Математическая физика, анализ, геометрия
1999, т. 6, № 3/4, с. 199–212

Асимптотические солитоны в окрестности заднего фронта решения уравнения Кортевега-де Фриза

В.Б. Баранецкий

*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47*

E-mail: baranetsky@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 1 апреля 1998 года

Изучено асимптотическое поведение при больших временах решения задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза с неубывающими начальными данными, которые стремятся к нулю при $x \to -\infty$ и к некоторой периодической функции при $x \to +\infty$. Доказано, что в окрестности заднего фронта такое решение распадается в пределе больших t в бесконечную серию медленных асимптотических солитонов. Получены явные формулы, описывающие это явление распада.

Введение

Исследованию асимптотического поведения неубывающих (типа ступеньки) решений нелинейных вполне интегрируемых уравнений при больших временах посвящен ряд работ, достаточная полная библиография которых приведена в обзоре [1]. Наиболее полно изучены задачи об асимптотике переднего фронта таких решений. В этой, расширяющейся со временем, области переднего фронта неубывающее решение распадается в бесконечную серию асимптотических солитонов, которые обусловлены неубывающим поведением начальной функции в окрестности одной из бесконечностей. Такие солитоны генерируются однократным непрерывным спектром соответствующего оператора Лакса, причем тем его краем, который приводит к максимально возможной скорости их распространения.

Однако оказывается, что возможно рождение медленных асимптотических солитонов, также генерируемых однократным непрерывным спектром. Эти солитоны имеют наименьшую возможную скорость распространения для данной задачи и локализуются в области, образующей окрестность заднего фронта рассматриваемого решения. Изучение медленных асимптотических солитонов не проводилось, исключая, по-видимому, единственный случай [2], где была получена солитонная асимптотика для уравнения МКдФ в окрестности заднего фронта решения типа ступеньки.

Подход, позволивший изучить асимптотику неубывающих решений в окрестности переднего фронта и построить явную формулу для быстрых асимптотических солитонов, был предложен в работе [3]. В данной работе будет показано, что в ряде случаев эта конструкция применима и для локализации медленных асимптотических солитонов в окрестности заднего фронта неубывающего решения. Этот подход будет продемонстрирован на уравнении Кортевега–де Фриза.

1. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим следующую задачу Коши для уравнения Кортевега–де Фриза:

$$u_t - 6u_x u + u_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}_+, \tag{1}$$

$$u(x,0) = q(x), \quad x \in \mathbf{R}, \tag{2}$$

с достаточно гладкой начальной функцией $q(x)$, быстро стремящейся к нулю при $x \to -\infty$ и к периодической функции $q_0(x)$ при $x \to +\infty$. Для простоты будем предполагать, что $q_0(x)$ является однозонным потенциалом оператора Шредингера

$$-\frac{d^2}{dx^2} + q_0(x),$$

рассматриваемого в пространстве $L^2(\mathbf{R})$. Это означает, что спектр этого оператора состоит только из абсолютно непрерывной компоненты и совпадает с множеством $\sigma = \{k | k \in [-b^2, -a^2] \cup [0, \infty)\}$. Рассматриваемая задача Коши тесно связана с задачей рассеяния для уравнения Шредингера на всей оси с потенциалом $q(x)$:

$$- y'' + q(x)y = k^2 y, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Спектр соответствующего оператора Шредингера, при сделанных предположениях, состоит из двукратно вырожденной абсолютно непрерывной компоненты, совпадающей с множеством $[0, +\infty)$ плоскости спектрального параметра k^2, однократной абсолютно непрерывной компоненты, которая совпадает с замкнутым интервалом $[-b^2, -a^2]$, и, возможно, конечного числа простых собственных значений $-k_1^2, -k_2^2, \ldots, -k_n^2$, лежащих в лакунах $(-\infty, -b^2) \cup (-a^2, 0)$ непрерывного спектра.

Как и в работах [1],[4], эти данные о задаче рассеяния (3) позволяют получить следующее представление для решения задачи Коши (1)–(2):

$$u(x,t) = -2\frac{\partial}{\partial x} K(x,x,t), \tag{4}$$

где $K(x,y,t)$ является решением линейного интегрального уравнения Марченко

$$K(x,y,t)+\int\limits_{-\infty}^{x} K(x,z,t)H(z+y,t)dz+H(x+y,t)=0,\ -\infty<z<x \qquad (5)$$

с ядром

$$H(x,t)=\int\limits_{a}^{b} p(k)\mathbf{e}^{kx-8k^3t}dk+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(k)\mathbf{e}^{-ikx-8ik^3t}dk+\sum_{j=1}^{n} m_j\mathbf{e}^{k_jx-8k_j^3t},$$

$$m_j>0.$$

Здесь функция $r(k)$ является коэффициентом отражения, а числа m_j представляют собой обратные величины квадратов норм собственных функций задачи рассеяния (3). Функция $p(k)$ вещественна в интервале $[a,b]$ и имеет вид

$$p(k)=\sqrt{(k-a)(b-k)}p_0(k),\quad k\in[a,b],$$

где $p_0(k)$ — достаточно гладкая и положительная в замкнутом интервале $[a,b],\ \ 0<a<b$, функция.

