Математическая физика, анализ, геометрия
1999, т. 6, № 3/4, с. 234–244

Замечание о самосопряженности в существенном неполуограниченных эллиптических операторов в $L_2(G)$

А.Г. Брусенцев

Белгородская государственная технологическая академия строительных материалов
Россия, 308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46
E-mail: brusents@mail.ru

Статья поступила в редакцию 18 мая 1998 года

Для симметрического эллиптического оператора L второго порядка общего вида, действующего в $L_2(G)$ ($D_L = C_0^\infty(G)$, G — произвольное открытое множество в R^n), получены условия, при которых самосопряженность $\overline{L}$ следует из самосопряженности в существенном некоторого заведомо полуограниченного эллиптического оператора.

В пространстве $L_2(G)$ (G — произвольное открытое множество в R^n) рассмотрим дифференциальный оператор

$$Lu = L_2u + L_1u + q(x)u, \;\; D_L = C_0^\infty(G), \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned} L_2u &= (\nabla - i\vec{b}(x))^*(A(x)(\nabla - i\vec{b}(x))u), \\ L_1u &= i\left[\nabla(\vec{a}(x)u) + (\nabla u, \vec{a}(x))\right]. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $A(x)$ — положительная эрмитова матрица-функция, $\vec{a}(x)$ и $\vec{b}(x)$ — n-компонентные вектор-функции с вещественными компонентами*. Далее через $(\cdot,\cdot)$, $|\cdot|$ обозначаются скалярное произведение и норма в унитарном пространстве $E(\dim E < \infty)$, а через $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\|\cdot\|$ — скалярное произведение и норма в бесконечномерном гильбертовом пространстве.

*Необычный вид выражения L удобен для единообразия формулировки основного результата применительно к принятым в литературе различным способам записи симметрического эллиптического оператора.

Всюду ниже предполагается, что

$$a_{ij}(x), b_j(x), a_j(x) \in C^1(G);\ q(x) \in L_{2loc}(G). \tag{3}$$

В особо оговоренных случаях локальные свойства коэффициентов оператора L считаются такими, что

$$D_{L^*} = \left\{ u : u \in L_2(G) \bigcap W^2_{2loc}(G),\ Lu \in L_2(G) \right\}. \tag{4}$$

В [1, 2] изучались условия самосопряженности в существенном для полуограниченного оператора L. В настоящей работе показано, что при замене полуограниченности L некоторым операторным неравенством самосопряженность $\overline{L}$ следует из самосопряженности в существенном полуограниченного оператора, полученного из L добавлением к $q(x)$ некоторого неотрицательного слагаемого (теорема 1).

Результаты работы [2] нами обобщены с помощью теоремы 1 на неполуограниченные операторы (теорема 3). Эта теорема охватывает, в частности, результат работы [3]. Теорема 1 содержит также обобщение на операторы вида (1)–(3) известной теоремы Фари–Лавина [4] (см. также [5, теорема X.38]), относящейся к оператору Шредингера в $L_2(R^n)$. Однако в теореме Фари–Лавина $q(x)$ — не обязательно из $L_{2loc}(R^n)$, а оператор Шредингера определяется на множестве, вообще говоря, не совпадающем с $C_0^\infty(R^n)$.

Операторное неравенство в качестве одного из условий самосопряженности неполуограниченного эллиптического оператора второго порядка впервые использовалось в [6], а высших порядков — в [7]. Теорема 1 является аналогом результатов, полученных в [6, 8–14]. В этих работах при $G = R^n$ и некоторых дополнительных условиях самосопряженность эллиптических операторов устанавливается при выполнении тех или иных операторных неравенств, а для полуограниченных операторов может быть гарантирована автоматически. В [15] подобный результат получен для оператора Шредингера в $L_2(R^n)$ с $q(x) \in L_{1loc}(R^n)$.

