphi}$ — гладкая функция, можно записать цепочку равенств

$$\begin{aligned} \lambda_1^2(k,h) - \tilde{\lambda}_1^2(k,h) &= (\lambda_1^2(k,h) - \tilde{\lambda}_1^2(k,h))(\tilde{\varphi}(\cdot;k,h), \phi_1(\cdot;k,h)) \\ &= (\tilde{\varphi}(\cdot;k,h), \phi_1(\cdot;k,h))_{A(k),h} - \tilde{\lambda}_1^2(k,h))(\tilde{\varphi}(\cdot;k,h), \phi_1(\cdot;k,h)) \\ &= \int\limits_{\Omega_h} \left[A(k) - \tilde{\lambda}_1^2(k,h) \right] \tilde{\varphi}(x,k,h) \overline{\phi_1(x;k,h)} dx, \end{aligned}$$

и, используя (4.12$'$), оценить последний интеграл следующим образом:

$$\left| \int\limits_{\Omega_h} \left[A(k) - \tilde{\lambda}_1^2(k,h) \right] \tilde{\varphi}(x,k,h) \overline{\phi_1(x;k,h)} dx \right|$$

$$\leq \int\limits_{F_{3h}\setminus F_h} \left| \left[A(k) - \tilde{\lambda}_1^2(k,h) \right] \tilde{\varphi}(x,k,h)\phi_1(x;k,h) \right| dx$$

$$\leq \left\{ \int\limits_{F_{3h}\setminus F_h} \left| \left[A(k) - \tilde{\lambda}_1^2(k,h) \right] \tilde{\varphi}(x,k,h) \right|^2 dx \int\limits_{F_{3h}\setminus F_h} |\phi_1(x;k,h)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

$$\leq Ch^{1/2} \sqrt{\int\limits_{F_{3h}\setminus F_h} |\phi_1(x;k,h)|^2 dx}, \;\; k \in K_\alpha, h \leq h_2. \tag{4.19}$$

Далее, покажем, что

$$\int\limits_{F_{3h}\setminus F_h} |\phi_1(x;k,h)|^2 dx \leq Ch^3, \;\; k \in K_\alpha, \;\; h \leq h_2\,. \tag{4.20}$$

С этой целью воспользуемся неравенством треугольника:

$$\sqrt{\int\limits_{F_{3h}\setminus F_h} |\phi_1(x;k,h)|^2 dx}$$

$$\leq \sqrt{\int\limits_{F_{3h}\setminus F_h} |e^{ikx}(\phi_1(x;k,h) - \tilde{\varphi}(x;k,h))|^2 dx} + \sqrt{\int\limits_{F_{3h}\setminus F_h} |\tilde{\varphi}(x;k,h)|^2 dx}.$$

В силу равномерной ограниченности $|\tilde{\varphi}(x;k,h)|$ второе слагаемое есть $O(h^{3/2})$. В интеграле в первом слагаемом сделаем замену переменной $x = hy$ и воспользуемся неравенством Фридрикса. Имеем

$$\int\limits_{F_{3h}\setminus F_h} |e^{ikx}(\phi_1(x;k,h) - \tilde{\varphi}(x;k,h)|^2 dx$$

$$= h^3 \int\limits_{F_3\setminus F_1} |e^{ikhy}(\phi_1(hy;k,h) - \tilde{\varphi}(hy;k,h)|^2 dy$$

$$\leq Ch^3 \int\limits_{F_3\setminus F_1} \left| \nabla_y \left[e^{ikhy}(\phi_1(hy;k,h) - \tilde{\varphi}(hy;k,h) \right] \right|^2 dy$$

$$= Ch^2 \int\limits_{F_{3h}\setminus F_h} \left| \nabla_x \left[e^{ikx}(\phi_1(x;k,h) - \tilde{\varphi}(x;k,h) \right] \right|^2 dx\,.$$

