Математическая физика, анализ, геометрия
1999, т. 6, № 1/2, с. 130–157

Весовые приближения полиномами и целыми функциями

И.О. Хачатрян

Статья поступила в редакцию 25 августа 1998 года

Статья содержит обзор основных результатов автора, относящихся к весовой полноте полиномов и линейных комбинаций целых функций типа Миттаг–Леффлера, а также квазианалитичности некоторых классов функций, связанных с весовой аппроксимацией. Прилагается полный список научных работ автора.

ИЛЬИЧ ОГАНЕСОВИЧ ХАЧАТРЯН

9 августа 1994 года в Ереване умер известный математик, специалист в области комплексного анализа Ильич Оганесович Хачатрян.

И.О. Хачатрян родился в 1933 году в Ереване. Поступив после окончания в 1955 году Ереванского университета в аспирантуру к М.М. Джрбашяну, он был направлен для ее продолжения к Б.Я. Левину и провел в Харькове 1957–1960 годы. Научные интересы Ильича Оганесовича сложились в эти годы под влиянием М.М. Джрбашяна и Б.Я. Левина и относились к теории весовых приближений полиномами и целыми функциями.

Вернувшись в Ереван в 1960 году, Ильич Оганесович работал сначала в Институте механики и математики АН Армении, с 1970 по 1988 годы — в Армянском педагогическом институте, с 1988 года и до конца жизни — в Ереванском государственном университете. Все эти годы Ильич Оганесович вел интенсивную научную работу и часто приезжал в Харьков для обсуждения своих новых результатов. Он поддерживал постоянные научные и дружеские связи со многими харьковскими математиками. Ильич Оганесович остался в их памяти как человек высокой культуры, обладающий обширными познаниями по истории и литературе своей родной Армении, человек большой скромности и душевного благородства.

В начале 90-х годов Ильич Оганесович приступил к написанию докторской диссертации, в которой собирался подытожить свои результаты по теории весовых приближений. Во время работы обнаружилось, что он тяжело болен. Однако, желая довести дело до конца, Ильич Оганесович откладывал лечение.

В настоящее время еще не ясно, возможно ли подготовить оставленный Ильичем Оганесовичем текст диссертации к изданию в виде монографии. Поэтому представляется целесообразной публикация краткого изложения основных результатов, взятого из введения к диссертации, а также полного списка[1] научных работ Ильича Оганесовича. Эти материалы публикуются ниже; их подготовили к печати И.В. Островский и М.Л. Содин.

Редакционная коллегия

1. Весовые приближения полиномами

Для данного числа $\rho > 1/2$ обозначим через $\Delta(\rho)$ и $\Delta^*(\rho)$ взаимно дополнительные угловые области

$$\begin{aligned} \Delta(\rho) &= \left\{ z : |\arg z| < \frac{\pi}{2\rho}, \quad 0 < |z| < +\infty \right\}, \\ \Delta^*(\rho) &= \left\{ z : \frac{\pi}{2\rho} < |\arg z| \le \pi, \quad 0 < |z| < +\infty \right\}, \end{aligned} \tag{1}$$

а через L_ρ — общую границу этих областей. Раствор угла $\Delta^*(\rho)$ обозначим через $\frac{\pi}{2\rho^*}$, так что $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^*} = 2$.

Пусть на L_ρ определена вещественная измеримая функция $w(t)$, удовлетворяющая условиям

$$w(t) \ge 1, \quad \lim_{|t| \to +\infty} |t|^n w^{-1}(t) = 0, \quad t \in L_\rho, \quad n = 0, 1, \dots . \tag{2}$$

Обозначим через $C_w(L_\rho)$ множество непрерывных на L_ρ функций $f(t)$, для которых

$$\lim_{|t| \to +\infty} |t|^n w^{-1}(t) = 0. \tag{3}$$

Норма элемента f определяется равенством

$$||f|| = \sup \left\{ |f(t)| w^{-1}(t) : t \in L_\rho \right\} . \tag{4}$$

Обозначим через $P_w(L_\rho)$ замыкание системы полиномов в $C_w(L_\rho)$, а через $\mathcal{M}(L_\rho)$ — множество полиномов $P(t)$, удовлетворяющих условию

[1] Работы из этого списка, а также ссылки на них в тексте нумеруются цифрами в квадратных скобках с добавлением буквы Н (напр., [Н1], [Н2] и т.д.)

$$||(t+1)^{-1}P(t)|| \le 1\,, \tag{5}$$

и положим

$$\tilde{w}(z) = \sup\{|P(z)| : P \in \mathcal{M}(L_\rho)\}\,. \tag{6}$$

Целесообразно также ввести обозначение

$$I(h, E, \alpha) = \int\limits_E \frac{\ln h(t)}{1+|t|^{1+\alpha}}|dt|\,. \tag{7}$$

Следуя С.Н. Бернштейну, будем называть функцию $w(t) > 0$ *нормально возрастающей*, если

$$w(t) = w(|t|) = w(1)\exp\int\limits_1^{|t|}\frac{\omega(u)}{u}du, \quad |t| \ge 1\,, \tag{8}$$

где $\omega(t)$ — возрастающая неограниченная функция на полуоси $u \ge 1$.

Аналогично классической проблеме С.Н. Бернштейна [1] для случая вещественной оси в ряде работ [2–4] ставился вопрос: при каких условиях на весовую функцию $w(t)$ любая функция из $C_w(L_\rho)$ допускает приближение полиномами, т.е. когда имеет место совпадение $P_w(L_\rho) = C_w(L_\rho)$?

Из общего результата М.М. Джрбашяна [3], в частности, следует

Теорема А. *Пусть функция $w(t)$ — нормально возрастающая. Тогда*

$$(P_w(L_\rho) = C_w(L_\rho)) \Leftrightarrow (I(w, L_\rho, \rho) = \infty)\,. \tag{9}$$

Мы даем ответ на поставленный вопрос без каких-либо ограничений на вес $w(t)$.

Теорема 1 [H10].
$(P_w(L_\rho) = C_w(L_\rho)) \Leftrightarrow (I(\tilde{w}, L_\rho, \rho) = +\infty,\ I(\tilde{w}, L_\rho, \rho^*) = +\infty)\,.$

Предположим теперь, что полиномы не составляют плотного множества в $C_w(L_\rho) : P_w(L_\rho) \ne C_w(L_\rho)$. Это означает, что в $C_w(L_\rho)$ существуют непрерывные функции, которые нельзя приблизить полиномами с любой наперед заданной точностью. Нижеследующие теоремы дают ответ на вопрос: какими должны быть те непрерывные функции из $C_w(L_\rho)$, которые все же допускают приближение полиномами?

Для простоты предположим, что $\rho > 1$. Тогда $\tilde{w}(z) < +\infty$ при $z \in \Delta(\rho)$ или, что то же самое, $I(\tilde{w}, L_\rho, \rho) < +\infty$. Множества функций, допускающих приближение полиномами в этом случае, различны в зависимости от поведения функции $\tilde{w}(z)$ в дополнительной области $\Delta^*(\rho)$, т.е. они различны в зависимости от сходимости или расходимости интеграла $I(\tilde{w}, L_\rho, \rho^*)$.

Обозначим через $C_w^*(L_\rho)$ множество тех функций $f(t) \in C_w(L_\rho)$, каждая из которых является граничной функцией аналитической в $\Delta(\rho)$ функции $f(z)$, удовлетворяющей условию

$$\ln^+ |f(z)| \le \int\limits_{L_\rho} \ln^+ |f(t)| \frac{\partial G}{\partial n} |dt| \,, \tag{10}$$

где $G(t, z)$ — функция Грина задачи Дирихле для области $\Delta(\rho)$.

Теорема 2 [Н10]. *Пусть* $I(\tilde{w}, L_\rho, \rho) < +\infty$ *и* $I(\tilde{w}, L_\rho, \rho^*) = +\infty$. *Тогда* $P_w(L_\rho) \subset C_w^*(L_\rho)$.

Обозначим через $\mathcal{N}_w^*(L_\rho)$ множество аналитических в $\Delta(\rho)$ функций $f(z)$, удовлетворяющих условиям:

1. $f(z)$ всюду на L_ρ имеет непрерывную граничную функцию, которую мы обозначим через $f(t)$;
2. $\ln^+ |f(z)| \le \int\limits_{L_\rho} \ln^+ |f(t)| \frac{\partial G(t;z)}{\partial n} |dt|, \quad z \in \Delta(\rho)$;
3. $||(t+1)^{-1} f(t)|| \le 1, \quad \lim\limits_{t \to \infty} (t+1)^{-1} w^{-1}(t) f(t) = 0, \quad t \in L_\rho$,

и пусть

$$\tilde{w}_1(z) = \sup \{|f(z)| : f \in \mathcal{N}_w^*\} \,. \tag{11}$$

Теорема 3 [Н10]. $\Big(P_w(L_\rho) = C_w^*(L_\rho)\Big) \Leftrightarrow \Big(\tilde{w}_1(z) \equiv \tilde{w}(z),\ z \in \Delta(\rho)\Big)$.

В случае, когда вместе с интегралом $I(\tilde{w}, L_\rho, \rho)$ сходится также интеграл $I(\tilde{w}, L_\rho, \rho^*)$, т.е. когда $\tilde{w}(z) < +\infty$ во всей плоскости, любая функция, допускающая аппроксимацию полиномами в $C_w(L_\rho)$, на L_ρ совпадает со значениями некоторой целой функции. Для точного описания этих функций обозначим через $C_w^0(L_\rho)$ множество тех функций $f(t) \in C_w(L_\rho)$, каждая из которых на L_ρ совпадает со значениями целой функции $f(z)$ порядка ρ и минимального типа.