Отметим, что теорема 1 может применяться в сочетании и с другими (помимо изложенных в [1, 2]) результатами о самосопряженности полуограниченных эллиптических операторов. Ряд таких результатов содержится в [16, 17]. Условия самосопряженности неполуограниченных эллиптических операторов общего вида в $L_2(G)$ изучались в работах [18–20]. Требования на поведение коэффициентов у конечной части границы в этих работах более жесткие, чем в большинстве известных теорем для полуограниченных операторов. Теорема 1 позволяет устранить этот разрыв.

В настоящей работе, также как и в [4], основную роль играет коммутаторная теорема ([5, теорема X.37]), которой здесь придается удобная для нас форма (лемма 1).

1. Пусть $v(x)$ — скалярная функция, а $\vec{f}(x)$ — векторное поле ($\vec{f}(x) \in R^n$), удовлетворяющие условию Липшица

$$|v(x) - v(y)| \le C_{\Re}|x-y|,\ |\vec{f}(x) - \vec{f}(y)| \le C_{\Re}|x-y|,\ x, y \in \Re \subset G, \qquad (5)$$

где $\Re$ — произвольный компакт в G. Отметим, что при условии (5) градиент ∇v и дивергенция $\nabla \vec{f}$ существуют почти всюду в G. Для формулировки основного результата построим функцию

$$W_{v,f}(x) = v^2(A\nabla v, \nabla v) + v|(\vec{a}, \nabla v)| + (A^{-1}\vec{f}, \vec{f}) - \nabla \vec{f},$$

а также позитивный при $v(x) \ge 0$ оператор

$$L_{v,f}u = L_2 u + W_{v,f}(x)u.^{\star}$$

Теорема 1. *Пусть функция $v(x) \ge 0$ и векторное поле $\vec{f}(x)$ удовлетворяют условиям (5). Пусть также почти всюду в G выполнены неравенства*

$$\gamma \le (A\nabla v, \nabla v) \le \mu v^4 + C \qquad (6)$$

с константами γ, μ, $\mathrm{C} \ge 0$. Если для всех $\varphi \in C_0^\infty(G)$ справедливо операторное неравенство

$$\langle (L + tv^2)\varphi, \varphi\rangle \ge \varepsilon \langle L_{v,f}\varphi, \varphi\rangle - K\|\varphi\|^2 \qquad (7)$$

с константами t, $K \ge 0$, $\varepsilon > 0$, то из самосопряженности в существенном оператора $L + \lambda v^2$ при некотором $\lambda \ge \max\{2(t + \mu - \varepsilon\gamma), t\}$ следует самосопряженность в существенном оператора L.

Прежде чем доказывать теорему 1, приведем ряд следствий из неё.

Теорема 2. *Пусть в операторе L $\vec{a} \equiv \vec{0}$ и при удовлетворяющих условиям (5) функции $v(x) \ge 0$ и векторном поле $\vec{f}(x)$ почти всюду в G выполнены неравенства*

$$\gamma \le (A\nabla v, \nabla v) \le C, \qquad (8)$$

$$q(x) \ge (A^{-1}\vec{f}, \vec{f}) - \nabla \vec{f} - Mv^2 - K \qquad (9)$$

с константами C, $\mathrm{M} > 0$; γ, $\mathrm{K} \ge 0$. Тогда из самосопряженности в существенном оператора $L + \lambda v^2$ при некотором $\lambda > 2M$, а при $\gamma = \mathrm{C} \ge 1$ — при некотором $\lambda \ge 2M$, следует самосопряженность в существенном оператора L.

*Позитивность $L_{v,f}$ следует из теоремы 1 работы [2].

Доказательство. Покажем, что при условиях теоремы 2 выполнены условия теоремы 1. В силу (8) справедливо условие (6) с $\mu = 0$. Докажем, что при условии (9) имеет место операторное неравенство (7) при любом $t > M$ и некотором, зависящем от t, $\varepsilon > 0$. Пусть $t - M = \delta > 0$. Тогда

$$L + tv^2 = L_2 + q(x) + tv^2 = L_2 + (A^{-1}\vec{f}, \vec{f}) - \nabla\vec{f} + q(x) - (A^{-1}\vec{f}, \vec{f}) + \nabla\vec{f} + tv^2$$