Для достижения основной цели данной работы, локализации медленных асимптотических солитонов в окрестности заднего фронта решения, ограничимся в этой статье случаем, когда дискретный спектр отсутствует ($m_j=0$) и коэффициент отражения $r(k)\equiv 0$. В этом случае ядро уравнения Марченко приобретает особенно простой вид

$$H(x,t)=\int\limits_{a}^{b} p(k)\mathbf{e}^{kx-8k^3t}dk.$$

Однако и в этом относительно простом случае асимптотическое исследование уравнения Марченко оказывается затруднительным. Более удобным для асимптотического анализа оказывается интегральное уравнение для соответствующего решения Йоста

$$g(x,t,k)=\left(\mathbf{e}^{kx}+\int\limits_{-\infty}^{x} K(x,y,t)\mathbf{e}^{ky}dy\right)\mathbf{e}^{-4k^3t},\quad k>0. \qquad (6)$$

Из (5) при $m_j=0$ и $r(k)\equiv 0$ получаем интегральное уравнение для $g(x,t,k)$:

$$g(x,t,k)+\int\limits_{a}^{b}\frac{p(\mu)}{k+\mu}\mathbf{e}^{(k+\mu)x-4(k^4+\mu^3)t}g(x,t,\mu)d\mu=\mathbf{e}^{kx-4k^3t},\quad k\in[a,b], \qquad (7)$$

как функции переменной k.

Это уравнение аналогично тому, что использовалось в работе [3]. Сравнивая асимптотическое поведение по $k \to \infty$ функции $g(x,t,k)$ из (6) и (7), находим

$$K(x,x,t) = -\int\limits_a^b p(\mu)\mathbf{e}^{\mu x - 4\mu^3 t} g(x,t,\mu)d\mu,$$

а следовательно, в силу (4)

$$u(x,t) = 2\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_a^b p(\mu)\mathbf{e}^{\mu x - 4\mu^3 t} g(x,t,\mu)d\mu.$$

Дальнейшие выкладки будут проводиться для любого достаточно гладкого семейства функций $p(\mu)$, таких что $p(\mu) = (\mu - a)^\alpha (b-\mu)^\beta p_0(\mu)$, $\alpha, \beta > -1$, и $p_0(\mu) > 0$, $\mu \in [a,b]$. Функция $p(\mu)$ этого семейства при $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ соответствует поставленной задаче Коши (1)–(2). При других $\alpha, \beta > -1$ функция $u(x,t)$ представляет собой решение уравнения КдФ, стремящееся к нулю при $x \to -\infty$. Поведение решения при $x \to +\infty$ остается неизученным. Можно лишь утверждать, что оно ограниченно в виду принадлежности замыканию множества безотражательных потенциалов оператора Шредингера [5].

Для формулировки основных результатов работы введем обозначения. Определим область заднего фронта как множество тех $x \in \mathbf{R}$, для которых

$$\Omega_N(t) = \{x \in \mathbf{R} |\ x < 4a^2 t + \frac{1}{2a}\ln t^{[N+\alpha+1]}\},$$

где N — произвольное натуральное число и $t > 1$. Пусть

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\frac{(i+j)!}{i!j!(2a)^{i+j+1}} \quad i,j \in \mathbf{Z}_+ \times \mathbf{Z}_+;$$

$C^{(N)} = \{C_{ij}\}_{i,j=0}^N$ — матрица порядка $N+1$;

$$I_k(x,t) = \int\limits_a^b \mathbf{e}^{2\mu x - 8\mu^3 t}(\mu - a)^k p(\mu)d\mu;$$

$I^{(N)}(x,t) = \{I_{i+j}(x,t)\}_{i,j=0}^N$ и $A^{(N)} = C^{(N)} I^{(N)}(x,t)$ — матричные функции порядка $N+1$.

Доказательства и результаты, полученные в далее сформулированных теоремах, существенно зависят от соотношений a и b. Поэтому будем их разделять.