Теорема 4 [Н10]. *Пусть* $I(\tilde{w}, L_\rho, \rho^*) < +\infty$. *Тогда* $P_w(L_\rho) \subset C_w^0(L_\rho)$.

Чтобы сформулировать утверждение, аналогичное утверждению теоремы 3, введем обозначения: пусть $\mathcal{N}_w^0(L_\rho)$ означает множество целых функций $f(z)$ порядка ρ и минимального типа, удовлетворяющих условиям

$$\left\|\frac{f(t)}{t+1}\right\| \le 1, \quad \lim_{|t|\to+\infty} \frac{f(t)}{(t+1)w(t)} = 0,\ t \in L_\rho\,, \tag{12}$$

и пусть

$$\tilde{w}_1(z) = \sup\left\{|f(z)| : f \in \mathcal{N}_w^0\right\}. \tag{13}$$

Теорема 5 [H10]. *Пусть* $I(\tilde{w}, L_\rho, \rho^*) < +\infty$. *Тогда* $\Big(P_w(L_\rho) = C_w^0(L_\rho)\Big) \Leftrightarrow \Big(\tilde{w}(z) \equiv \tilde{w}_1(z)\Big)$.

В [H10] приведены примеры пространств $C_w^*(L_\rho)$ и $C_w^0(L_\rho)$, где полиномы плотны или не плотны. В частности, если $w(t)$ — целая четная функция с неотрицательными коэффициентами Тейлора, то полиномы плотны в $C_w^0(\boldsymbol{R})$ — множестве тех функций из $C_w(\boldsymbol{R})$, которые на $\boldsymbol{R}$ совпадают с целыми функциями экспоненциального типа 0.

Н. Левинсоном и Г. Маккином [5] в случае аппроксимации на вещественной оси доказана

Теорема В. $\Big(w(t) = \exp(2|t|^{1/2}),\ t \in \boldsymbol{R}\Big) \Rightarrow \Big(P_w(\boldsymbol{R}) = C_w^0(\boldsymbol{R})\Big)$.

Эта теорема нами обобщена в двух направлениях: во-первых, аппроксимация совершается на более общем множестве L_ρ, и, во-вторых, весовая функция берется более общая.

Теорема 6 [H20]. $\Big(w(t) = \exp(a|t|^\alpha),\ t \in \boldsymbol{R};\ a > 0,\ 0 < \alpha < 1\Big) \Rightarrow \Big(P_w(\boldsymbol{R}) = C_w^0(\boldsymbol{R})\Big)$.

Теорема 7 [H20]. $\Big(w(t) = \exp(a|t|^\alpha),\ a > 0,\ 0 < \alpha < \rho^*,\ t \in L_\rho\Big) \Rightarrow \Big(P_w(L_\rho) = C_w^0(L_\rho)\Big)$.

Теорема 8 [H20]. $\Big(w(t) = \exp(a|t|^\alpha),\ a > 0,\ \alpha = \rho^* < \rho,\ t \in L_\rho\Big) \Rightarrow \Big(P_w(L_\rho) = C_w^*(L_\rho)\Big)$.

Перейдем теперь к изложению наших результатов, относящихся к полноте системы степеней в $C_w(\boldsymbol{R}_+) = C_w[0, +\infty[$.

М.М. Джрбашян [3] дал полное решение задачи при условии, что $w(t)$ — нормально возрастающая функция на $[0, +\infty[$.

Теорема С. *Если* $w(t)$ *— нормально возрастающая функция, то*

$$\Big(P_w(\boldsymbol{R}_+) = C_w(\boldsymbol{R}_+)\Big) \Leftrightarrow \left(I\left(w, \boldsymbol{R}^+, \frac{1}{2}\right) = \infty\right). \tag{14}$$

В общем случае справедлив следующий интегральный критерий:

Теорема 9. $\Big(P_w(\boldsymbol{R}_+) = C_w(\boldsymbol{R}_+)\Big) \Leftrightarrow \Big(I\left(\tilde{w}, \boldsymbol{R}_+, \frac{1}{2}\right) = +\infty\Big)$.

В случае сходимости интеграла $I(\tilde{w}, \boldsymbol{R}_+, 1/2)$ не каждая функция $f(t) \in C_w(\boldsymbol{R}_+)$ может быть приближена полиномами. Чтобы описать замыкание системы полиномов в $C_w(\boldsymbol{R}_+)$, введем обозначение: $C_w^0(\boldsymbol{R}_+)$ — множество функций $f(t) \in C_w(\boldsymbol{R}_+)$, каждая из которых является сужением на $\boldsymbol{R}_+$ некоторой целой функции порядка 1/2 и минимального типа.

Теорема 10. $\Big(I(\tilde{w}, \boldsymbol{R}_+, 1/2) < +\infty\Big) \Rightarrow \Big(P_w(\boldsymbol{R}_+) \subset C_w^0(\boldsymbol{R}_+)\Big)$.

Обозначим через $\mathcal{N}_w^0(\boldsymbol{R}_+)$ множество целых функций $f(z)$ порядка 1/2 и минимального типа, удовлетворяющих условиям

$$\left\|\frac{f(t)}{t+1}\right\| \le 1, \quad \lim_{|t|\to+\infty} \frac{f(t)}{(t+1)w(t)} = 0,\ t \in \boldsymbol{R}_+\,, \tag{15}$$

и пусть

$$\tilde{w}_1(z) = \sup\Big\{|f(z)| : f \in \mathcal{N}_w^0(\boldsymbol{R}_+)\Big\}\,. \tag{16}$$

Теорема 11. *Пусть* $I(\tilde{w}, \boldsymbol{R}_+, 1/2) < +\infty$. *Тогда* $\Big(P_w(\boldsymbol{R}_+) = C_w^0(\boldsymbol{R}_+)\Big) \Leftrightarrow \Big(\tilde{w}(z) \equiv \tilde{w}_1(z),\ z \in \boldsymbol{R}_+\Big)$.

Для весовых функций С.Н. Бернштейна специального вида справедливы следующие утверждения:

Теорема 12 [H20]. *Если* $w(t)$ *— целая функция с неотрицательными коэффициентами Тейлора*

$$w(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \quad a_0 \ge 1, \quad a_k \ge 0,\ k = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

и $I(\tilde{w}, \boldsymbol{R}^+, 1/2) = \infty$, *то* $P_w(\boldsymbol{R}_+) = C_w(\boldsymbol{R}_+)$.

Теорема 13 [H20]. $\Big(w(t) = \exp(at^\alpha),\ 0 < \alpha < 1/2\Big) \Rightarrow \Big(P_w(\boldsymbol{R}_+) = C_w^0(\boldsymbol{R}_+)\Big)$.

Перейдем теперь к изложению наших результатов по полноте многочленов в весовом пространстве непрерывных на двух параллельных прямых функций. Так как полнота полиномов инвариантна относительно линейного преобразования, то без нарушения общности можно предположить, что этими прямыми являются прямые $\mathrm{Im} z = \pm\pi/2$ плоскости z. Совокупность этих прямых обозначим через E. Далее сохраняются обозначения $C_w(E)$, $P_w(E)$, $\mathcal{M}_w(E)$, $\tilde{w}(z)$, введенные ранее.

М.М. Джрбашян [3] доказал, что если $w(t)$ — нормально возрастающая функция, то

$$\Big(P_w(E) = C_w(E)\Big) \Leftrightarrow \Big(\int\limits_1^\infty e^{-r}\log w(r)dr = \infty\Big). \tag{18}$$

Покажем, что в общем случае справедлив следующий интегральный критерий:

Теорема 14 [H21]. *Для того чтобы $P_w(E) = C_w(E)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln\tilde{w}\left(\xi - i\frac{\pi}{2}\right)\frac{d\xi}{\mathrm{ch}\xi} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln\tilde{w}\left(\xi + i\frac{\pi}{2}\right)\frac{d\xi}{\mathrm{ch}\xi} = +\infty\,. \tag{19}$$

Из этой теоремы следует критерий полноты типа Полларда:

Теорема 15 [H21]. *Пусть весовая функция $w(t)$ непрерывна на E. Тогда для того, чтобы $P_w(E) = C_w(E)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln\left[w\left(\xi + i\frac{\pi}{2}\right)w\left(\xi - i\frac{\pi}{2}\right)\right]\frac{d\xi}{\mathrm{ch}\xi} = +\infty; \tag{20}$$

2. существует последовательность полиномов $P_n(t)$, нормы которых равномерно ограничены, которая сходится к $w(t)$ поточечно на E, т.е.

$$||P_n(t)|| \le M,\ n = 1, 2, \ldots; \quad \lim_{n\to+\infty} P_n(t) = w(t), \quad t \in E. \tag{21}$$

Пусть теперь полиномы не составляют плотного множества в $C_w(E)$: $P_w(E) \ne C_w(E)$. Тогда возможны два случая:

а) $\tilde{w}(z) < +\infty$, $z \in \boldsymbol{C}$, и

б) $\tilde{w}(z) = +\infty$, $|\mathrm{Im} z| < \pi/2$; $\tilde{w}(z) < +\infty$, $|\mathrm{Im} z| > \pi/2$.