$$= \delta L_2 + \delta\left[(A^{-1}\vec{f}, \vec{f}) - \nabla\vec{f}\right] + \delta v^2 + (1-\delta)\left[L_2 + (A^{-1}\vec{f}, \vec{f}) - \nabla\vec{f}\right]$$

$$+ q(x) - (A^{-1}\vec{f}, \vec{f}) + \nabla\vec{f} + Mv^2.$$

Вследствие теоремы 1 из работы [2] $L_2 + (A^{-1}\vec{f}, \vec{f}) - \nabla\vec{f} \geq 0$. Поэтому условие (9) влечет операторное неравенство ($\delta \leq 1$)

$$L + tv^2 \geq \delta\left[L_2 + (A^{-1}\vec{f}, \vec{f}) - \nabla\vec{f} + v^2\right] - K \geq \varepsilon L_{v,f} - K,$$

где $0 < \varepsilon \leq \delta / \max\{C, 1\}$.

Тем самым условия теоремы 1 выполнены при любом $t > M$ и теорема 2 доказана при $\gamma \leq$ C. При $\gamma =$ C ≥ 1 по теореме 1 из самосопряженности оператора $L + \lambda v^2$ следует самосопряженность $\overline{L}$ при $\lambda \geq \max\{2(t - \varepsilon\gamma), t\} = \max\{2(M + \delta - \varepsilon C), M + \delta\}$. При $\varepsilon = \delta/$C и $\delta < M$ последний максимум равен $2M$. Теорема 2 доказана.

Теорема позволяет обобщить основной результат работы [2]. Пусть функции $\eta(x)$, $v(x)$ и векторное поле $\vec{f}(x)$: $G \to R^n$ таковы, что

1) $\eta(x) \in C^2(G)$, $0 < \eta(x) \to \infty$ при $x \to \partial G^\star$;

2) $v(x) \geq 0$, $v(x)$ и $\vec{f}(x)$ удовлетворяют условиям (5);

3) почти всюду в G справедливы неравенства $(A\nabla\eta, \nabla\eta) \leq Ce^{2\eta}$, $(A\nabla v, \nabla v) \leq C$ при некотором C > 0.

Теорема 3. *Пусть в операторе L $\vec{a} \equiv \vec{0}$, а остальные его коэффициенты таковы, что имеет место условие (4). Если потенциал $q(x)$ оператора L при некоторых* M, $K \geq 0$ *почти всюду в G удовлетворяет неравенству*

$$q(x) \geq (A\nabla\eta, \nabla\eta) + (A^{-1}\vec{f}, \vec{f}) - \nabla\vec{f} - Mv^2 - K, \tag{10}$$

где для функций $\eta(x)$, $v(x)$ и векторного поля $\vec{f}(x)$ выполнены условия 1)–3), то оператор L самосопряжен в существенном.

---

*Условие $\eta(x) \to \infty$ при $x \to \partial G$ означает, что для любого $N > 0$ найдется компакт $\Re_N \subset G$ такой, что $\eta(x) > N$ при $x \in G \backslash \Re_N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие (10) влечет за собой справедливость (9), а из условия 3) следует (8) с $\gamma = 0$. Для всякого $\lambda \geq$ M

$$q(x) + \lambda v^2 \geq (A\nabla\eta, \nabla\eta) + (A^{-1}\vec{f}, \vec{f}) - \nabla\vec{f} - K,$$

а из этого неравенства в силу теоремы 3 из [2] следует самосопряженность в существенном оператора $L + \lambda v^2$, но при условии, что имеет место (4) с заменой L на $L + \lambda v^2$. В силу локальной ограниченности $v^2(x)$ из условия (4) для L получаем выполнение этого условия и для $L + \lambda v^2$. Поэтому из теоремы 2 следует самосопряженность оператора $\overline{L}$. Теорема доказана.