Заметим, что

$$\int\limits_{F_{3h}\setminus F_h} \left| \nabla_x \left[e^{ikx}(\phi_1(x;k,h) - \tilde{\varphi}(x;k,h) \right] \right|^2 dx$$

$$\le \int\limits_{\Omega_h} \left| \nabla_x \left[e^{ikx} (\phi_1(x;k,h) - \tilde{\varphi}(x;k,h) \right] \right|^2 dx$$

$$= (\phi_1(\cdot;k,h) - \tilde{\varphi}(\cdot;k,h), \phi_1(\cdot;k,h) - \tilde{\varphi}(\cdot;k,h))_{A(k),h}$$

$$= |\tilde{\xi}(k,h)|^2 \sum_{j=2}^{\infty} \lambda_j^2(k,h) |a_j(k,h)|^2 \le Ch, \ k \in K_\alpha, \ h \le h_2,$$

тем самым неравенство (4.20), а вместе с ним и (4.18) доказаны. Теперь можно уточнить оценки (4.15) и (4.17). Рассуждая так же, как и при выводе (4.15) и (4.17), но вместо неравенства (4.16) используя (4.18), приходим к следующему:

$$\sum_{j=2}^{\infty} \lambda_j^2(k,h) |a_j(k,h)|^2 \le Ch^2, \ k \in K_\alpha, h \le h_2.$$

Отсюда следует (напомним, что $\lambda_j^2(k,h) \ge 1/4, j = \overline{2,\infty}$), что

$$\|\tilde{\varphi}(\cdot;k,h) - \phi_1(\cdot;k,h)\|_1^2 \le Ch^2, \ k \in K_\alpha, h \le h_2,$$

и, тем более,

$$\|\tilde{\varphi}(\cdot;k,h) - \phi_1(\cdot;k,h)\|^2 \le Ch^2, \ k \in K_\alpha, h \le h_2.$$

Воспользовавшись неравенством треугольника

$$\|\tilde{\xi}(k,h)/(2\pi)^3 - \phi_1(\cdot;k,h)\|$$

$$\le \|\tilde{\xi}(k,h)/(2\pi)^3 - \tilde{\varphi}(\cdot;k,h)\| + \|\tilde{\varphi}(\cdot;k,h) - \phi_1(\cdot;k,h)\|$$

и свойством f') функции $\tilde{\varphi}$, приходим к неравенству

$$\|\tilde{\xi}(k,h)/(2\pi)^3 - \phi_1(\cdot;k,h)\|^2 \le Ch^2, \ k \in K_\alpha, \ h \le h_2.$$

Полагая теперь

$$\xi = \tilde{\xi}/|\tilde{\xi}|,$$

с учетом того, что $|\tilde{\xi}| = 1 + O(h)$, получаем искомый результат. Теорема доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 1.1

В полной аналогии с тем, как была получена формула (2.11), можно показать, что Φ_ε представляется в виде

$$\Phi_\varepsilon(x,y) = \frac{1}{\varepsilon^3}\sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{Y}\frac{e^{ik(x-y)/\varepsilon}\varepsilon^2 dk}{\varepsilon^2(æ^2(\varepsilon)-q(\varepsilon))-\lambda_j^2(k,0)}\phi_j(x/\varepsilon;k,0)\overline{\phi_j(y/\varepsilon;k,0)}.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$G_\varepsilon^I(x,y) = \frac{1}{\varepsilon^3}\int\limits_{K_\alpha}\frac{e^{ik(x-y)/\varepsilon}\varepsilon^2 dk}{\varepsilon^2(æ^2(\varepsilon)-q(\varepsilon))-\lambda_1^2(k,0)}\phi_1(x/\varepsilon;k,0)\overline{\phi_1(y/\varepsilon;k,0)}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^3}\int\limits_{K_\alpha} dk\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2(æ^2(\varepsilon)-q(\varepsilon))-\lambda_1^2(k,0)}e^{ik(x-y)/\varepsilon}$$

и докажем, что

$$\|\Phi_\varepsilon - G_\varepsilon^I\|^2_{L_2(Q_x\times\mathbf{R}_y^3)} = O(\varepsilon) \tag{5.1}$$

при $\varepsilon\to 0$.