Теорема 1.1 (Случай $b<2a$). *Решение $u(x,t)$ допускает представление вида*

$$u(x,t)=2\frac{\partial^2}{\partial x\partial C_{00}}\ln\det\{E^{(N)}+A^{(N)}(x,t)\}+\Delta^{(N)}(x,t), \tag{8}$$

справедливое в области $G_N=\bigcup\limits_{t>1}\Omega_N(t)\subset\mathbf{R}^2$, где $E^{(N)}$ — единичная матрица порядка $N+1$ и $\Delta^{(N)}(x,t)$ удовлетворяет неравенствам:

$$|\Delta^{(N)}(x,t)|$$

$$\le\begin{cases}\frac{K_N}{t}, & \text{при}\ \ \frac{[N+\alpha+1]}{2b}\ln\sqrt{\frac{b}{b-a}}<x-4a^2t<\frac{[N+\alpha+1]}{2a}\ln t,\ \ t>1;\\ \min\left\{\frac{K_N}{t},K\left(\frac{b-a}{a}\right)^{\frac{N+1}{2}}\right\}, & \text{при}\ \ x-4a^2t\le\frac{[N+\alpha+1]}{2b}\ln\sqrt{\frac{b}{b-a}},\ \ t>1.\end{cases}$$

Теорема 1.2 (Случай $b\ge 2a$). *Решение $u(x,t)$ допускает представление в форме (8) в области G_N, где $\Delta^{(N)}(x,t)$ удовлетворяет неравенству*

$$|\Delta^{(N)}(x,t)|\le\frac{K_N}{t},\quad\text{при}\quad x-4a^2t\le\frac{[N+\alpha+1]}{2a}\ln t,\qquad t>1.$$

З а м е ч а н и е. Константа K зависит только от параметров задачи a,b,α,β и функции $p_0(\mu)$, а K_N — еще и от N. Но важным является то, что $\lim\limits_{N\to\infty}\Delta^{(N)}(x,t)=0$ равномерно по $x\le 4a^2t+\frac{[N+\alpha+1]}{2b}\ln\sqrt{\frac{b}{b-a}}$, $\ t>1$, в первом случае, и $\lim\limits_{t\to\infty}\Delta^{(N)}(x,t)=0$ равномерно по $x\in\Omega_N(t)$ для любого фиксированного N в обоих случаях.

Теорема 2. *Решение $u(x,t)$ может быть представлено в виде*

$$u(x,t)=-\sum_{k=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]}\frac{2a^2}{\cosh^2\{a(x-4a^2t+\frac{1}{2a}\ln t^{2k+\alpha-1}-x_k^0)\}}+O(t^{-\frac{1}{2}})$$

в области $\Omega_N(t)$, когда $t\to\infty$. Числа x_k^0 являются постоянными фазами, которые определяются формулой:

$$x_k^0=\frac{1}{2a}\ln\frac{[(k-1)!]^2\Delta_1^{(k-1)}\Delta_2^{(k-1)}a^{6n-3+2\alpha}2^{10n-5+4\alpha}}{p_0(a)(b-a)^\beta\Delta_1^{(k)}\Delta_2^{(k)}},$$

где $\Delta_1^{(k)}$ и $\Delta_2^{(k)}$ — детерминанты матриц, компонентами которых являются числа $(i+j)!$ и $\Gamma(i+j+1+\beta)$, $\ i,j=\overline{0,k-1}$, соответственно.

2. Доказательства теорем 1.1 и 1.2

Рассмотрим пространство $L_{2,p}[a,b]$ функций $g(\lambda)$, принимающих действительные значения на интервале (a,b) с нормой:

$$||g|| = \left\{ \int\limits_a^b g^2(\mu)p(\mu)d\mu \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $a, b > 0$, а $p(\mu) > 0$ в интервале (a,b). В этом пространстве рассмотрим оператор A, зависящий от параметров $x, t \in \mathbf{R}$,

$$[Ag](\lambda) = \int\limits_a^b \frac{\mathbf{e}^{(\lambda+\mu)x - 4(\lambda^3+\mu^3)t}}{\lambda+\mu} g(\mu)p(\mu)d\mu, \quad \lambda \in (a,b). \tag{9}$$

Как и в работе [3], можно доказать, что оператор $(E+A)^{-1}$ существует и

$$||(E+A)^{-1}|| \leq 1.$$

В дальнейшем существенную роль будет играть следующее разложение:

$$\frac{1}{\lambda+\mu} = \sum_{i,j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} \frac{(i+j)!}{i!j!(2a)^{i+j+1}} (\lambda-a)^i(\mu-a)^j. \tag{10}$$

2.1. Доказательство теоремы 1.1

Используя представление (10) в виде ряда, сходящегося при $\lambda, \mu \in [a,b]$ и $b < 2a$, можем записать оператор (9) как сумму двух операторов

$$[A_N g](\lambda) = \int\limits_a^b \mathbf{e}^{(\lambda+\mu)x - 4(\lambda^3+\mu^3)t} \sum_{i,j=0}^{N} C_{ij}(\lambda-a)^i(\mu-a)^j g(\mu;x,t)p(\mu)d\mu,$$

$$[B_N g](\lambda) = \int\limits_a^b \mathbf{e}^{(\lambda+\mu)x - 4(\lambda^3+\mu^3)t} \sum_{i,j \in R^{(N)}}^{\infty} C_{ij}(\lambda-a)^i(\mu-a)^j g(\mu;x,t)p(\mu)d\mu,$$

где $R^{(N)} = \mathbf{Z}_+^2 \setminus \{(i,j) | 0 \leq i,j \leq N\}$.