Случай а) эквивалентен сходимости интегралов

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln\tilde{w}(\xi \pm i\frac{\pi}{2})\frac{d\xi}{1+\xi^2}, \tag{22}$$

и описание $P_w(E)$ дается утверждением:

Теорема 16 [H21]. *Пусть интегралы* (22) *сходятся. Тогда* $P_w(E)$ *совпадает с множеством целых функций* $f \in C_w(E)$ *порядка* 1 *и минимального типа, удовлетворяющих условию*

$$|f(z)| \le C_f \tilde{w}(z), \quad z \in \boldsymbol{C}\,. \tag{23}$$

Этой теореме можно придать другую форму. Для этого введем обозначения: $C_w^0(E)$ — множество целых функций $f(t)$ порядка 1 и минимального типа, входящих в пространство $C_w(E)$; $\mathcal{N}_w^0(E)$ — множество целых функций нулевой степени, удовлетворяющих условиям

$$\lim_{E \ni t \to \infty} t^{-1} w^{-1}(t) f(t) = 0, \quad \left\| t^{-1} f(t) \right\| \le 1\,. \tag{24}$$

Положим также

$$\tilde{w}_1(z) = \tilde{w}_1(z, E) = \sup \left\{ |f(z)| : f \in \mathcal{N}_w^0 \right\}. \tag{25}$$

Теорема 16'. $\Big(P_w(E) = C_w(E)\Big) \Leftrightarrow \Big(\tilde{w}(z) \equiv \tilde{w}_1(z), \quad z \bar{\in} E\Big)$.

В случае б): $\tilde{w}(z) = +\infty$, $|\mathrm{Im} z| < \pi/2$; $w(z) = +\infty$, $|\mathrm{Im} z| > \pi/2$, который характеризуется также условиями

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln \tilde{w} \left(\xi \pm i \frac{\pi}{2} \right) \frac{d\xi}{1 + \xi^2} \;\; = \;\; +\infty; \tag{26}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln \left[\tilde{w} \left(\xi - i \frac{\pi}{2} \right) \tilde{w} \left(\xi + i \frac{\pi}{2} \right) \right] \frac{d\xi}{\mathrm{ch} \xi} \;\; < \;\; +\infty, \tag{27}$$

имеет место

Теорема 17 [H21]. *Пусть* $P_w(E)$ *не совпадает с* $C_w(E)$, *и пусть выполняются условия* (26), (27). *Тогда* $P_w(E)$ *совпадает с множеством функций* $f(t)$, *которые являются граничными функциями аналитических в полосе* $|\mathrm{Im} z| < \pi/2$ *функций* $f(z)$, *удовлетворяющих условию*

$$|f(z)| < C_f \tilde{w}(z), \quad |\mathrm{Im} z| < \pi/2. \tag{28}$$

Этой теореме также можно придать другую форму. С этой целью обозначим через $C_w^*(E)$ множество функций $f(t) \in C_w(E)$, являющихся граничными функциями аналитических в полосе $|\mathrm{Im} z| < \pi/2$ функций $f(z)$, а через $\mathcal{N}_w^*(E)$ — множество аналитических в полосе $|\mathrm{Im} z| < \pi/2$ функций $f(z)$, граничные значения $f(t)$ которых непрерывны и удовлетворяют условиям

$$\lim_{E\ni t\to\infty}\frac{f(t)}{tw(t)}=0,\quad \left\|\frac{f(t)}{t}\right\|\le 1\,, \tag{29}$$

и пусть

$$\tilde w_1(z)=\tilde w_1(z,E)=\sup_{f\in\mathcal N_w^*(E)}|f(z)|\,. \tag{30}$$

Теорема 17'. $\Big(P_w(E)=C_w^*(E)\Big)\Leftrightarrow\Big(w(z)\equiv\tilde w_1(z),\quad |\mathrm{Im}z|<\pi/2\Big)\,.$

Далее приведем один результат по задаче Т. Холла, тесно связанной с весовыми приближениями. Эта задача состоит в следующем.

Пусть на комплексной плоскости задано счетное точечное множество $E=\{z_n\}$ и на этом множестве определена произвольная функция $w(z_n)=A_n\ge 1$ такая, что $\lim[|z_n|^k/w(z_n)]=0,\ k=0,1,2,\ldots$. Рассмотрим семейство $\mathcal M_w$ всех полиномов $P(z)$, которые на множестве $\{z_n\}$ мажорируются функцией $w(z_n)$, т.е.

$$|P(z)|\le A_n,\quad n=1,2,\ldots\,. \tag{31}$$

Обозначим

$$\tilde w(z)=\sup\{|P(z)|:P\in\mathcal M_w\}\,. \tag{32}$$

Ставится вопрос: при каких условиях для данной точки $z\bar\in E$ имеет место равенство $w(z)=+\infty$? Т. Холл [6] показал, что в каждой компоненте дополнения к замыканию $\bar E$ множества E либо $\tilde w(z)=+\infty$, либо $\ln\tilde w(z)$ — непрерывная субгармоническая функция. При некоторых предположениях относительно расположения множества E на плоскости Холл указал достаточные условия для тождества $w(z)=+\infty$, $z\bar\in E$. Мы также приводим одно достаточое условие:

Теорема 18 [H11]. *Пусть множество E удовлетворяет условиям: $\lim|z_n|=+\infty$, и существует последовательность концентрических колец $\Big\{z:||z|-r_k|\le\delta\Big\}$, $r_k\uparrow\infty$, $\delta>0$, не содержащих точек множества E.*

Пусть на множестве E определена нормально возрастающая функция $w(z)$:

$$w(z)=w(|z|)=\exp P(r)=\exp\int_1^r\frac{\omega(t)}{t}dt,\quad \omega(t)\uparrow+\infty,\quad r=|z|. \tag{33}$$

Пусть, далее, $n(t)$ означает число точек z_n, попадающих в круг $|z|\le t$, и

$$N(r) := \int_1^r \frac{n(t)}{t} dt \,. \tag{34}$$

Тогда условие

$$\lim_{r \to +\infty} [N(r) - P(r) + 2 \ln r] = -\infty \tag{35}$$

влечет

$$w(z) = +\infty, \quad z \bar{\in} E \,. \tag{36}$$

Следствие . *Если $n(t) \leq (1 - \varepsilon)\omega(t)$, $\varepsilon > 0$, то $\tilde{w}(z) = +\infty$, $z \bar{\in} E$.*

Следующая теорема дает представление о точности этого следствия и самой теоремы 18.

Теорема 19 [Н11]. *Пусть заданная функция $\varphi(r)$ имеет вид*

$$\varphi(r) = \exp \left[1 + \int_1^r \frac{\omega(t)}{t} dt \right] = \exp r^{\rho(r)}, \tag{37}$$

где $\rho(r)$ — некоторый уточненный порядок, $\lim\limits_{r \to +\infty} \rho(r) = \rho > 0$.

Тогда для данного ε можно построить такое дискретное множество $E = \{z_n\}$, удовлетворяющее условиям теоремы 18, что выполняется

$$n(r) < (1 + \varepsilon)\omega(t), \quad r > r_0 \,, \tag{38}$$

однако $\tilde{w}(z) < +\infty$ во всей плоскости.

Далее рассмотрим семейство полиномов $P(z)$, мажорирующихся на вещественной оси $\boldsymbol{R}$ и на данном дискретном множестве $\{z_n\}$ функцией $w(x)$ и значениями $w(|z_n|)$, т.е.

$$|P(x)| \leq w(x), \quad x \in \boldsymbol{R}, \quad |P(z_n)| \leq |w(z_n)|. \tag{39}$$

Предполагаем, что $\lim |z_n| = +\infty$, а плотность множества точек $\{z_n\}$, лежащих в верхней (нижней) полуплоскости, характеризуем (следуя Б.Я. Левину и М. Цудзи) функцией $\nu_1(t) \Big(\nu_2(t)\Big)$ — числом точек z_n, $\mathrm{Im} z_n > 0$ ($\mathrm{Im} z_n < 0$), попадающих в область

$$\left| z - \frac{it}{2} \right| \leq \frac{t}{2} \quad \left(\left| z + \frac{it}{2} \right| \leq \frac{t}{2} \right) \quad |z| \geq 1 \,. \tag{40}$$

Теорема 20 [H11]. *Предположим, что существуют последовательность луночек*

$$L_{r_n,\delta}=\left\{z:\left|z-i\frac{r_n+\delta}{2}\right|\le\frac{r_n+\delta}{2},\ \left|z-i\frac{r_n-\delta}{2}\right|\ge\frac{r_n-\delta}{2}\right\},$$
$$r_n\uparrow\infty,\ \ \delta>0\,, \tag{41}$$

в верхней полуплоскости и аналогичная последовательность луночек в нижней полуплоскости, не содержащих точек z_n.

Если функция $w(z)$ нормально возрастающая, то из (39) *и из условий*

$$\lim_{r\to+\infty}\left[\int_1^r\frac{\nu_k(t)}{t^2}dt-\frac{1}{2\pi}\int_{\arcsin 1/r}^{\pi-\arcsin 1/r}P(r\sin\theta)\frac{d\theta}{r\sin^2\theta}\right]=-\infty,\ \ k=1,2\,, \tag{42}$$

следует тождество $\tilde w(z)\equiv+\infty,\ z\bar{\in}\boldsymbol{R}\cup\{z_n\}$.