В силу равенства Парсеваля (2.7),

$$\|\Phi_\varepsilon - G_\varepsilon^I\|^2_{L_2(Q_x\times\mathbf{R}_y^3)}$$

$$= \int\limits_{Q_x}dx\frac{1}{\varepsilon^3}\int\limits_{Y\setminus K_\alpha}dk\left|\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2(æ^2(\varepsilon)-q(\varepsilon))-\lambda_1^2(k,0)}\phi_1(x/\varepsilon;k,0)\right|^2$$

$$+\int\limits_{Q_x}dx\frac{1}{\varepsilon^3}\sum_{j=2}^{\infty}\int\limits_{Y}dk\left|\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2(æ^2(\varepsilon)-q(\varepsilon))-\lambda_j^2(k,0)}\phi_j(x/\varepsilon;k,0)\right|^2.$$

Отсюда, учитывая (2.3) и (2.4), получаем

$$\|\Phi_\varepsilon - G_\varepsilon^I\|^2_{L_2(Q_x\times\mathbf{R}_y^3)}$$

$$= \int\limits_{Q_x}dx\frac{1}{\varepsilon^3}\int\limits_{Y\setminus K_\alpha}dk\frac{\varepsilon^4}{(2\pi)^3\left|\varepsilon^2(æ^2(\varepsilon)-q(\varepsilon))-|k|^2\right|^2}$$

$$+\int\limits_{Q_x}dx\frac{1}{\varepsilon^3}\sum_{m\in\mathbf{Z}^3\setminus\{0\}}\int\limits_{Y}dk\frac{\varepsilon^4}{(2\pi)^3\left|\varepsilon^2(æ^2(\varepsilon)-q(\varepsilon))-|k+m|^2\right|^2}$$

$$= \frac{\varepsilon\ vol(Q_x)}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbf{R}^3\setminus K_\alpha}\frac{dk}{\left|\varepsilon^2(æ^2(\varepsilon)-q(\varepsilon))-|k|^2\right|^2},$$

где $vol(Q_x)$ — объем области Q_x. Но по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\mathbf{R}^3\setminus K_\alpha}\frac{dk}{|\varepsilon^2(æ^2(\varepsilon)-q(\varepsilon))-|k|^2|^2}=\int\limits_{\mathbf{R}^3\setminus K_\alpha}\frac{dk}{|\alpha^2-|k|^2|^2}<\infty,$$

что и доказывает оценку (5.1).

Представим теперь функцию $G_\varepsilon(x,y)$ в виде

$$G_\varepsilon(x,y)=\Phi_\varepsilon(x,y)+(G_\varepsilon^I(x,y)-\Phi_\varepsilon(x,y))+(G_\varepsilon(x,y)-G_\varepsilon^{IV}(x,y))$$

$$+(G_\varepsilon^{IV}(x,y)-G_\varepsilon^{III}(x,y))+(G_\varepsilon^{III}(x,y)-G_\varepsilon^{II}(x,y))+(G_\varepsilon^{II}(x,y)-G_\varepsilon^{I}(x,y)),$$

где

$$G_\varepsilon^{IV}(x,y)=\frac{1}{\varepsilon^3}\int\limits_{K_\alpha}\frac{e^{ik(x-y)/\varepsilon}\varepsilon^2dk}{\varepsilon^2æ^2(\varepsilon)-\lambda_1^2(k,h(\varepsilon))}\phi_1(x/\varepsilon;k,h(\varepsilon))\overline{\phi_1(y/\varepsilon;k,h(\varepsilon))},$$

$$G_\varepsilon^{III}(x,y)=\frac{1}{\varepsilon^3}\int\limits_{K_\alpha}\frac{e^{ik(x-y)/\varepsilon}\varepsilon^2dk}{\varepsilon^2æ^2(\varepsilon)-\tilde\lambda_1^2(k,h(\varepsilon))}\phi_1(x/\varepsilon;k,h(\varepsilon))\overline{\phi_1(y/\varepsilon;k,h(\varepsilon))},$$

$$G_\varepsilon^{II}(x,y)=\frac{1}{\varepsilon^3}\int\limits_{K_\alpha}dk\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2æ^2(\varepsilon)-\tilde\lambda_1^2(k,h(\varepsilon))}\frac{e^{ikx/\varepsilon}\xi(k,h(\varepsilon))}{(2\pi)^{3/2}}\overline{e^{iky/\varepsilon}\phi_1(y/\varepsilon;k,h(\varepsilon))}.$$