Получим оценки для ряда в представлении оператора B_N:

$$0 \leq \left| \sum_{(i,j)\in R^{(N)}} C_{ij}(\lambda-a)^i(\mu-a)^j \right| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!(2a)^{k+1}} (\lambda-a)^{k-i}(\mu-a)^i$$

$$\le \frac{1}{2a}\left[\frac{(\lambda-a)+(\mu-a)}{2a}\right]^{N+1}\frac{1}{1-\frac{b-a}{a}} \le \frac{1}{2(2a-b)}\left[\frac{b-a}{a}\right]^{N+1}. \tag{11}$$

Эти неравенства позволяют оценить норму оператора B_N при $t>0$.

$$||B_N||^2 \le \int_a^b\int_a^b \mathbf{e}^{2(\lambda+\mu)x-8(\lambda^3+\mu^3)t}\frac{1}{4(2a-b)^2}\left(\frac{b-a}{a}\right)^{2(N+1)} p(\lambda)p(\mu)d\lambda d\mu$$

$$\le \frac{\hat{p}_0^2}{4(2a-b)^2}\left(\frac{b-a}{a}\right)^{2(N+1)} B^2(\alpha+1,\beta+1)(b-a)^{2(\alpha+\beta+1)}\mathbf{e}^{2l(\xi)},$$

где $\hat{p}_0 = \max\limits_{[a,b]} p_0(\lambda)$, $\xi = x-4a^2t$, $l(\xi)=\xi(b+a)+|\xi|(b-a)$ и $B(y,z)$ — бета-функция Эйлера. Откуда немедленно вытекает

$$||B_N|| \le \left(\frac{b-a}{a}\right)^{\frac{N+\alpha+2\beta+3}{2}}\frac{\hat{p}_0}{2(2a-b)}B(\alpha+1,\beta+1)a^{1+\alpha+\beta}$$

при $t>0$ и $\xi \le \frac{N+\alpha+1}{2b}\ln\sqrt{\frac{a}{b-a}}$.

Теперь оценим норму оператора B_N в области

$$\frac{N+\alpha+1}{2b}\ln\sqrt{\frac{a}{b-a}} \le \xi \le \frac{N+\alpha+1}{2a}\ln t,\ t>0,\ \xi = x-4a^2t.$$

Используя неравенство (11), можем записать

$$||B_N||^2 \le \int_a^b\int_a^b \mathbf{e}^{2(\lambda+\mu)x-8(\lambda^3+\mu^3)t}\frac{1}{(2a)^2}\left[\frac{(\lambda-a)+(\mu-a)}{2a}\right]^{2(N+1)} p(\lambda)p(\mu)d\lambda d\mu$$

$$= \sum_{k+j=2(N+1)} I_k(x,t)I_j(x,t), \tag{12}$$

где $I_k(x,t) = \int_a^b \mathbf{e}^{2\mu x-8\mu^3 t}(\mu-a)^k p(\mu)d\mu$.

Лемма. *Интегралы $I_k(x,t)$ допускают следующее представление:*

$$I_k(x,t) = \frac{p_1\lambda_1^{k+\alpha+1}\Gamma(k+\alpha+1)}{t^{k+\alpha+1}}\mathbf{e}^{2a\xi}+\delta_k(t,\xi),$$

при $t\to\infty$ и $\xi = x-4a^2t$, где $p_1 = p_0(a)(b-a)^\beta$, $\lambda_1=(4a)^{-2}$ и $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера. Функции $\delta_k(t,\xi)$ могут быть оценены следующим образом:

$$|\delta_k(t,\xi)| \le \frac{\Gamma(k+\alpha+2)}{t^{k+\alpha+\frac{3}{2}}}D^{k+\alpha+2}\mathbf{e}^{2a\xi},$$

где константа D зависит от параметров задачи.

$\triangledown$ Сделаем замену переменных $x = 4a^2t + \xi$ и $\lambda = \mu - a$. Тогда

$$I_k(x,t) = \mathbf{e}^{2a\xi} \int\limits_0^{b-a} \mathbf{e}^{2\lambda\xi - 8\lambda(\lambda+a)(\lambda+2a)t} \lambda^k p(\lambda) d\lambda. \tag{13}$$