Теорема 3 позволяет переформулировать для неполуограниченных операторов все результаты работы [2]. Так, для оператора

$$Su = -(\nabla - i\vec{b}(x))^2 u + q(x)u, \; D_S = C_0^\infty(R^n \backslash \mathbf{L}^k),$$

где $\mathbf{L}^k$ — линейное многообразие размерности $k < n$, точно также, как в [2], может быть доказано следующее утверждение, охватывающее при достаточной гладкости $q(x)$ известную теорему Кальфа–Вальтера–Шминке–Саймона ([5, теорема X.30]), а также результат Кальфа[3].

Следствие. *Пусть потенциал $q(x)$ в S таков, что при $L = S$ выполнено условие (4). Если почти всюду справедливо неравенство*

$$q(x) \geq \left(1 - \frac{(n-k-2)^2}{4}\right)\frac{1}{\delta^2(x)} - C|x|^2 - K,$$

где $\delta(x)$ — расстояние точки x до многообразия $\mathbf{L}^k$, C, $K \geq 0$ — некоторые константы, то оператор S самосопряжен в существенном.

Для доказательства следствия достаточно в теореме 3 выбрать функцию $\eta(x)$ и векторное поле $\vec{f}(x)$ так, как это сделано в [2] при доказательстве следствия 3, и положить $v(x) = |x|$.

Теорема 4. *Пусть функция $v(x) \geq 0$ и векторное поле $\vec{f}(x)$ удовлетворяют (5) и выполнены условия (6). Пусть также в операторе L $q(x) = q_1(x) + q_2(x)$, $q_i(x) \in L_{2loc}(G)$ $(i = 1, 2)$. Если при некотором $\varepsilon > 0$ оператор*

$$(1-\varepsilon)L_2 + L_1 + q_1(x)$$

ограничен снизу на $C_0^\infty(G)$ и почти всюду в G справедливо неравенство

$$q_2(x) \geq \varepsilon W_{v,f}(x) - (c + \varepsilon\gamma)v^2(x) - d$$

с константами c, $d > 0$, то из самосопряженности оператора $\overline{L + \lambda v^2}$ при некотором $\lambda \geq \max\{2(c+\mu); c+\varepsilon\gamma\}$ следует самосопряженность $\overline{L}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что при условиях теоремы 4 выполнено неравенство (7) с $t = c + \varepsilon\gamma$. Действительно,

$$L + tv^2 = (1-\varepsilon)L_2 + L_1 + q_1(x) + \varepsilon L_2 + q_2(x) + (c+\varepsilon\gamma)v^2 \geq \varepsilon L_{v,f} - d.$$

По теореме 1 из самосопряженности $\overline{L + \lambda v^2}$ при $\lambda \geq \max\{2(t+\mu-\varepsilon\gamma), t\} = \max\{2(c+\mu); c+\varepsilon\gamma\}$ следует самосопряженность $\overline{L}$. Теорема 4 доказана.

З а м е ч а н и е. Для оператора L с $q(x) \in L_{2loc}$ и $D_L = C_0^\infty(G)$ теорема 4 содержит теорему Фари–Лавина ([5, теорема X.38]).

Действительно, для оператора Шредингера при $v(x) = |x|$ и $\vec{f}(x) \equiv \vec{0}$

$$W_{v,f}(x) = v^2|\nabla v|^2 = |x|^2.$$

При этом можно считать, что в (6) $\mu = 0$, $\gamma = \mathrm{C} = 1$. Поэтому

$$\varepsilon W_{v,f}(x) - (c+\varepsilon\gamma)v^2(x) = -c|x|^2,$$

и если в соответствии с условиями теоремы Фари–Лавина $q_2(x) \geq -c|x|^2 - d$ и $-\alpha\nabla + q_1(x) \geq -M$ при некотором $\alpha < 1$, а оператор $-\Delta + q_1 + q_2 + 2c|x|^2$ самосопряжен в существенном, то все условия теоремы 4 выполнены с некоторым $\varepsilon > 0$.

2. Для доказательства теоремы 1 понадобятся три леммы.