Очевидно, теорема 1.1 будет доказана, если в дополнение к (5.1) получим следующие оценки:

$$\|G_\varepsilon-G_\varepsilon^{IV}\|^2_{L_2(Q_x\times\mathbf{R}^3_y)}=O(\varepsilon)\,, \tag{5.2}$$

$$\|G_\varepsilon^{IV}-G_\varepsilon^{III}\|^2_{L_2(Q_x\times\mathbf{R}^3_y)}=O\left(\left(h^2(\varepsilon)/\varepsilon\right)^2=l^4(\varepsilon)/\varepsilon^6\right)\,, \tag{5.3}$$

$$\|G_\varepsilon^{III}-G_\varepsilon^{II}\|^2_{L_2(Q_x\times\mathbf{R}^3_y)}=O(h^2(\varepsilon)=l^2(\varepsilon)/\varepsilon^2)\,, \tag{5.4}$$

$$\|G_\varepsilon^{II}-G_\varepsilon^{I}\|^2_{L_2(Q_x\times\mathbf{R}^3_y)}=O(h^2(\varepsilon))\,. \tag{5.5}$$

Но прежде докажем вспомогательную лемму.

Лемма 5.1. *Пусть $u(x)$ — 2π-периодическая по каждой переменной x_j, $j=\overline{1,3}$, суммируемая функция. Тогда для любой ограниченной области Q и $\varepsilon_0>0$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_Q|u(x/\varepsilon)|dx\le C\int\limits_{\Omega_0}|u(x)|dx,\varepsilon\le\varepsilon_0,$$

где константа $C=C(Q,\varepsilon_0)$ не зависит от выбора функции u.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $Q = (-\pi R, \pi R)^3$, $R > 0$. Пусть $N = [R/\varepsilon] + 1$, где $[R/\varepsilon]$ — целая часть числа R/ε. Тогда

$$\int_Q |u(x/\varepsilon)|dx \le \int_{(-\pi N\varepsilon, \pi N\varepsilon)^3} |u(x/\varepsilon)|dx$$

$$= \sum_{j_1,j_2,j_3=-N}^{N-1} \int_{\pi\varepsilon j_1}^{\pi\varepsilon(j_1+1)} dx_1 \int_{\pi\varepsilon j_2}^{\pi\varepsilon(j_2+1)} dx_2 \int_{\pi\varepsilon j_3}^{\pi\varepsilon(j_3+1)} dx_3 |u(x/\varepsilon)|$$

$$= (2N)^3 \int_{(-\pi\varepsilon,\pi\varepsilon)^3} |u(x/\varepsilon)|dx = (2N\varepsilon)^3 \int_{\Omega_0} |u(x)|dx \le 8(R+\varepsilon)^3 \int_{\Omega_0} |u(x)|dx,$$

что и требовалось доказать.

Используя только что доказанную лемму, равенство Парсеваля (2.7) и условия нормировки для собственных функций, получаем

$$\|G_\varepsilon - G_\varepsilon^{IV}\|^2_{L_2(Q_x \times \mathbf{R}^3_y)} = \int_{Q_x} dx \frac{1}{\varepsilon^3} \int_{Y\setminus K_\alpha} dk \left| \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 æ^2(\varepsilon) - \lambda_1^2(k, h(\varepsilon))} \phi_1(x/\varepsilon; k, h(\varepsilon)) \right|^2$$

$$+ \int_{Q_x} dx \frac{1}{\varepsilon^3} \sum_{j=2}^{\infty} \int_Y dk \left| \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 æ^2(\varepsilon) - \lambda_j^2(k, h(\varepsilon))} \phi_j(x/\varepsilon; k, h(\varepsilon)) \right|^2 \le C(Q_x, \varepsilon_0)$$

$$\times \left\{ \int_{Y\setminus K_\alpha} dk \frac{\varepsilon}{\left|\varepsilon^2 æ^2(\varepsilon) - \lambda_1^2(k, h(\varepsilon))\right|^2} + \sum_{j=2}^{\infty} \int_Y dk \frac{\varepsilon}{\left|\varepsilon^2 æ^2(\varepsilon) - \lambda_j^2(k, h(\varepsilon))\right|^2} \right\},$$

$$\varepsilon \le \varepsilon_0,$$

а поскольку $\lambda_j^2(k, h(\varepsilon)) \ge \lambda_j^2(k, 0)$ и

$$\lambda_1^2(k, 0) = |k|^2 > Re(æ^2(\varepsilon))\ , k \in Y \setminus K_\alpha;$$