Рассмотрим функцию $\omega = \omega(\lambda) = 8\lambda(\lambda + a)(\lambda + 2a)$. Можно доказать существование обратной функции $\lambda = \lambda(\omega)$, у которой $\lambda(0) = 0$ и ряды

$$\lambda = \lambda(\omega) = \lambda_1\omega + \lambda_2\omega^2 + \ldots, \left\{\lambda_1 = (4a)^{-2}\right\},$$

$$\frac{d\lambda}{d\omega} = \lambda_1 + 2\lambda_2\omega + \ldots, \tag{14}$$

$$(b - a - \lambda(\omega))^\beta p_0(\lambda(\omega) + a) = p_1 + p_2\omega + \ldots (p_1 = (b-a)^\beta p_0(a))$$

сходятся абсолютно и равномерно при $|\omega| \le \hat{\omega} < \dfrac{16a^3}{3\sqrt{3}}$. Теперь выберем малое число δ_1, такое что $0 < \delta_1 < \min\left\{\dfrac{16a^3}{3\sqrt{3}}, \omega(b-a)\right\}$ $(\omega(b-a) = 8b(b^2 - a^2) > 0)$, и обозначим $\delta = \lambda(\delta_1)$ $(\delta < b - a)$. Затем с помощью равенств $p(\lambda + a) = \lambda^\alpha(b - a - \lambda)^\beta p_0(\lambda + a)$ и (13) можем записать

$$I_k(x,t) = \mathbf{e}^{2a\xi} \int\limits_0^{\delta} \mathbf{e}^{2\lambda\xi - \omega(\lambda)t} \lambda^{k+\alpha} p_0(\lambda + a) d\lambda$$

$$+\mathbf{e}^{2a\xi} \int\limits_\delta^{b-a} \mathbf{e}^{2\lambda\xi - \omega(\lambda)t} \lambda^{k+\alpha} (b - a - \lambda)^\beta p_0(\lambda + a) d\lambda = I_k^{'}(x,t) + I_k^{''}(x,t).$$

Легко видеть, что

$$I_k^{''}(x,t) \le \hat{p}_0 \frac{(b-a)^{k+\alpha+\beta+1}}{k+\alpha+1} \mathbf{e}^{l(\xi) - \delta_1 t}. \tag{15}$$

Для оценки интеграла $I_k^{'}(x,t)$ воспользуемся разложением (14), откуда можем показать, что

$$\lambda^{k+\alpha}(\omega)(b - a - \lambda(\omega))^\beta p_0(\lambda(\omega) + a)\frac{d\lambda}{d\omega} = p_1\lambda_1^{k+\alpha+1}\omega^{k+\alpha} + \omega^{k+\alpha+1}\Phi_k(\omega),$$

$$\mathbf{e}^{2\lambda(\omega)\xi} = 1 + \omega E(\omega, \xi) \tag{16}$$

при $|\omega| < \delta_1$. Функции $\Phi_k(\omega)$ и $E(\omega,\xi)$ допускают оценки

$$|E(\omega,\xi)| \le 2A|\xi|\mathbf{e}^{\delta(|\xi|+\xi)},$$

$$|\Phi_k(\omega)| \le (k+\alpha+1)B^{k+\alpha+1}p_1. \tag{17}$$

Константы A и B зависят только от параметров задачи и определяются формулами

$$A = \max_{z<\delta_1}\left|\frac{\lambda(z)}{z}\right|,$$

$$B = \max_{z<\delta_1}\max\left\{\left|\frac{\lambda(z)}{z}\right|, \left|\left(\frac{\lambda(z)}{z}\right)^{'}\right|, |G(z)|, |G^{'}(z)|\right\},$$

где

$$G(z) = \lambda^{'}(z)\frac{p_0(\lambda(z)+a)}{p_0(a)}\frac{(b-a-\lambda(z))^\beta}{(b-a)^\beta}.$$

Согласно (16), интегралы $I_k^{'}(x,t)$ могут быть представлены в следующем виде:

$$I_k^{'}(x,t) = \mathbf{e}^{2a\xi}\int_0^\delta \mathbf{e}^{2\lambda(\omega)\xi-\omega t}\lambda(\omega)^{k+\alpha}(b-a-\lambda(\omega))^\beta p_0(\lambda(\omega)+a)\frac{d\lambda}{d\omega}d\omega$$

$$= p_1\lambda_1^{k+\alpha+1}\mathbf{e}^{2a\xi}\int_0^\infty \mathbf{e}^{-\omega t}\omega^{k+\alpha}d\omega - p_1\lambda^{k+\alpha+1}\mathbf{e}^{2a\xi}\int_{\delta_1}^\infty \mathbf{e}^{-\omega t}\omega^{k+\alpha}d\omega$$

$$+p_1\lambda_1^{k+\alpha+1}\mathbf{e}^{2a\xi}\int_0^{\delta_1} \mathbf{e}^{-\omega t}\omega^{k+\alpha+1}E(\omega,\xi)d\omega + \mathbf{e}^{2a\xi}\int_0^{\delta_1} \mathbf{e}^{-wt}w^{k+\alpha+1}\Phi_k(\omega,\xi)d\omega$$

$$+\,\mathbf{e}^{2a\xi}\int_0^{\delta_1} \mathbf{e}^{-\omega t}\omega^{k+\alpha+2}E(\omega,\xi)\Phi_k(\omega,\xi)d\omega = \sum_{j=0}^4 I_k^{(j)}(\xi,t). \tag{18}$$