Лемма 1. *Пусть B и T плотно заданные симметрические операторы в гильбертовом пространстве H с областью определения $D \subset H$. Пусть также оператор $B + T$ самосопряжен в существенном на D. Если для всех $\varphi \in D$ выполнены неравенства*

$$\alpha\|B\varphi\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle B\varphi, T\varphi\rangle + \|T\varphi\|^2 \geq -M\|\varphi\|^2, \tag{11}$$

$$\langle (B+T)\varphi, \varphi\rangle \geq \delta|\mathrm{Im}\langle B\varphi, T\varphi\rangle| - M\|\varphi\|^2 \tag{12}$$

с константами $\alpha < 1$, $\delta > 0$; $M \geq 0$, то оператор B *самосопряжен в существенном на D.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме X.37 из [5], если самосопряженный в существенном оператор $N \geq I$ и симметрический оператор A, определенные на D, удовлетворяют неравенствам ($\varphi \in D$)

$$\|A\varphi\| \leq C\|N\varphi\|, \tag{13}$$

$$|\mathrm{Im}\langle A\varphi, N\varphi\rangle| \leq K\langle N\varphi, \varphi\rangle \tag{14}$$

с некоторыми константами C и K, то A *самосопряжен в существенном на* D. Покажем, что при условиях (11), (12) выполнены условия (13),(14) с $A = B$ и $N = B + T + kI$, где $k > 0$ — достаточно велико. В силу (12) оператор $B+T$ полуограничен. Поэтому при достаточно большом $k > 0$ $N \geq 1$. Неравенство (11) можно переписать в виде

$$\|(B+T)\varphi\|^2 + M\|\varphi\|^2 \geq (1-\alpha)\|B\varphi\|^2.$$

С другой стороны, из-за ограниченности снизу оператора $B + T$ *можно* $k > 0$ выбрать столь большим, чтобы имело место неравенство

$$\|(B+T)\varphi + k\varphi\|^2 \geq \|(B+T)\varphi\|^2 + M\|\varphi\|^2.$$

Отсюда следует, что верно (13) с $C = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$. Если выбрать $k > M$, то из неравенства (12) следует (14) с $K = 1/\delta$, так как

$$\mathrm{Im}\langle B\varphi, N\varphi\rangle = \mathrm{Im}\langle B\varphi, T\varphi\rangle.$$

Таким образом, оператор B самосопряжен в существенном, если таковым является $B + T$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть функция* $v(x) \geq 0$ *и векторное поле* $\vec{f}(x)$ *удовлетворяют условиям (5) и выполнены условия (6), (7) теоремы 1 с* $K = 0$. *Тогда при всех* $\varphi \in C_0^\infty(G)$ *справедливо неравенство*

$$\mathrm{Re}\langle L\varphi, v^2\varphi\rangle \geq (\varepsilon\gamma - \mu - t)\|v^2\varphi\|^2 - C\|\varphi\|^2 \tag{15}$$

с константами $\varepsilon > 0$; μ, t, γ, $C \geq 0$ *из (6), (7).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для всякой функции $p(x) \in C^\infty(G)$ и всех $\varphi \in C_0^\infty(G)$ справедливо равенство

$$\mathrm{Re}\langle L\varphi, p^2\varphi\rangle = \langle L(p\varphi), p\varphi\rangle - \int\limits_G (A\nabla p, \nabla p)|\varphi|^2\,dx.$$

В силу условия (7)

$$\langle L(p\varphi), p\varphi\rangle \geq \varepsilon\langle L_{v,f}(p\varphi), p\varphi\rangle - t\|vp\varphi\|^2.$$

Поскольку

$$L_2 + (A^{-1}\vec{f}, \vec{f}) - \nabla f \geq 0,$$

то вследствие (6)

$$\langle L_{v,f}(p\varphi), p\varphi\rangle \geq \gamma\|vp\varphi\|^2.$$

Поэтому
$$\mathrm{Re}\langle L\varphi, p^2\varphi\rangle \geq (\varepsilon\gamma - t)\|vp\varphi\|^2 - \int\limits_G (A\nabla p, \nabla p)|\varphi|^2\, dx. \tag{16}$$