$$\lambda_j^2(k, 0) > Re(æ^2(\varepsilon)),\ j = \overline{2, \infty},$$

то

$$\|G_\varepsilon - G_\varepsilon^{IV}\|^2_{L_2(Q_x \times \mathbf{R}^3_y)}$$

$$\le C(Q_x, \varepsilon_0) \left\{ \int_{Y\setminus K_\alpha} dk \frac{\varepsilon}{\left|\varepsilon^2 æ^2(\varepsilon) - \lambda_1^2(k, 0)\right|^2} + \sum_{j=2}^{\infty} \int_Y dk \frac{\varepsilon}{\left|\varepsilon^2 æ^2(\varepsilon) - \lambda_j^2(k, 0)\right|^2} \right\}$$

$$= C(Q_x,\varepsilon_0)\left\{\int\limits_{Y\setminus K_\alpha} dk\frac{\varepsilon}{|\varepsilon^2æ^2(\varepsilon)-|k|^2|^2}+\sum_{m\in\mathbf{Z}^3\setminus\{0\}}\int\limits_Y dk\frac{\varepsilon}{|\varepsilon^2æ^2(\varepsilon)-|k+m|^2|^2}\right\}$$

$$= \varepsilon C(Q_x,\varepsilon_0)\int\limits_{\mathbf{R}^3\setminus K_\alpha}\frac{dk}{|\varepsilon^2æ^2(\varepsilon)-|k|^2|^2},\ \varepsilon\le\varepsilon_0.$$

При этом

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\mathbf{R}^3\setminus K_\alpha}\frac{dk}{|\varepsilon^2æ^2(\varepsilon)-|k|^2|^2}=\int\limits_{\mathbf{R}^3\setminus K_\alpha}\frac{dk}{|\alpha^2-|k|^2|^2}<\infty,$$

значит, оценка (5.2) действительно имеет место.

Далее, в силу равенства (2.7) и леммы 5.1,

$$\|G_\varepsilon^{IV}-G_\varepsilon^{III}\|^2_{L_2(Q_x\times\mathbf{R}^3_y)}$$

$$=\int\limits_{Q_x}dx\frac{1}{\varepsilon^3}\int\limits_{K_\alpha}dk\frac{|\varepsilon^2(\,\tilde\lambda_1^2(k,h(\varepsilon))-\lambda_1^2(k,h(\varepsilon))\,)\phi_1(x/\varepsilon;k,h(\varepsilon))|^2}{\left|\varepsilon^2æ^2(\varepsilon)-\tilde\lambda_1^2(k,h(\varepsilon))\right|^2\left((\alpha^2-\lambda_1^2(k,h(\varepsilon))-\varepsilon^2\beta^2)^2+(2\alpha\beta\varepsilon)^2\right)}$$

$$\le\frac{C(Q_x,\varepsilon_0)}{(2\alpha\beta\varepsilon)^2}\sup_{k\in K_\alpha}(\,\tilde\lambda_1^2(k,h(\varepsilon))-\lambda_1^2(k,h(\varepsilon))\,)^2\int\limits_{K_\alpha}\frac{\varepsilon dk}{\left|\varepsilon^2æ^2(\varepsilon)-\tilde\lambda_1^2(k,h(\varepsilon))\right|^2},\ \varepsilon\le\varepsilon_0. \tag{5.7}$$

По тем же соображениям,

$$\|G_\varepsilon^{III}-G_\varepsilon^{II}\|^2_{L_2(Q_x\times\mathbf{R}^3_y)}$$

$$=\int\limits_{Q_x}dx\frac{1}{\varepsilon^3}\int\limits_{K_\alpha}dk\left|\frac{\varepsilon^2(\phi_1(x/\varepsilon;k,h(\varepsilon))-\xi(k,h(\varepsilon))/(2\pi)^{3/2})}{\varepsilon^2æ^2(\varepsilon)-\tilde\lambda_1^2(k,h(\varepsilon))}\right|^2$$

$$\le C(Q_x,\varepsilon_0)\sup_{k\in K_\alpha}\|\phi_1(\cdot;k,h(\varepsilon))-\xi(k,h(\varepsilon))/(2\pi)^{3/2}\|^2$$

$$\times\int\limits_{K_\alpha}\frac{\varepsilon dk}{\left|\varepsilon^2æ^2(\varepsilon)-\tilde\lambda_1^2(k,h(\varepsilon))\right|^2},\ \varepsilon\le\varepsilon_0. \tag{5.8}$$