2. Весовые приближения линейными комбинациями функций типа Миттаг–Леффлера

Функция типа Миттаг–Леффлера определяется разложением

$$E_\rho(z;\mu)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu+k\rho^{-1})}\qquad(\rho>0) \tag{43}$$

и является целой функцией порядка ρ при любом значении параметра μ. Из асимптотических формул для функции $E_\rho(z;\mu)$

$$\begin{aligned}E_\rho(z;\mu)&=\rho z^{\rho(1-\mu)}\exp(z^\rho)+O\left(\frac{1}{|z|}\right),\quad|\arg z|\le\frac{\pi}{2\rho},\ |z|\to+\infty,\\ E_\rho(z;\mu)&=O\left(\frac{1}{|z|}\right),\quad|\arg z|>\frac{\pi}{2\rho},\ |z|\to+\infty,\end{aligned} \tag{44}$$

следует, что при $\mu\ge1$

$$\sup_{t\in L_\rho}|E_\rho(t;\mu)|<+\infty. \tag{45}$$

Поэтому при любом $\mu\ge1$ и $u\ge0$ имеем

$$E_\rho(ut;\mu)\in C_w(L_\rho). \tag{46}$$

Обозначим через $\Gamma_w(L_\rho)$ замыкание линейной оболочки системы $\{E_\rho(ut;\mu):u\ge0\}$ и поставим задачу описания этого замыкания.

Теорема 21 [Н12] *Для того чтобы $\Gamma_w(L_\rho) = C_w(L_\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы расходился интеграл*

$$\int\limits_{L_\rho} \ln w(t) \frac{|t|^{\rho^*-1}|dt|}{1+|t|^{2\rho^*}}\,. \tag{47}$$

В дальнейшем предполагается, что функция $w(t)$ непрерывна на L_ρ. В этом случае теорема 21 принимает вид

$$\Big(\Gamma_w(L_\rho) = C_w(L_\rho)\Big) \Leftrightarrow \Big(I(w, L_\rho, \rho^*) = +\infty\Big). \tag{48}$$

Предположим теперь, что $I(w, L_\rho, \rho^*) < +\infty$. Тогда $\Gamma_w(L_\rho) \neq C_w(L_\rho)$, и возникает вопрос об описании $\Gamma_w(L_\rho)$. С этой целью обозначим

$$u(z) = \int\limits_{L_\rho} \ln w(t) \frac{\partial G(t;z)}{\partial n}|dt|, \quad z \in \Delta^*(\rho), \tag{49}$$

где $G(t;z)$ — функция Грина задачи Дирихле для области $\Delta^*(\rho)$, и рассмотрим функцию

$$H(z) = \exp\left(-u(z) - iv(z)\right), \quad z \in \Delta^*(\rho)\,, \tag{50}$$

где $v(z)$ — гармонически сопряженная с $u(z)$ функция.

Описание $\Gamma_w(L_\rho)$ дает следующая теорема.

Теорема 22 [Н12]. *Для того чтобы $f \in \Gamma_w(L_\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(t)$ являлась граничной функцией голоморфной в $\Delta^*(\rho)$ функции $f(z)$, удовлетворяющей условию*

$$|f(z)H(z)| \le C_f, \quad z \in \Delta^*(\rho). \tag{51}$$

Рассмотрим теперь вопрос об условиях полноты в $C_w(L_\rho)$ системы

$$\{E_\rho(ut;\mu) :\ 0 \le u \le a\}\,, \tag{52}$$

или, что то же самое, системы

$$P(t) = \int\limits_0^a E_\rho(ut;\mu)d\sigma(t), \tag{53}$$

где a — данное положительное число.

Обозначим через $\mathcal{M}_w$ множество функций $P(z)$, удовлетворяющих условию

$$\left\|\frac{P(t)}{t+1}\right\| \le 1\,, \tag{54}$$

и положим

$$\tilde{w}(z) = \sup\left\{|P(z)| :\ P \in \mathcal{M}_w\right\}\,. \tag{55}$$

Тогда справедлива

Теорема 23 [H13]. *Для полноты системы* $\{E_\rho(ut;\mu)\}$ $(0 \le u \le a)$ *в* $C_w(L_\rho)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\tilde{w}(z) \equiv +\infty, \quad z \bar{\in} L_\rho. \tag{56}$$

Эта теорема является аналогом теоремы С.Н. Мергеляна. Отметим, однако, что доказательство С.Н. Мергеляна в нашем случае не проходит вследствие специфики аппроксимирующих функций. В доказательстве С.Н. Мергеляна существенными являются два момента, связанные со следующими свойствами алгебраических полиномов:

(А) если $P(z)$ — полином, то $(z - z_0)P(z)$ также является полиномом;

(Б) для произвольного полинома $P(t)$ функция

$$\frac{P(t) - P(z_0)}{t - z_0}$$

также является полиномом.

Рассматриваемая здесь система не обладает этими свойствами.

Теорему 23 можно сформулировать также в других терминах. С этой целью обозначим через $A(z)$, $z \bar{\in} L_\rho$, множество функций

$$P(t) = \int_0^a E_\rho(ut;\mu)d\sigma(u) \tag{57}$$

таких, что $P(z) = 1$.

Теорема 24 [H13]. *Для того чтобы множество* $\{P(t)\}$ *было плотно в* $C_w(L_\rho)$, *необходимо и достаточно, чтобы для двух точек* $z_1 \in \Delta(\rho)$ *и* $z_2 \in \Delta^*(\rho)$ *выполнялись условия*

$$\inf\left\{||(t - z_j)^{-1}P(t)|| : \ P \in A(z_j)\right\} = 0, \quad j = 1, 2. \tag{58}$$

Далее рассмотрим вопрос о полноте в $C_w(L_\rho)$ системы

$$\{E_\rho(ut;\mu) : \ 0 \le u \le \sigma, \quad 1/2 < \mu < 1/2 + 1/\rho\}. \tag{59}$$

Кроме условия $\lim w(t) = +\infty$, предположим еще, что

$$\lim_{L_\rho \ni t \to \infty} |t|^{\rho(1-\mu)} w^{-1}(t) = 0. \tag{60}$$

Обозначим через $\mathcal{M}_w$ множество целых функций $f(t)$ порядка ρ и типа $\le \sigma$ таких, что функция $(t-1)^{-1}f(t)$ ограничена в $\Delta^*(\rho)$ и $||(t-1)^{-1}f(t)|| \le 1$, и положим

$$\tilde{w}(z) = \sup\{|f(z)| : \ f \in \mathcal{M}_w\}. \tag{61}$$

Обозначим через $B^*_\sigma(L_\rho)$ совокупность всех целых функций не выше порядка ρ и типа σ, ограниченных в области $\Delta^*(\rho)$.

Теорема 25 [H19]. *Для того, чтобы замыкание $B_\sigma^*(L_\rho)$ совпадало со всем пространством $C_w(L_\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\tilde{w}(z) = +\infty, \quad z\bar{\in}L_\rho. \tag{62}$$

Теорема 26 [H19]. *Для того, чтобы замыкание $B_\sigma^*(L_\rho)$ совпадало со всем пространством $C_w(L_\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_{L_\rho} \frac{\ln \tilde{w}(t)}{1+|t|^{\rho+1}}|dt| = +\infty\,. \tag{63}$$

Перейдем к изложению результатов, посвященных описанию замыкания неполных систем функций типа Миттаг–Леффлера.

Известную теорему Мюнца–Саса о полноте системы $\{t^{\mu_k}\}$ ($\mathrm{Re}\mu_k > -1/2$) в $L_2(0,1)$ с помощью замены переменной $t = e^{-x}$ можно сформулировать в такой форме:

Теорема D. *Для полноты системы $\{e^{-\lambda_k x}\}_1^\infty$ ($\mathrm{Re}\lambda_k > 0$) в $L_2(0,+\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы расходился ряд*

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\mathrm{Re}\lambda_k}{1+|\lambda_k|^2}. \tag{64}$$

Если ряд (64) сходится, то система $\{e^{-\lambda_k x}\}$ неполна в $L_2(0,+\infty)$ и, следовательно, не каждая функция из $L_2(0,+\infty)$ может быть аппроксимирована полиномами Дирихле $\sum_{k=1}^n a_k^{(n)}\exp(-\lambda_k x)$. Л. Шварц в 1959 г. дал полное описание замыкания линейной оболочки системы $\{\exp(-\lambda_k x)\}$ ($\lambda_k \in \mathbf{R}$), когда она неполна в $L_2(0,+\infty)$. Оказывается, что тогда любая функция, принадлежащая замыканию линейной оболочки рассматриваемой системы, должна быть аналитической на $(0,+\infty)$, аналитически продолжаться в правую полуплоскость и допускать разложение Дирихле, нормально сходящееся в любой угловой области с раствором $< \pi$, замыкание которой лежит в правой полуплоскости. Верно также обратное утверждение.

М.М. Джрбашян[1] рассмотрел более общий случай, когда числа λ_k — комплексные, причем с произвольной кратностью. В случае кратного λ_k М.М. Джрбашян ввел в рассмотрение систему $\{x^{S_k-1}\exp(-\lambda_k x)\}$, где $S_k \geq 1$ означает кратность числа λ_k среди совокупности $\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k,\ldots\}$.

М.М. Джрбашян также дал полное описание замыкания линейной оболочки системы $\{x^{S_k-1}\exp(-\lambda_k x)\}$ в случае, когда она неполна в $L_2(0,+\infty)$. Это описание дается в терминах, отличных от использованных Л. Шварцем, но

[1]См. Докл. АН СССР (1961), т. 141, с. 539–542. (Примечание редактора.)