Очевидно, что

$$I_k^{(0)}(x,t) = p_1\lambda_1^{k+\alpha+1}\Gamma(k+\alpha+1)\frac{\mathbf{e}^{2a\xi}}{t^{k+\alpha+1}}.$$

Принимая во внимание оценки (17), можем оценить остальные интегралы суммы (18) :

$$|I_k^{(1)}(x,t)| \le p_1(2\lambda_1)^{k+\alpha+1}\mathbf{e}^{-\frac{\delta_1 t}{2}}\frac{\mathbf{e}^{2a\xi}}{t^{k+\alpha+1}},$$

$$|I_k^{(2)}(x,t)| \le 2p_1\lambda_1^{k+\alpha+1}|\xi|\Gamma(k+\alpha+2)\frac{\mathbf{e}^{2a\xi}}{t^{k+\alpha+2}},$$

$$|I_k^{(3)}(x,t)| \le p_1(k+\alpha+1)B^{k+\alpha+1}\Gamma(k+\alpha+2)\frac{\mathbf{e}^{2a\xi}}{t^{k+\alpha+2}},$$

$$|I_k^{(4)}(x,t)| \le (k+\alpha+1)p_1\lambda_1^{k+\alpha+1}AB^{k+\alpha+1}|\xi|\Gamma(k+\alpha+3)\frac{\mathbf{e}^{2a\xi}}{t^{k+\alpha+3}}.$$

Следовательно,

$$I_k'(x,t) = p_1\lambda_1^{k+\alpha+1}\Gamma(k+\alpha+1)\frac{\mathbf{e}^{2a\xi}}{t^{k+\alpha+1}} + \delta_k'(\xi,t),$$

где функция $\delta_k'(\xi,t)$ удовлетворяет неравенству

$$|\delta_k'(\xi,t)| \le \frac{\Gamma(k+\alpha+2)}{t^{k+\alpha+\frac{3}{2}}}D_1^{k+\alpha+2}\mathbf{e}^{2a\xi}.$$

Константа D_1 зависит от $A, B, a, b, p_1, \lambda_1$, и δ_1, то есть от параметров задачи. Последнее утверждение и неравенство (15) завершают доказательство леммы $\triangle$.

Подставляя в (12) асимптотическое выражение для интегралов $I_k(x,t)$, получим

$$||B_N||^2 \le \frac{B^{2(N+\alpha+2)}\Gamma^2(2(N+\alpha+2))}{t^{2(N+\alpha+2)}}\mathbf{e}^{4a\xi},$$

и, следовательно,

$$||B_N|| \le \frac{\hat{K}_N}{t}$$

при $\xi \le \frac{[N+\alpha+1]}{2a}\ln t$. Константа K_N зависит от N и параметров задачи.

Результаты, полученные в [3], позволяют завершить доказательство теоремы 1.1.

2.2. Доказательство теоремы 1.2

Разложение (10) сходится для тех λ и μ, для которых выполнено неравенство $|(\lambda-a)+(\mu-a)| < 2a$. Введем в рассмотрение число γ, такое что $a < \gamma < 2a$, например $\gamma = \frac{3}{2}a$, и разобьем оператор A на сумму четырех операторов с помощью проекторов

$$A = A\{H(\lambda-\frac{3}{2}a)+H(\frac{3}{2}a-\lambda)\}\{H(\mu-\frac{3}{2}a)+H(\frac{3}{2}a-\mu)\}$$

$$= AH(\lambda-\frac{3}{2}a)H(\mu-\frac{3}{2}a)+AH(\frac{3}{2}a-\lambda)(\frac{3}{2}a-\mu)$$

$$+AH(\lambda-\frac{3}{2}a)H(\frac{3}{2}a-\mu)+AH(\frac{3}{2}a-\lambda)H(\mu-\frac{3}{2}a) = A_0+A_1+A_2+\hat{A}_2,$$

где
$$H(z) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad \lambda \le 0, \\ 0, & \text{при} \quad \lambda > 0. \end{cases}$$

Операторам $A_0, A_1, A_2, \hat{A}_2$ сопоставим области

$$D_0 = \{(\lambda,\mu)|(\lambda,\mu) \in [a, \frac{3}{2}a] \times [a, \frac{3}{2}a]\}, \quad D_1 = \{(\lambda,\mu)|(\lambda,\mu) \in [\frac{3}{2}a, b] \times [\frac{3}{2}a, b]\},$$

$$D_2 = \{(\lambda,\mu)|(\lambda,\mu) \in [a, \frac{3}{2}a] \times [\frac{3}{2}a, b]\}, \quad \hat{D}_2 = \{(\lambda,\mu)|(\lambda,\mu) \in [\frac{3}{2}a, b] \times [a, \frac{3}{2}a]\},$$

соответственно. Таким образом, рассмотрение оператора A сводится к изучению четырех операторов, описанных выше.