Положим в (16) при $x \in \mathrm{Supp}\varphi$ $p(x) = p_\delta(x) = v^*\theta_\delta$, где $\theta_\delta(|x-y|)$ — усредняющее ядро с достаточно малым радиусом усреднения $\delta > 0$. Функция $p_\delta(x) \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{Supp}\varphi)$, и при $\delta \to 0$ $p_\delta^2(x) \to v^2(x)$ равномерно по $x \in \mathrm{Supp}\varphi$. Кроме этого, $p_\delta(x) \to v(x)$ в метрике пространства $W_2^1(\mathrm{Supp}\varphi)$. Переходя к пределу в (16), получим

$$\mathrm{Re}\langle L\varphi, v^2\varphi\rangle \geq (\varepsilon\gamma - t)\|v^2\varphi\|^2 - \int\limits_G (A\nabla v, \nabla v)|\varphi|^2\, dx.$$

Отсюда и из правого неравенства (6) следует неравенство (15). Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть функция $v(x) \geq 0$ и векторное поле $\vec{f}(x)$ удовлетворяют условиям (5). Тогда при всех $\varphi \in C_0^\infty(G)$ выполнено неравенство*

$$\Big|\mathrm{Im}\langle L\varphi, v^2\varphi\rangle\Big| \leq 2\langle L_{v,f}\varphi, \varphi\rangle. \tag{17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что

$$\Big|\mathrm{Im}\langle L\varphi, v^2\varphi\rangle\Big| \leq \Big|\mathrm{Im}\langle L_2\varphi, v^2\varphi\rangle\Big| + \Big|\mathrm{Im}\langle L_1\varphi, v^2\varphi\rangle\Big|.$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности.

$$\Big|\mathrm{Im}\langle L_1\varphi, v^2\varphi\rangle\Big| = \frac{1}{2}\Big|\langle L_1\varphi, v^2\varphi\rangle - \langle v^2\varphi, L_1\varphi\rangle\Big|$$
$$= \frac{1}{2}\Big|\langle \nabla(\vec{a}\varphi), v^2\varphi\rangle + \langle(\nabla\varphi, \vec{a}\,), v^2\varphi\rangle + \langle v^2\varphi, \nabla(\vec{a}\varphi)\rangle + \langle v^2\varphi, (\nabla\varphi, \vec{a}\,)\rangle\Big|$$
$$= \frac{1}{2}\Big|-\langle\varphi, \overline{(\vec{a}, \nabla(v^2\varphi))}\rangle + \langle(\nabla\varphi, \vec{a}\,), v^2\varphi\rangle - \langle(\nabla(v^2\varphi), \vec{a}\,), \varphi\rangle + \langle v^2\varphi, (\nabla\varphi, \vec{a}\,)\rangle\Big|$$
$$= 2\left|\langle v(\vec{a}, \nabla v)\varphi, \varphi\rangle\right|.$$

Поэтому
$$\Big|\mathrm{Im}\langle L_1\varphi, v^2\varphi\rangle\Big| \leq 2\int\limits_G v|(\vec{a}, \nabla v)|\,|\varphi|^2\, dx. \tag{18}$$

Для оценки величины $\big|\mathrm{Im}\langle L_2\varphi, v^2\varphi\rangle\big|$ рассмотрим интеграл

$$I_\pm = \int\limits_G \Big(A\left(\nabla\varphi - i(\vec{b} \pm \nabla v^2)\varphi\right), \nabla\varphi - i(\vec{b} \pm \nabla v^2)\varphi\Big)\, dx.$$

Непосредственно проверяется равенство

$$I_{\pm} = \langle L_2\varphi, \varphi\rangle \pm 2\mathrm{Im}\langle L_2\varphi, v^2\varphi\rangle + 4\langle v^2(A\nabla v, \nabla v)\varphi, \varphi\rangle. \tag{19}$$

Величину

$$I_{\pm} = \int\limits_G \Big(A(\nabla\varphi - i\vec{b}_{\pm}\varphi), \nabla\varphi - i\vec{b}_{\pm}\varphi\Big)\, dx,$$