также естественных, и связанных с преобразованием Фурье и классами Харди. Оказывается, что тогда любая функция, принадлежащая замыканию линейной оболочки системы $\{x^{S_k-1}\exp(-\lambda_k x)\}$, является преобразованием Фурье сужения на мнимую ось мероморфной во всей плоскости функции, которая принадлежит классу $H_2^{(+)}$ Харди в правой полуплоскости и которая после умножения на соответствующее произведение Бляшке принадлежит классу $H_2^{(-)}$ Харди в левой полуплоскости. Верно также обратное.

М.М. Джрбашян [8] исследовал также вопрос о полноте системы функций типа Миттаг–Леффлера. Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел из угловой области $\Delta(\alpha) : \lambda_k \in \Delta(\alpha)$, $k = 1, 2, \ldots$, а S_k имеет вышеприведенный смысл. Для данного $\omega \in]-1, 1[$ обозначим через $L_{2,\omega}(0,\infty)$ множество измеримых на $(0,+\infty)$ функций $f(x)$, для которых

$$\int\limits_0^\infty |f(x)|^2 x^\omega dx < +\infty. \tag{65}$$

Далее обозначим $\rho = \alpha^* = \frac{\alpha}{2\alpha-1}$, $\mu = \frac{1+\omega+\rho}{2\rho}$ и рассмотрим систему функций

$$\left\{E_\rho^{(S_k-1)}(-\lambda_k x;\mu)x^{S_k-1}\right\}_1^\infty . \tag{66}$$

Следующая теорема М.М. Джрбашяна является обобщением теоремы Мюнца–Саса.

Теорема E. *Для полноты системы* (66) *в пространстве* $L_{2,\omega}(0,+\infty)$ *необходимо и достаточно, чтобы расходился ряд*

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\mathrm{Re}\lambda_k^\alpha}{1+|\lambda_k|^{2\alpha}}. \tag{67}$$

Если ряд (67) сходится, то система (66) неполна в $L_{2,\omega}(0,+\infty)$ и, следовательно, порождает некоторое подпространство, не совпадающее с $L_{2,\omega}(0,+\infty)$. Возникает вопрос об описании этого подпространства.

Наш метод исследования отличается от метода исследования Л. Шварца и от метода М.М. Джрбашяна. С помощью одной леммы задача описания замыкания линейной оболочки системы (66) сводится к задаче описания замыкания системы рациональных функций в $L_{2,-\omega}(L_\rho)$. Система рациональных функций обладает свойством (Б) (см. с. 14), и мы показываем, как с помощью методов весовых приближений можно исследовать полноту системы рациональных функций с заданными полюсами в пространстве $C(L_\rho)$. Упомянутая лемма заключается в следующем.

Лемма 1. *Замыкание линейной оболочки системы* (66) *в* $L_{2,\omega}(0,+\infty)$ *состоит из тех и только тех функций* $f(t)$, *обобщенное преобразование Лапласа которых*

$$\hat{f}(\zeta)=\rho\zeta^{\mu\rho-1}\int\limits_0^\infty e^{-\zeta^\rho t^\rho}t^{\mu\rho-1}f(t)dt,\quad \zeta\in\Delta(\rho)\,, \tag{68}$$

принадлежит замыканию линейной оболочки системы

$$\left\{\frac{1}{(\zeta+\lambda_k)^{S_k}}\right\}_1^\infty \tag{69}$$

в $L_{2,-\omega}(L_\rho)$.

Через $H_2[\rho,w]$ обозначим класс фукций $F(z)$, голоморфных в угле $\Delta(\rho)$ и удовлетворяющих условию

$$\sup_{|\theta|<\pi/\rho}\left\{\int\limits_0^{+\infty}\left|F(re^{i\theta})\right|^2 r^\omega\,dr\right\}<+\infty\,.$$

Описание замыкания линейной оболочки системы (66) в случае ее неполноты в $L_{2,\omega}(0,+\infty)$ имеет такой вид

Теорема 27 [H14]. *Если ряд* (67) *сходится, то замыкание линейной оболочки системы* (66) *совпадает с множеством функций* $f(t)$, *допускающих представление*

$$f(t)=\lim_{\sigma\to+\infty}\frac{\rho}{2\pi i}t^{\rho(1-\mu)}\int\limits_{L_\rho^\sigma}e^{\zeta^\rho t^\rho}\zeta^{\rho(1-\mu)}\Phi(\zeta)d\zeta, \tag{70}$$

где L_ρ^σ *— часть контура* L_ρ, *лежащая в круге* $|\zeta|\le\sigma$, $\Phi(\zeta)$ *— почти всюду на* L_ρ *совпадает, с одной стороны, с граничными значениями произвольной функции* $\Phi^+(z)\in H_2[\rho,-\omega]$ *и, с другой стороны, с граничными значениями мероморфной в области* $|\arg(-z)|<\pi/2\alpha$ *функции* $\Phi^-(z)$ *с возможными полюсами в точках* $z=-\lambda_k$ *и такой, что* $\Phi^-(z)B_\alpha(z)\in H_2[\alpha,-\omega]$, $B_\alpha(z)$ *— произведение типа Бляшке для области* $\Delta(\alpha)$ *с нулями в точках* $z=-\lambda_k$:

$$B_\alpha(z)=\prod_{k=1}^\infty\frac{z^\alpha-\lambda_k^\alpha}{z^\alpha+\bar{\lambda}_k^\alpha}\varepsilon_k,\quad \varepsilon_k=\frac{\left|1-\lambda_k^{2\alpha}\right|}{1-\lambda_k^{2\alpha}},\quad z\in\Delta(\alpha)\,, \tag{71}$$

и, наконец, предел в (70) *понимается в смысле*

$$\lim_{\sigma\to+\infty}\left\|f(t)-\frac{\rho}{2\pi i}t^{\rho(1-\mu)}\int\limits_{L_\rho^\sigma}e^{\zeta^\rho t^\rho}\zeta^{\rho(1-\mu)}\Phi(\zeta)d\zeta\right\|_{L_{2,\omega}(0,+\infty)}=0\,. \tag{72}$$

Нижеследующие теоремы дают описание замыкания линейной оболочки системы (66) при наличии дополнительных условий на последовательность $\{\lambda_k\}$. Они являются частичными обобщениями соответствующих результатов М.М. Джрбашяна.

Теорема 28 [H14]. *Пусть* $\lambda_k \in \Delta(\beta)$, $k = 1, 2, \ldots$ $(\beta > \alpha)$ *и пусть* $|\lambda_{k+1}|/|\lambda_k| \geq q > 1$. *Тогда замыкание линейной оболочки системы* (66) *в* $L_{2,\omega}(0, +\infty)$ *совпадает с множеством функций* $f(t)$, *допускающих представление*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{\rho_1}} E_\rho(t\tau; \mu)\Phi(\tau)d\tau\,, \tag{73}$$

где $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\alpha} = 2$, $\mu = \frac{1+\omega+\rho}{2\rho}$, L_{ρ_1} *— граница области* $\Delta(\rho_1)$, $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\beta} = 2$, $\Phi(\tau)$ *— всюду на* L_{ρ_1} *совпадает со значениями мероморфной на всей плоскости функции* $\Phi(z)$ *с возможными полюсами в точках* $-\lambda_k$, *такой что* $\Phi(z) \in H_2[\rho_1, -\omega]$, $\Phi(-z)B_\alpha(z) \in H_2[\beta, -\omega]$.

Теорема 29 [H14]. *Если* $\lambda_k \in \Delta(\beta)$ $(\beta > \alpha)$ *и* $|\lambda_{k+1}|/|\lambda_k| \geq q > 1$, *то любая функция* $f(t)$, *принадлежащая замыканию линейной оболочки системы* (66), *допускает аналитическое продолжение в угловую область* $\Delta(\kappa)$, *где* $\alpha^{-1} = \beta^{-1} + \kappa^{-1}$ *и, кроме того,*

$$\sup_{|\varphi|<\pi/2\kappa} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} \left| f\left(re^{i\varphi}\right)\right|^2 r^\omega dr \right\} \leq C(f, \beta) < +\infty\,. \tag{74}$$

Теорема 30 [H14]. *Пусть* $\lambda_k \in \Delta(\beta)$, $k = 1, 2, \ldots$ $(\beta > \alpha)$ *и*

$$\frac{|\lambda_{k+1}|}{|\lambda_k|} \geq q > 1,$$

тогда для каждой функции $f(t)$, *принадлежащей замыканию линейной оболочки системы* (66) *справедливо разложение*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k E_\rho(-\lambda_k z;\, \mu), \quad z \in \Delta(\kappa), \tag{75}$$

равномерно и абсолютно сходящееся в области $\Delta(\kappa_1)\backslash(|z| < \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0$, $\kappa_1 > \kappa)$.

3. Квазианалитические классы, связанные с весовыми приближениями в комплексной области

Здесь рассматриваются вопросы обычной квазианалитичности некоторых классов функций, представимых интегралами с ядрами Миттаг–Леффлера, а также вопросы "квазианалитичности по данному порядку" этих классов. Несколько слов об этом виде квазианалитичности.