Легко получить следующие оценки:

$$\left| \int\limits_{\frac{3}{2}a}^{b} \mathbf{e}^{2\lambda x - 8\lambda^3 t} (b-\lambda)^\beta d\lambda \right|$$

$$= \int\limits_{\frac{3}{2}a}^{b} \mathbf{e}^{2\lambda(\xi - 4(\lambda^2 - a^2)t)} (b-\lambda)^\beta d\lambda \le \left(b - \frac{3}{2}a\right)^{\beta+1} \frac{\mathbf{e}^{b(\xi+|\xi|)+\frac{3a}{2}(\xi-|\xi|)-15a^3 t}}{\beta+1}$$

и

$$\left| \int\limits_{a}^{\frac{3}{2}a} \mathbf{e}^{2\lambda x - 8\lambda^3 t} (\lambda - a)^\alpha d\lambda \right| = \int\limits_{a}^{\frac{3}{2}a} \mathbf{e}^{2\lambda(\xi - 4(\lambda^2 - a^2)t)} (\lambda - a)^\alpha d\lambda \le \left(\frac{a}{2}\right)^{\alpha+1} \frac{\mathbf{e}^{\frac{a}{2}(5\xi+|\xi|)}}{\alpha+1},$$

где $\xi = x + 4a^2 t$, $t \to \infty$. Эти неравенства позволяют оценить нормы операторов A_1, A_2, $\hat{A}_2$ при $t > 0$:

$$||A_1||^2 = \int\limits_{\frac{3}{2}a}^{b} \int\limits_{\frac{3}{2}a}^{b} \frac{\mathbf{e}^{2(\lambda+\mu)x - 8(\lambda^3+\mu^3)t}}{(\lambda+\mu)^2} p(\lambda) p(\mu) d\lambda d\mu$$

$$\le \frac{\hat{p}_0^2 \gamma_{a,\alpha}^2}{9a^2} \left\{ \int\limits_{\frac{3}{2}a}^{b} \mathbf{e}^{2\lambda x - 8\lambda^3 t} (b-\lambda)^\beta d\lambda \right\}^2$$

$$\le \frac{\hat{p}_0^2}{9a^2(\beta+1)^2} \left(\frac{2b-3a}{2}\right)^{2(\beta+1)} \mathbf{e}^{2b(\xi+|\xi|)+3a(\xi-|\xi|)-30a^3 t},$$

$$||A_2||^2 = \left| \int\limits_{\frac{3}{2}a}^{b} p(\lambda) d\lambda \int\limits_{a}^{\frac{3}{2}a} \frac{\mathbf{e}^{2(\lambda+\mu)x - 8(\lambda^3+\mu^3)t}}{(\lambda+\mu)^2} p(\mu) d\mu \right|$$

$$\leq 4\hat{p}_0^2 \frac{\gamma_{a,\alpha}\gamma_{b,\beta}}{(5a)^2} \int\limits_{\frac{3}{2}a}^{b} (b-\lambda)^\beta \mathbf{e}^{2\lambda x - 8\lambda^3 t} d\lambda \times \int\limits_{a}^{\frac{3}{2}a} (\lambda - a)^\alpha \mathbf{e}^{2\lambda x - 8\lambda^3 t} d\lambda$$

$$\leq \frac{\hat{p}_0^2}{(5a)^4} \frac{\gamma_{a,\alpha}\gamma_{b,\beta}}{2^{\alpha+\beta-2}} \frac{a^{\alpha+1}(2b-3a)^{\beta+1}}{(\alpha+1)(\beta+1)} \mathbf{e}^{b(\xi+|\xi|)+a(4\xi-|\xi|)-15a^3 t}$$

и

$$||\hat{A}_2||^2 = \left| \int\limits_{a}^{\frac{3}{2}a} p(\lambda) d\lambda \int\limits_{\frac{3}{2}a}^{b} \frac{\mathbf{e}^{2(\lambda+\mu)x - 8(\lambda^3+\mu^3)t}}{(\lambda+\mu)^2} p(\mu) d\mu \right|$$

$$\leq \frac{\hat{p}_0^2}{(5a)^4} \frac{\gamma_{a,\alpha}\gamma_{b,\beta}}{2^{\alpha+\beta-2}} \frac{a^{\alpha+1}(2b-3a)^{\beta+1}}{(\alpha+1)(\beta+1)} \mathbf{e}^{b(\xi+|\xi|)+a(4\xi-|\xi|)-15a^3 t},$$