где $\vec{b}_{\pm} = \vec{b} \pm \nabla v^2$, можно оценить снизу с помощью теоремы 1 из [2]. Правда, в этой теореме $\vec{b}_{\pm}(x)$ должна быть непрерывной вектор-функцией. Однако приведенное в [2] доказательство этой теоремы требует лишь локальной ограниченности в существенном, что в нашем случае имеет место. Таким образом, для любого векторного поля $\vec{f}(x)$, удовлетворяющего условию (5),

$$I_{\pm} \geq \int\limits_G \Big(\nabla\vec{f} - (A^{-1}\vec{f}, \vec{f})\Big)\, |\varphi|^2\, dx.$$

Отсюда и из (19) следует, что

$$\Big|\mathrm{Im}\langle L_2\varphi, v^2\varphi\rangle\Big|$$
$$\leq \frac{1}{2}\langle L_2\varphi, \varphi\rangle + 2\langle v^2(A\nabla v, \nabla v)\varphi, \varphi\rangle + \frac{1}{2}\int\limits_G \Big((A^{-1}\vec{f}, \vec{f}) - \nabla\vec{f}\Big)\, |\varphi|^2\, dx.$$

Последнее неравенство вместе с (18) влечет справедливость неравенства (17). Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 1. Поскольку операторы L и $L + KI$ имеют одинаковые индексы дефекта, можно считать, что в (7) $K = 0$. Воспользуемся леммой 1 с $B = L$, $T = \lambda v^2 I$. Покажем справедливость неравенства (11) с $\alpha = 0$. Согласно лемме 2

$$2\mathrm{Re}\langle B, T\varphi\rangle + \|T\varphi\|^2 = 2\mathrm{Re}\langle L\varphi, \lambda v^2\varphi\rangle + \lambda^2\|v^2\varphi\|^2$$
$$\geq \Big[2\lambda(\varepsilon\gamma - \mu - t) + \lambda^2\Big]\, \|v^2\varphi\|^2 - 2C\|\varphi\|^2 \geq -2C\|\varphi\|^2.$$

Тем самым неравенство (11) справедливо с $\alpha = 0$, $M = 2C$.

Проверим выполнение неравенства (12). Согласно лемме 3

$$\varepsilon\langle L_{v,f}\varphi, \varphi\rangle \geq \frac{\varepsilon}{2}\Big|\mathrm{Im}\langle L\varphi, v^2\varphi\rangle\Big| \geq \frac{\varepsilon}{2(\lambda+1)}\Big|\mathrm{Im}\langle L\varphi, \lambda v^2\varphi\rangle\Big|.$$

Отсюда в силу (7) и того, что $\lambda \geq t$, выполнено неравенство (12) с $\delta = \frac{\varepsilon}{2(\lambda+1)}$, $M = 0$. Тем самым по лемме 1 из самосопряженности $\overline{L + \lambda v^2}$ следует самосопряженность $\overline{L}$. Теорема 1 доказана.

Автор выражает благодарность Ф.С. Рофе-Бекетову за внимание к работе и ценные замечания, а также благодарит Х. Кальфа и И.Д. Чуешова за предоставленную библиографическую информацию, использованную в работе.

Список литературы

[1] *А.Г. Брусенцев*, О самосопряженности в существенном полуограниченных эллиптических операторов второго порядка, не подчиненных условию полноты риманова многообразия. — Мат. физ., анализ, геом. (1995), т. 2, № 2, с. 152–167.

[2] *А.Г. Брусенцев*, Приграничное поведение потенциала эллиптического оператора, обеспечивающее его самосопряженность в существенном. — Мат. физ., анализ, геом. (1998), т. 5, № 3/4, с. 149–165.

[3] *H. Kalf*, Self-adjointness for strongly singular potentials with a $-|x|^2$ fall-off at infinity. — Math. Z. (1973), v. 133, p. 249–255.

[4] *Faris and R. Lavine*, Commutator and self-adjointness of Hamiltonian operators. — Comm. Math. Phys. (1974), v. 35, p. 39–48.

[5] *М. Рид, Б. Саймон*, Методы современной математической физики. Т. 2. Мир, Москва (1978), 395 с.