Понятие "нуля бесконечного порядка" для суммируемых функций введено С. Мандельбройтом [9]. По С. Мандельбройту порядок корня суммируемой на $[a;b]$ функции $f(x)$ в точке x_0 характеризуется убыванием интеграла

$$\varphi(\alpha) = \int\limits_{x_0}^{x_0+\alpha} |f(x)|dx \tag{76}$$

при $\alpha \to 0$. Экспоненциальным (показательным) порядком корня x_0 справа называется число ρ, определяемое равенством

$$\overline{\lim}_{\alpha\to 0+} \frac{\ln(-\ln\varphi(\alpha))}{-\ln\alpha} = \rho > 0\,. \tag{77}$$

Аналогично определяется экспоненциальный порядок корня слева.

Если в некотором классе функций не существует отличной от нуля функции, имеющей корень экспоненциального порядка ρ или большего, то класс называется квазианалитическим порядка ρ. Основным результатом С. Мандельбройта является

Теорема F. *Пусть $f(x)$ — суммируемая на $[0, 2\pi]$ функция. Предположим, что x_0 $(0 \le x_0 \le 2\pi)$ является ее корнем справа (или слева) экспоненцильного порядка ρ. Пусть формальный ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_{n_k}\cos n_k x + b_{n_k}\sin n_k x) \tag{78}$$

и пусть показатель сходимости последовательности $\{n_k\}$ равен $\sigma < 1$. Тогда, если

$$\rho > \frac{\sigma}{1-\sigma}\,, \tag{79}$$

то $f(x) = 0$ почти всюду.

Эту теорему единственности можно рассматривать как теорему о квазианалитичности класса суммируемых на $[0, 2\pi]$ функций, ряды Фурье которых имеют вид (78). Теорема Мандельбройта утверждает, что этот класс квазианалитический порядка ρ, если $\rho > \sigma/(1-\sigma)$.

Н. Винер и С. Мандельбройт доказали, что эта теорема точна, т.е. при $\rho = \sigma/(1-\sigma)$ существует отличная от нуля функция вида (78), с показателем сходимости последовательности $\{n_k\}$, равным σ, и корнем экспоненциального порядка ρ.

Б.Я. Левин и М.С. Лившиц [10], характеризуя порядок корня непосредственно функцией $\varphi(\alpha)$ (которую они назвали интегральным порядком), значительно обобщили и усилили теорему С. Мандельбройта, связывая непосредственно функцию $\varphi(\alpha)$ и $N(t)$ — число отличных от нуля коэффициентов Фурье функции $f(x)$ с номерами, меньшими t. При этом не исключается случай $\sigma = 1$.

Далее Б.Я. Левиным [11][1] эта усиленная теорема была перенесена на классы почти периодических функций. Приведем этот результат.

Пусть $\psi(\alpha)$ — непрерывная неубывающая неотрицательная функция, причем $\psi(0) = 0$. Говорят, что функция $f(t)$ имеет в точке t_0 правый (левый) средний корень порядка не большего $\psi(\alpha)$, если

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+\alpha} |f(t)|dt \leq \psi(\alpha), \quad 0 < \alpha < \alpha_0. \tag{80}$$

Теорема G. *Пусть показатели Фурье почти периодической функции*

$$f(t) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{i\mu_k t} \tag{81}$$

входят в некоторую последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}$. Если эта функция имеет в некоторой точке t_0 односторонний средний корень порядка $\psi(\alpha)$ и

$$\liminf_{R\to+\infty} [\pi N_\lambda(R) - R\eta(R) - \ln R] = -\infty\,, \tag{82}$$

то $f(t) \equiv 0$ почти всюду.

Здесь введены обозначения: $n_\Lambda(t)$ — число точек λ_k, лежащих в интервале $(-t;t)$; $N_\Lambda(t) = \int_1^t \frac{n_\Lambda(u)}{u}du$, а $\alpha = \eta(r)$ — функция, обратная функции

$$r = -\frac{1}{\alpha}\ln\psi(\alpha).$$

Б.Я. Левин[2] ввел новые квазианалитические классы функций, представимых в виде $f(x) = \mathcal{F}\left[e^{ixt}\right]$, где $\mathcal{F}$ — произвольный линейный функционал, действующий в Ф-пространстве. Для весьма частного случая, когда Ф-пространство совпадает с весовым пространством $C_w(\boldsymbol{R})$, этот класс

[1] См. также Приложение II в монографии Б.Я. Левина "Распределение корней целых функций", ГИТТЛ, Москва (1956). (Примечание редактора.)

[2] См.: Зап. науч. сем. ЛОМИ (1989), т. 170, с. 102–156. (Примечание редактора.)

совпадает с классом функций $f(x)$, представимых в виде интеграла Фурье–Стильтьеса

$$f(x) = \mathcal{F}\left[e^{itx}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{d\sigma(t)}{w(t)} . \tag{83}$$

Здесь $\sigma(t)$ — произвольная функция ограниченной вариации на $\boldsymbol{R}$. Если $\mathcal{F}$ пробегает сопряженное пространство (т.е. берутся всевозможные $\sigma(t)$), то получается некоторый класс бесконечно дифференцируемых на $\boldsymbol{R}$ функций, который обозначим через $K_w(\boldsymbol{R})$.

Из формулы (83) и теоремы Хана–Банаха следует

Теорема H. *Для того чтобы класс $K_w(\boldsymbol{R})$ был квазианалитическим, необходимо и достаточно, чтобы система полиномов была полна в $C_w(\boldsymbol{R})$.*

Из теоремы о весовой полноте многочленов в $C_w(\boldsymbol{R})$ с помощью теоремы H может быть получена теорема Валле–Пуссена–С. Мандельбройта. Эта теорема касается следующей проблемы С. Мандельбройта.

Каковы необходимые и достаточные условия, которым должны быть подчинены числа $A_1, A_1, \dots, A_n \dots$ для того, чтобы всякая бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$, представимая рядом

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) , \tag{84}$$

была тождественно равна нулю, как только выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= 0, \quad n = 0, 1, \dots , \\ |a_n|, \, |b_n| &\le A_n, \quad n = 0, 1, \dots ? \end{aligned} \tag{85}$$

Эта проблема решена Валле–Пуссеном и С. Мандельбройтом в предположении некоторой регулярности убывания последовательности $\{A_n\}$. А именно, если

$$|a_n|, \, |b_n| < \exp\left(-p(n)\right) , \tag{86}$$

где $\exp\left(p(t)\right)$ — нормально возрастащая функция, то этим условием является расходимость интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{p(t)}{1+t^2} \, dt . \tag{87}$$

Укажем одно применение теоремы 18 к квазианалитическим классам.

Пусть интеграл (87) сходится. Тогда класс функций, представимых в виде

$$f(x) = \sum e^{-p(n)} \left[a_n \cos nx + b_n \sin nx\right] , \quad \sum \left(|a_n| + |b_n|\right) < +\infty , \tag{88}$$

не является квазианалитическим. Поставим вопрос о нахождении нетривиальных квазианалитических подклассов неквазианалитического класса (88). Ответ на этот вопрос, как обычно, дается в терминах плотности отличных от нуля коэффициентов a_n, b_n.

Зафиксируем произвольную последовательность целых чисел Λ: $0 \le n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ и рассмотрим следующий подкласс $K_w(\boldsymbol{R}; \Lambda)$ ($w(t) = \exp P(t)$) класса (88):

$$f(x) = \sum e^{-P(n_k)} \left[a_{n_k} \cos n_k x + b_{n_k} \sin n_k x\right]. \tag{89}$$

Из теоремы 18 и теоремы H непосредственно вытекает:

Теорема 31. *Если функция плотности $n_1(t)$ множества Λ удовлетворяет неравенству*

$$n_1(t) < (\frac{1}{2} - \varepsilon)\omega(t), \quad \varepsilon > 0, \tag{90}$$

то подкласс $K_w(\boldsymbol{R}; \Lambda)$ — квазианалитический.

Теперь приведем применения наших результатов о полноте полиномов на системе прямых к вопросам квазианалитичности. Здесь уже вместо классического интеграла Фурье естественно привлечь разработанный М.М. Джрбашяном аппарат гармонического анализа на комплексной плоскости. Тем самым устанавливается связь между полнотой системы полиномов или целых функций в весовых пространствах $C_w(L_\rho)$, с одной стороны, и различного рода квазианалитичностью некоторых классов бесконечно дифференцируемых функций — с другой.

Начнем со случая полуоси. Рассмотрим множество функций вида

$$f(u) = \mathcal{F}\left[\cos\sqrt{ut}\right] = \int_0^{+\infty} \cos\sqrt{ut}\,\frac{d\sigma(t)}{w(t)}, \tag{91}$$

где $\mathcal{F}$ — линейный функционал, действующий в $C_w(\boldsymbol{R}^+)$. Когда $\mathcal{F}$ пробегает сопряженное пространство, тогда формулой (91) определяется некоторый класс бесконечно дифференцируемых функций на $[0, +\infty)$. Этот класс обозначим через $K_w(\boldsymbol{R}_+)$.

Определение 1. *Класс $K_w(\boldsymbol{R}_+)$ назовем квазианалитическим, если из $f \in K_w(\boldsymbol{R}_+)$, $g \in K_w(\boldsymbol{R}_+)$, $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$, $n = 0, 1, \ldots$, следует, что $f(u) \equiv g(u)$, $u \in [0, +\infty[$.*

Теорема 32 [H18]. *Для квазианалитичности класса $K_w(\boldsymbol{R}_+)$ необходимо и достаточно, чтобы система $\{t^n\}_0^\infty$ была полна в $C_w(\boldsymbol{R}_+)$.*

В случае неквазианалитичности класса $K_w(\boldsymbol{R}_+)$ ставится вопрос о его квазианалитичности "по отношению к данному порядку".