где $p_0 = \max\limits_{\lambda\in[a,b]} p_0(\lambda)$,

$$\gamma_{a,\alpha} = \begin{cases} \left(\frac{a}{2}\right)^\alpha, & \alpha < 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ \left(\frac{5a}{2}\right)^\alpha, & \alpha > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \gamma_{b,\beta} = \begin{cases} \left(b - \frac{3}{2}a\right)^\beta, & \beta < 0 \\ 1, & \beta = 0 \\ (b-a)^\beta, & \beta > 0 \end{cases}.$$

Эти неравенства позволяют записать оценки для норм операторов A_1, A_2 и $\hat{A}_2$ в области $\Omega_N(t)$:

$$||A_1|| \leq \frac{\hat{p}_0}{3a(\beta+1)} \left(\frac{2b-3a}{2}\right)^{\beta+1} t^{\frac{b}{a}(N+\alpha+1)} \mathbf{e}^{-15a^3 t},$$

$$||A_2||, ||\hat{A}_2|| \leq \frac{2\hat{p}_0}{25a} \sqrt{\frac{\gamma_{a,\alpha}\gamma_{b,\beta}}{2^{\alpha+\beta}}} \sqrt{\frac{a^{\alpha+1}(2b-3a)^{\beta+1}}{(\alpha+1)(\beta+1)}} t^{(\frac{b}{2a}+\frac{3}{4})(N+\alpha+1)} \mathbf{e}^{-\frac{15}{2}a^3 t}.$$

Для оценки нормы оператора A_0 воспользуемся разложением (10), которое справедливо в области D_0, и запишем оператор A_0 как сумму двух операторов $A_0 = A_0^N + B_0^N$, где

$$[A_0^N g](\lambda) = \int\limits_{a}^{\frac{3}{2}a} \mathbf{e}^{(\lambda+\mu)x - 4(\lambda^3+\mu^3)t} \sum_{i,j=0}^{N} C_{ij}(\lambda-a)^i (\mu-a)^j p(\mu) g(\mu) d\mu$$

и

$$[B_0^N g](\lambda) = \int\limits_a^{\frac{3}{2}a} \mathbf{e}^{(\lambda+\mu)x-4(\lambda^3+\mu^3)t} \sum_{(i,j)\in R^{(N)}} C_{ij}(\lambda-a)^i(\mu-a)^j p(\mu)g(\mu)d\mu.$$

Для завершения доказательства теоремы 1.2 остается лишь воспользоваться результатами теоремы 1.1.

З а м е ч а н и е. Для доказательства теоремы 2 достаточно проделать тот же путь, что и в работе [3].

Список литературы

[1] *E.Ya. Khruslov and V.P. Kotlyarov*, Soliton asymptotic of nondecreasing solutions of nonlinear completely integrable evolution equations. — Adv. Soviet Math. (1994), v. 19, p. 129–181.

[2] *В.П. Котляров*, Распадение начального возмущения типа ступеньки для уравнения МКдФ. — Докл. АН СССР(1990), т. 312, № 5, с. 1041–1044.

[3] *E.Ya. Khruslov and Holger Stephan*, Splitting of some nonlocalized solutions of the Korteweg–de Vries equation into solitons. — Mat. fizika, analiz, geometriya (1998), v. 5, No. 1/2, p. 49–67.

[4] *В.Д. Ермакова*, Обратная задача рассеяния для уравнения Шредингера для неубывающего потенциала и ее применение к интегрированию уравнения КдФ. Канд. дисс., Харьков (1983).

[5] *В.А. Марченко*, Задача Коши для уравнения Кдф с неубывающими начальными данными. В кн.: Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов. Наукова думка, Киев (1990), с. 160–213.

Asymptotic solitons of solution of the Korteveg–de Vries equation in the neighbourhood of back front

V.B. Baranetsky

The long time asymptotic behavior of the Cauchy problem solution of the Korteweg–de Vries equation with reflectionless nondecreasing initial data is studied. The data is assumed to be vanishing as $x \to -\infty$ and tend to a periodic function as $x \to +\infty$. It is shown that in a neighbourhood of the back front this solution splits in the infinite series of slow asymptotic solitons as $t \to \infty$. The explicit formulae which describe this phenomenon are obtained.

Асимптотичні солітони у околі заднього фронту розв'язків рівняння Кортевега–де Фріза

В.Б. Баранецький

Вивчено асимптотичну поведінку за великим часом розв'язку задачі Коші для рівняння Кортевега–де Фріза з безвідбитковими початковими даними, що прямують до нуля, коли $x \to -\infty$, і до деякої періодичної функції, коли $x \to +\infty$. Доведено, що у околі заднього фронту такий розв'язок розпадається в межах великих t в нескінченну серію повільних асимптотичних солітонів. Отримано явні формули, що описують це явище розпаду.