[6] *Ф.С. Рофе-Бекетов*, О неполуограниченных дифференциальных операторах. В сб.: Теория функций, функц. анализ и их прил. (1966), вып. 2, с. 178–184.

[7] *А.Г. Брусенцев, Ф.С. Рофе-Бекетов*, Условия самосопряженности сильно эллиптических систем произвольного порядка. — Мат. сб. (1974), т. 95, № 1(9), с. 108–129.

[8] *Ф.С. Рофе-Бекетов*, Условия самосопряженности оператора Шредингера. — Мат. заметки (1970), т. 8, № 6, с. 741–761.

[9] *T. Kato*, A Remark to the preceeding paper by Chernoff. — J. Funct. Anal. (1973), v. 12, p. 415–417.

[10] *Ф.С. Рофе-Бекетов, А.М. Холькин*, Условия самосопряженности операторов эллиптического типа второго порядка общего вида. — В сб.: Теория функций, функц. анализ и их прил. (1973), вып. 17, с. 41–51.

[11] *Ю.Б. Орочко*, О достаточных условиях самосопряженности оператора Штурма–Лиувилля. — Мат. заметки (1974), т. 15, № 2, с. 271–280.

[12] *Ю.Б. Орочко*, Замечание о существенной самосопряженности оператора Шредингера с сингулярным потенциалом. — Мат. заметки (1976), т. 20, № 4, с. 571–580.

[13] *Ф.С. Рофе-Бекетов*, Самосопряженность эллиптических операторов и оценки энергетического типа во всем R^n.1. Второй порядок. В сб.: Теория функций, функц. анализ и их прил. (1990), вып. 54, с. 3–16.

[14] *Ф.С. Рофе-Бекетов, Х. Кальф*, О самосопряженности неполуограниченных операторов Шредингера. — Мат. студiї (1997), т. 7, № 1, с. 53–58.

[15] *H. Kalf and F.S. Rofe-Beketov*, On the essential self-adjointness of Schrödinger-operators with locally integrable potentials. — Proc. Royal Soc. Edinburg (1998), v. 128A, p. 95–106.

[16] *Ю.М. Березанский, В.Г. Самойленко*, Самосопряженность дифференциальных операторов с конечным и бесконечным числом переменных и эволюционные уравнения. — Успехи мат. наук (1981), т. 36, № 5, с. 3–56.

[17] *M. Maeda*, Essential self-adjointness of Schrödinger operators with potential singular along affine subspaces. — Hiroshima Math. J. (1981), v. 11, No. 2, p. 275–283.

[18] *K. Jörgens*, Wesentliche Selbstadjgiertheit singulärer Differentialoperatoren zweiter Ordnung in C_0^∞. — Math. Scand. (1964), v. 15, p. 5–17..

[19] *B. Hellving*, A criterion for self-adjointness of singular elliptic differential operators. — Anal. Appl. (1969), v. 26, No. 2, p. 279–291.

[20] *H–W. Rohde*, Kriterien zur Selbstadjungiertheit elliptischer Differentialoperatoren. I, II. — Arch. Rat. Mech. Anal. (1969), v. 34, No. 3, p. 188–217.

A remark on essential self-adjointness of nonsemi-bounded elliptic operators in $L_2(G)$

A.G. Brusentsev

Conditions are obtained for the general-type symmetric elliptic second-order operator L in space $L_2(G)$ ($D_L = C_0^\infty(G)$, G is an arbitrary open set in R^n)under which self-adjointness $\overline{L}$ follows from the essential self-adjointness of some semi-bounded elliptic operator.

Зауваження про самоспряженість в істотному непівобмежених еліптичних операторів в $L_2(G)$

О.Г. Брусенцев

Для симетричного еліптичного оператора L другого порядку загального виду, що діє в просторі $L_2(G)$ ($D_L = C_0^\infty(G)$, G — довільна відкрита множина в R^n), одержано умови, при яких самоспряженість $\overline{L}$ випливає з самоспряженості в істотному деякого півобмеженого еліптичного оператора.