Определение 2. *Пусть $\varphi(\alpha)$ — определенная в правосторонней окрестности нуля функция, такая, что $\lim\limits_{\alpha\to 0+} \alpha^{-n}\varphi(\alpha) = 0$, $n = 0, 1, \ldots$. Класс $K_w(\boldsymbol{R}_+)$ называется квазианалитическим по отношению к порядку $\varphi(\alpha)$, если из условий $f_0(u) \in K_w(\boldsymbol{R}_+)$ и*

$$\int\limits_0^{\alpha^2} |f_0(k)| \frac{du}{\sqrt{u}} \le \varphi(\alpha) \tag{92}$$

следует, что $f_0(u) \equiv 0$, $u \ge 0$.

Предположим, что $\beta = -\frac{1}{\alpha}\ln\varphi(\alpha) \uparrow +\infty$ при $\alpha \downarrow 0$. Обратную функцию обозначим через $\eta(\beta)$.

Теорема 33 [H18]. *Если множество E целых функций $\Phi(z)$ порядка $1/2$ и минимального типа, удовлетворяющих условию*

$$|\Phi(-x)| \le C_\Phi \cdot x^{-3/2} \exp\left(\sqrt{x}\eta(\sqrt{x})\right), \quad x \ge 1\,, \tag{93}$$

плотно в $C_w(\boldsymbol{R}_+)$, то класс $K_w(\boldsymbol{R}_+)$ квазианалитичен по отношению к порядку $\varphi(\alpha)$.

Мы строим пример весовой функции $w(t)$, $t \in \boldsymbol{R}_+$, и функции $\varphi(\alpha)$, такой, что класс (91) неквазианалитичен по определению 1, но является квазианалитическим по порядку $\varphi(\alpha)$.

Далее рассмотрим класс $K_{w,\rho}(\boldsymbol{R}_+)$ функций

$$f(u) = \mathcal{F}\left[E_\rho(-ut;1)\right] = \int\limits_0^\infty E_\rho(-ut;1)\frac{dG(t)}{w(t)}, \quad \rho > \frac{1}{2}\,, \tag{94}$$

определенных в замкнутой области $|\arg u| \le \pi(1-\frac{1}{2\rho})$ и аналитических в $|\arg u| < \pi(1-\frac{1}{2\rho})$, значения которых на границе $L = L_{\rho^*} : u = \pm\pi(1-\frac{1}{2\rho}) = \pm\frac{\pi}{2\rho^*}$ бесконечно дифференцируемы.

Квазианалитичность класса $K_{w,\rho}(\boldsymbol{R}_+)$ также эквивалентна полноте системы степеней в $C_w(\boldsymbol{R}_+)$.

Определение 3. *Класс $K_{w,\rho}(\boldsymbol{R}_+)$ называется квазианалитическим по отношению к порядку $\varphi(\alpha)$, если из условий $f_0(u) \in K_{w,\rho}(\boldsymbol{R}_+)$ и*

$$\int\limits_0^{\alpha^{1/\rho}} \left|f_0\left(re^{\pm i\pi(1-1/\rho)}\right)\right| r^{\rho-1} dr \le \varphi(\alpha) \tag{95}$$

следует, что $f_0(u) \equiv 0$, $|\arg u| < \pi(1-1/\rho)$.

Чтобы сформулировать аналог теоремы 33, обозначим через $A_\rho(\boldsymbol{R}_+)$ множество целых функций $\Phi(z)$, $t\Phi(t) \in C_w(\boldsymbol{R}_+)$, порядка ρ и минимального типа, удовлетворяющих условию

$$\left|\Phi\left(re^{\pm i\pi/2\rho}\right)\right| \leq C_\Phi \cdot r^{-\rho-1}\exp\left(r^\rho \eta(r^\rho)\right), \quad r \geq 1\,. \tag{96}$$

Теорема 34 [H18]. *Пусть $1/2 < \rho \leq 1$. Если множество $A_\rho(\boldsymbol{R}_+)$ плотно в $C_w(\boldsymbol{R}_+)$, то класс $K_{w,\rho}(\boldsymbol{R}_+)$ квазианалитичен по отношению к порядку $\varphi(\alpha)$.*

Мы приводим пример класса $K_{w,1}(\boldsymbol{R}_+)$ функций вида

$$f(u) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ut}\frac{d\sigma(t)}{w(t)}, \quad u \in i\boldsymbol{R}, \tag{97}$$

который не квазианалитичен в обычном смысле, но является квазианалитическим по отношению к порядку $\varphi(\alpha) = \exp(-c\alpha^{-1/(p-1)})$, где $p > 1$.

Теперь перейдем к рассмотрению классов бесконечно дифференцируемых функций, связанных с весовыми приближениями на всей оси. Для данного $\rho \geq 1$ рассмотрим класс $K_{w,\rho}(\boldsymbol{R})$ функций вида

$$f(u) = \mathcal{F}\left[E_\rho(-iut;1)\right] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} E_\rho(-iut;1)\frac{d\sigma(t)}{w(t)}, \tag{98}$$

где $\mathcal{F}$ — произвольный линейный функционал в $C_w(\boldsymbol{R})$. Каждая функция этого класса определена на объединении $\mathcal{D} = \Delta_1 \cup \Delta_2$, где

$$\Delta_1 = \left\{u : |\arg u| < \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho}\right)\right\}, \quad \Delta_2 = \left\{u : |\arg u - \pi| < \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho}\right)\right\}, \tag{99}$$

аналитична в областях Δ_1 и Δ_2 и бесконечно дифференцируема на $\partial\mathcal{D}$.

Квазианалитичность класса $K_{w,\rho}(\boldsymbol{R})$ тоже эквивалентна полноте системы степеней $\{t^n\}_0^\infty$ в $C_w(\boldsymbol{R})$.

Определение 4. *Класс $K_{w,\rho}(\boldsymbol{R})$ называется квазианалитическим по отношению к порядку $\varphi(\alpha)$, если из условий $f_0(u) \in K_{w,\rho}(\boldsymbol{R})$ и*

$$\int\limits_0^{\alpha^{1/\rho}} \left|f_0\left(re^{i\frac{\pi}{2}(1\pm 1/\rho)}\right)\right| r^{\rho-1}dr \leq \varphi(\alpha) \tag{100}$$

следует, что $f_0(u) \equiv 0$, $u \in \Delta_1 \cup \Delta_2$.

Обозначим через $A_\rho(\boldsymbol{R})$ множество целых функций $\Phi(z)$, $t\Phi(t) \in C_w(\boldsymbol{R})$, порядка ρ и минимального типа, удовлетворяющих условиям

$$|\Phi(z)| \le C_\Phi |z|^{-\rho-1} \exp\Big(|z|^\rho \eta(|z|^\rho)\Big), \quad |z| \ge 1, \quad |\arg z| = \frac{\pi}{2} \pm \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}\right), \tag{101}$$

где функция η определяется, как и выше.

Теорема 35. *Пусть $1 \le \rho \le 2$. Если множество $A_\rho(\boldsymbol{R})$ плотно в $C_w(\boldsymbol{R})$, то класс $K_{w,\rho}(\boldsymbol{R})$ квазианалитичен по отношению к порядку $\varphi(\alpha)$.*

Рассмотрим далее связь между полнотой системы полиномов и целых функций в $C_w(L_\rho)$ и квазианалитичностью некоторых классов бесконечно дифференцируемых функций.

Рассмотрим множество функций

$$f(u) = \mathcal{F}\left[E_\rho(-ut;\mu)\right] \quad (\rho > 1), \tag{102}$$

где $\mathcal{F}$ — произвольный линейный функционал в $C_w(L_\rho)$. Каждая функция $f(u)$ определена на объединении полуоси $(-\infty, 0]$, где она бесконечно дифференцируема, и угловой области $|\arg u| < \pi(1-\rho^{-1})$, где она голоморфна.

Обозначим через $K_w^{(-)}(L_\rho)$ класс функций

$$f(u) = \mathcal{F}\left[E_\rho(-ut;\mu)\right], \quad u \in]-\infty, 0], \tag{103}$$

определенных и бесконечно дифференцируемых на полуоси $(-\infty, 0]$, а через $K_w^{(+)}(L_\rho)$ — класс функций

$$f(u) = \mathcal{F}\left[E_\rho(-ut;\mu)\right], \quad |\arg u| < \pi(1 - 1/\rho), \tag{104}$$

голоморфных в области $\Delta(\alpha)$, $\alpha = \rho/(2(\rho-1))$.

Определение 5. *Класс $K_w^{(-)}(L_\rho)$ назовем квазианалитическим, если из условий $f \in K_w^{(-)}(L_\rho)$, $g \in K_w^{(-)}(L_\rho)$, $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$, $n = 0, 1, \ldots$ следует, что $f(u) \equiv g(u)$, $u \in (-\infty, 0]$.*

Аналогично определяется квазианалитичность класса $K_w^{(+)}(L_\rho)$.