Но для интеграла, фигурирующего в правых частях неравенств (5.7) и (5.8), имеет место оценка

$$\int\limits_{K_\alpha}\frac{\varepsilon dk}{\left|\varepsilon^2æ^2(\varepsilon)-\tilde\lambda_1^2(k,h(\varepsilon))\right|^2}=\int\limits_0^{1/4+\alpha/2}\frac{\varepsilon 4\pi r^2dr}{(\alpha^2-\varepsilon^2\beta^2-\varepsilon^2q(\varepsilon)-r^2)^2+(2\alpha\beta\varepsilon)^2}$$

$$\leq \int_0^\infty \frac{\varepsilon 2\pi r dr}{(\alpha^2-\varepsilon^2\beta^2-\varepsilon^2 q(\varepsilon)-r^2)^2+(2\alpha\beta\varepsilon)^2}$$

$$= \frac{\pi}{2\alpha\beta}\left\{\frac{\pi}{2}+arctg\frac{\alpha^2-\varepsilon^2 q(\varepsilon)-\varepsilon^2\beta}{2\alpha\beta\varepsilon}\right\} \leq \frac{\pi^2}{2\alpha\beta}\,; \tag{5.9}$$

следовательно, принимая во внимание теорему 4.1, приходим к заключению, что оценки (5.3) и (5.4) верны.

Докажем, наконец, оценку (5.5). Ввиду теоремы 4.1, неравенства (5.9) и следствия 1 из теоремы 2.1,

$$\|G_\varepsilon^{II}-G_\varepsilon^{I}\|^2_{L_2(Q_x\times\mathbf{R}^3_y)} = \int_{Q_x} dx\frac{1}{\varepsilon^3}\int_{K_\alpha} dk\int_{\Omega_0} dy$$

$$\times\left|\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 æ^2(\varepsilon)-\tilde{\lambda}_1^2(k,h(\varepsilon))}\frac{\xi(k,h(\varepsilon))}{(2\pi)^{3/2}}\overline{(\phi_1(y;k,h(\varepsilon))-\xi(k,h(\varepsilon))/(2\pi)^{3/2})}\right|^2$$

$$\leq vol(Q_x)\sup_{k\in K_\alpha}\left\{\frac{1}{(2\pi)^3}\left\|\phi_1(\cdot;k,h(\varepsilon))-\xi(k,h(\varepsilon))/(2\pi)^{3/2}\right\|^2\right\}$$

$$\times\int_{K_\alpha}\frac{\varepsilon dk}{\left|\varepsilon^2 æ^2(\varepsilon)-\tilde{\lambda}_1^2(k,h(\varepsilon))\right|^2} = O(h^2(\varepsilon)).$$

Теорема доказана.

Список литературы

[1] *В.А. Марченко, Е.Я. Хруслов,* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Наукова думка, Киев (1974).

[2] *В.В. Жиков, С.М. Козлов, О.А. Олейник,* Усреднение дифференциальных операторов. Физ.-мат. литература, Москва (1993).

[3] *J.L. Lions, G. Papanicolaou, and A. Bensoussan,* Asymptotic analysis for periodic structures. Stud. Math. Appl., v. 5, North-Holland, Amsterdam (1978).

Asymptotic behaviour of Green's function of the first boundary value problem

V.A. Rybalko

The first boundary value problem for the Helmholtz equation in the domain external to the periodic structure of bodies is considered. The asymptotic behaviour of Green's function of this problem is studied when the period of the structure and the wave length are sufficiently small. It is shown that the structure of bodies can be replaced by the effective potential.

Асимптотична поведінка функції Гріна першої крайової задачі

В.О. Рибалко

Розглядається перша крайова задача для рівняння Гельмгольця в області, що є зовнішньою до періодичної системи тіл. Вивчається асимптотична поведінка функції Гріна цієї задачі, коли період структури та довжина хвилі стають малими. Показано, що систему тіл можна замінити ефективним потенціалом.