Теорема 36. *Для того чтобы класс $K_w^{(-)}(L_\rho)$ был квазианалитическим, необходимо и достаточно, чтобы система степеней $\{t^n\}_0^\infty$ была полна в $C_w(L_\rho)$.*

Эту теорему целесообразно сформулировать в следующем виде

Теорема 36'. *Для того чтобы класс $K_w^{(-)}(L_\rho)$ был квазианалитическим, необходимо и достаточно, чтобы расходился интеграл*

$$I(\tilde{w}, L_\rho, \rho) = \int\limits_{L_\rho} \frac{\ln \tilde{w}(t)}{1+|t|^{1+\rho}} |dt|. \tag{105}$$

Теорема 37. *Для того чтобы класс $K_w^{(+)}(L_\rho)$, $\rho > 1$, был квазианалитическим, необходимо и достаточно, чтобы расходился интеграл*

$$I(\tilde{w}, L_\rho, \rho^*) = \int\limits_{L_\rho} \frac{\ln \tilde{w}(t)}{1+|t|^{1+\rho^*}} |dt|. \tag{106}$$

Предположим теперь, что $I(\tilde{w}, L_\rho, \rho) < +\infty$, $I(\tilde{w}, L_\rho, \rho^*) = +\infty$. Тогда класс $K_w^{(-)}(L_\rho)$ не будет квазианалитическим.

Следующая теорема дает ответ на вопрос: при каких условиях класс $K_w^{(-)}(L_\rho)$ будет квазианалитическим по отношению к данному порядку. Для простоты рассматривается только случай $\mu = 1$.

Определение 6. *Класс $K_w^{(-)}(L_\rho)$ назовем квазианалитическим по отношению к порядку $\varphi(\alpha)$, если из условий $f(u) \in K_w^{(-)}(L_\rho)$ и*

$$\int\limits_0^{\alpha^{1/\rho}} |f(-u)| u^{\rho-1} du \leq \varphi(\alpha) \tag{107}$$

следует, что $f(u) \equiv 0$, $u < 0$.

Обозначим через $A_{2\rho}(L_\rho)$ множество целых функций $\Phi(z)$ порядка 2ρ и минимального типа, $\Phi(t) \in C_w(L_\rho)$, удовлетворяющих условию

$$|\Phi(x)| \leq C_\Phi x^{-\rho} \exp\left(x^\rho \eta(x^\rho)\right), \quad x \geq 1. \tag{108}$$

Теорема 38. *Пусть $I(\tilde{w}, L_\rho, \rho^*) = +\infty$. Тогда если множество $A_{2\rho}(L_\rho)$ плотно в $C_w(L_\rho)$, то класс $K_w^{(-)}(L_\rho)$ квазианалитичен по отношению к порядку $\varphi(\alpha)$.*

Список литературы

[1] *S. Bernstein*, Le probléme de l'approximation des fonctions continues sur tout l'axe réel et l'une de ses applications. — Bull. Soc. Math. France (1924), v. 52, p. 399–410.

[2] *А.Л. Шагинян*, О полноте семейства аналитических функций в комплексной области. — Сообщения Ин-та мат. и мех. АН АрмССР (1947), т. 1, с. 3–59.

[3] *М.М. Джрбашян*, Некоторые вопросы теории взвешенно-полиномиальных приближений в комплексной области. — Мат. сб. (1955), т. 36, № 3, с. 353–440.

[4] *С.Н. Мергелян*, Весовые приближения многочленами. — Успехи мат. наук (1956), т. 11, № 5, с. 107–152.

[5] *N. Levinson and H.P. McKean*, Weighted trigonometrical approximation on $\mathbf{R}^1$ with application to the germ field of a stationary Gaussian noise. — Acta Math. (1964), v. 112, No. 1-2, p. 99–143.

[6] *T. Hall*, On polynomials bounded at an infinity points. — Thesis. Uppsala (1950).

[7] *Н.И. Ахиезер*, О взвешенном приближении непрерывных функций многочленами на всей числовой оси. — Успехи мат. наук (1956), т. 11, № 4, с. 3–43.

[8] *М.М. Джрбашян*, О замыкании систем функций типа Миттаг–Леффлера. — Докл. АН СССР (1974), т. 219, № 6, с. 1302–1305.

[9] *С. Мандельбройт*, Квазианалитические классы функций. ОНТИ, Москва (1937).

[10] *Б.Я. Левин, М.С. Лившиц*, О квазианалитических классах функций, представленных рядами Фурье. — Мат. сб. (1941), т. 9, с. 693–710.

[11] *Б.Я. Левин*, О квазианалитических классах почти периодических функций. — Докл. АН СССР (1950), т. 70, № 6, с. 949–952.

СПИСОК НАУЧНЫХ РАБОТ И.О. ХАЧАТРЯНА

[H1] О параметрическом представлении и о некоторых экстремальных свойствах целых функций многих переменных. — *Изв. АН АрмССР. Физ.-мат., естеств. и техн. науки* (1956), т. 9, № 9, с. 3–14.
[H2] (Совм. с М.М. Джрбашяном) О полноте системы функций $\{z^{\lambda_n}\}$ в комплексной области при взвешенно-квадратичной аппроксимации. — *Докл. АН СССР* (1956), т. 110, № 6, с. 914–917.
[H3] (Совм. с А.А. Талаляном) К обратной задаче теории наилучших приближений. — *Изв. АН АрмССР.* Сер. физ.-мат. наук (1958), т. 11, № 2, с. 83–87.
[H4] О взвешенном приближении целых функций нулевой степени многочленами на действительной оси. — *Докл. АН СССР* (1962), т. 145, № 4, с. 744–747.

[H5] О взвешенном приближении целых функций нулевой степени многочленами на действительной оси. — *Зап. мех.-мат. фак-та Харьковского гос. ун-та и Харьковского мат. о-ва. Сер. 4* (1963), т. 29, с. 129–142.
[H6] (Совм. с Б.Я. Левиным) Об обобщении одной теоремы Винера–Пэли для функций произвольного целого порядка и нормального типа в полуплоскости. — *Докл. АН АрмССР* (1965), т. 41, № 1, с. 3–9.
[H7] Представление мероморфных функций бесконечного порядка в полуплоскости. — *Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук* (1965), т. 18, № 2, с. 15–25.
[H8] *Некоторые вопросы взвешенных приближений и представления мероморфных функций в полуплоскости.* Дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. Ростовский гос. ун-т (1965), 75 с.
[H9] (Совм. с А.Б. Нерсесяном и А.В. Петросяном) Математика. В кн.: *Академия Наук АрмССР за 25 лет*, Ереван (1968).
[H10] О взвешенно-равномерном приближении непрерывных функций полиномами на двух лучах. — *Изв. АН АрмССР, Мат.* (1968), т. 3, № 4–5, с. 301–325.
[H11] О весовой полноте многочленов. — *Изв. АН АрмССР, Мат.* (1969), т. 4, № 6, с. 399–410.
[H12] О замыкании семейств функций типа Миттаг–Леффлера при взвешенно-равномерном приближении в комплексной области. — *Изв. АН АрмССР. Мат.* (1975), т. 10, № 4, с. 375–384.
[H13] О полноте семейств функций типа Миттаг–Леффлера при взвешенно-равномерном приближении в комплексной области. — *Мат. заметки* (1975), т. 18, № 5, с. 675–685.
[H14] (Совм. с С.А. Акопяном) О замыкании незамкнутых систем функций типа Миттаг–Леффлера. — *Изв. АН СССР. Сер. мат.* (1976), т. 40, № 1, с. 96–114.
[H15] (Совм. с А.Е. Аветисяном, С.А. Акопяном, Н.У. Аракеляном, В.С. Захаряном, А.Б. Нерсесяном, И.С. Саргсяном) Мхитар Мкртичевич Джрбашян (к 60-летию со дня рождения). — *Изв. АН АрмССР. Мат.* (1978), т. 13, № 5–6, с. 359–368.
[H16] (Совм. с А.Е. Аветисяном и С.А. Акопяном) О замкнутости систем функций Миттаг–Леффлера на произвольной конечной системе лучей. — *Изв. АН АрмССР. Мат.* (1978), т. 13, № 5–6, с. 389–395.
[H17] Квазианалитические классы, связанные с весовыми приближениями в комплексной области. — *Изв. АН АрмССР. Мат.* (1986), т. 21, № 6, с. 557–565.
[H18] (Совм. с С.А. Акопяном) Квазианалитические классы функций, представимых интегралами с ядрами Миттаг–Леффлера. — *Изв. АН АрмССР. Мат.* (1988), т. 23, № 3, с. 199–215.
[H19] (Совм. с Б.Я. Левиным) О замыкании систем функций типа Миттаг–

Леффлера при взвешенно-равномерной аппроксимации в комплексной области. — *Изв. АН АрмССР. Мат.* (1989), т. 24, № 4, с. 355–363.
[H20] On the completeness of polynomials in a weighted space of entire functions. — *Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii. Mat.* (1993), v. 28, No. 4, p. 52–64.
[H21] On the closure of a system of polynomials in a weighted space. — *Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii. Mat.* (1996), v. 31, p. 48–59.
[H22] О полноте системы функций $\{z^{\lambda_n}\}$ при взвешенно-равномерной аппроксимации на кривых на комплексной плоскости (рукопись).

Weighted approximation by polynomials and entire functions

I.O. Khachatrian

The paper contains a survey of main results of the author related to the weighted completeness of polynomials and linear combinations of entire functions of Mittag–Leffler type and, moreover, the quasianaliticity of classes of functions connected with the weighted approximation. A complete list of author's scientific papers is added.

Вагові наближення поліномами та цілими функціями

I.O. Хачатрян

Стаття містить огляд головних результатів автора щодо вагової повноти поліномів та лінійних комбінацій цілих функцій типу Міттаг–Леффлера, а також квазіаналітичності деяких класів функцій, які пов'язані з ваговою апроксимацією. Додано повний список наукових статей автора.