Математическая физика, анализ, геометрия
1999, т. 6, № 3/4, с. 245–252

# Устойчивость решений уравнений Минковского и Брунна

## В.И. Дискант

*Черкасский инженерно-технологический институт*
*Украина, 257006, г. Черкассы, бульв. Шевченко, 460*
E-mail: akin@bee-pitron.cherkassy.ua

Статья поступила в редакцию 7 апреля 1997 года

Доказаны следующие теоремы устойчивости решений уравнений Минковского и Брунна.

**Теорема 1.** *Если*

$$V_1^n(A,X) - V(X)V^{n-1}(A) < \varepsilon, 0 \le \varepsilon < \varepsilon_0, V(X) = V(sA), s > 0,$$

*то* $\delta(sA,X) < C\varepsilon^{1/n}$.

**Теорема 2.** *Если*

$$V^{1/n}(H_{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}V^{1/n}(A) - \frac{1}{2}V^{1/n}(X) < \varepsilon, 0 \le \varepsilon < \varepsilon_0, V(X) = V(sA), s > 0,$$

*то* $\delta(sA,X) < C\varepsilon^{1/n}$.

В этих теоремах $A$ и X — выпуклые тела в $R^n$, $V(A)$ — объем $A$, $V_1(A,X)$ — первый смешанный объем $A$ и X, $H_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}X$, $\delta(sA,X)$ — отклонение тел $sA$ и X, C и $\varepsilon_0$ определяются заданием $s$, $n$, $r_A$ и $R_A$ ($r_A$ и $R_A$ — радиусы вписанного в $A$ и описанного около $A$ шаров).

Пусть $A$ и X — выпуклые ограниченные замкнутые собственные тела в $n$-мерном евклидовом пространстве $R^n$ $(n \ge 2)$, $\alpha A + \beta X$ $(\alpha, \beta \ge 0)$ — их линейная комбинация в смысле Минковского, $V(\alpha A + \beta X)$ — объем тела $\alpha A + \beta X$.

По теореме Брунна [1] функция $g(t) = V^{1/n}(H_t)$, где $H_t = (1-t)A + tX$ $(H_0 = A,\ H_1 = X)$ при $t \in [0,1]$ выпукла вверх. Из выпуклости $g(t)$ следует, что $g'(0) \ge g(1) - g(0)$. Это неравенство, как показал Минковский [1], равносильно неравенству

$$\Delta(A,X) = V_1^n(A,X) - V(X)V^{n-1}(A) \ge 0, \tag{1}$$

в котором $V_1(A, X)$ — первый смешанный объем тел $A$ и X и в котором равенство имеет место тогда и только тогда, когда $A$ и X положительно гомотетичны.

При фиксированном $A$ и переменном X на равенство $\Delta(A, X) = 0$ можно смотреть как на уравнение относительно X. Это уравнение названо в [2] уравнением Минковского.

Из выпуклости функции $g(t)$ следует, что

$$\Phi(A, X, t) = V^{1/n}(H_t) - (1-t)V^{1/n}(A) - tV^{1/n}(X) \geq 0 \tag{2}$$

при каждом $t \in [0, 1]$. Равенство в (2) имеет место тогда и только тогда, когда $A$ и X положительно гомотетичны. На равенство $\Phi(A, X, t) = 0$ при $t \in [0, 1]$ и фиксированном $A$ можно смотреть как на уравнение относительно X. Это уравнение названо в [2] уравнением Брунна. Заметим, что уравнение Брунна равносильно уравнению $\Phi\left(A, X, \frac{1}{2}\right) = 0$.

Пусть теперь $r_A$ — радиус наибольшего шара, который можно поместить в $A$, $R_A$ — радиус наименьшего шара, в который можно поместить $A$, $\delta(A, X)$ — отклонение тел $A$ и X, т.е. величина, равная $\min\limits_{\widetilde{X} \in \{X\}} \rho(A, \widetilde{X})$, где $\rho(A, \widetilde{X})$ — расстояние по Хаусдорфу между телами $A$ и $\widetilde{\text{X}}$, $\{X\}$ — множество тел, которые получаются из X с помощью параллельного переноса.

Положим $s = \sqrt[n]{V(X)/V(A)}$. Для фиксированного $s$ ($s > 0$) каждое из уравнений Минковского и Брунна имеет единственное (с точностью до параллельного переноса) решение $X = sA$. В [2] были доказаны следующие теоремы устойчивости решений, отвечающие этим теоремам единственности.

**Утверждение 1** (теорема 2.2.1 в [2]). *Если* $\Delta(A, X) < \varepsilon$, $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$, $V(A) = V(X)$, *то* $\delta(A, X) < C_1\varepsilon^{1/n}$.

**Утверждение 2** (теорема 2.3.1 в [2]). *Если* $\Phi(A, X, t) < \varepsilon$ *при всех* $t \in [0, 1]$, $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$, $V(A) = V(X)$, *то* $\delta(A, X) < C_2\varepsilon^{1/n}$.

В утверждениях 1 и 2 константы $\varepsilon_0$, $C_1$, $C_2$ определяются заданием $n$, $r_A$ и $R_A$.

В настоящей работе будут доказаны следующие теоремы.

**Теорема 1.** *Найдутся величины* $\varepsilon_0 > 0$, $C_3 > 0$, *зависящие от* $n$, $r_A$, $R_A$ *и* $s$, *такие что из выполнения условий*

$$\Delta(A, X) < \varepsilon,\ 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0,\ V(X) = V(sA),\ s > 0,$$

*следует*

$$\delta(sA, X) < C_3\varepsilon^{1/n}.$$

**Теорема 2.** *Найдутся величины $\varepsilon_1 > 0$, $C_4 > 0$, зависящие от $n$, $r_A$, $R_A$ и $s$ такие, что из выполнения условий*

$$\Phi\left(A, X, \frac{1}{2}\right) < \varepsilon,\ 0 \le \varepsilon < \varepsilon_1,\ V(X) = V(sA),\ s > 0,$$

*следует*

$$\delta(sA, X) < C_4 \varepsilon^{1/n}.$$

Условия теорем 1 и 2 отличаются от условий утверждений 1 и 2 заменой равенства $V(X) = V(A)$ на равенство $V(X) = V(sA)$, $s > 0$. Это снимает замечание, сделанное Гроемером в [3] относительно того, что условие $V(X) = V(A)$ в утверждении 2 носит технический характер. Отметим, что порядок функции устойчивости в теореме 2, равный $\frac{1}{n}$, более точен порядка функции устойчивости, равного $1/((n+1)2^{n-2})$, который получен Шнайдером в [4], и порядка $\frac{1}{n+1}$, полученного Гроемером в [5] при условии $V(A) = V(X) = 1$.

Доказательство теоремы 1. Теорема 1 является простым следствием утверждения 1. В приведенном ниже доказательстве будут получены непосредственные выражения величин $\varepsilon_0$ и $C_3$ через $n$, $r_A$, $R_A$ и $s$. Эти выражения используются при доказательстве теоремы 2.

В оценке $\delta(A, X) < C_1 \varepsilon^{1/n}$ утверждения 1, полученной в [2], $C_1$ может быть взята в виде $C_1 = 12R_A/(r_A^n \mathcal{V}_n)$, где $\mathcal{V}_n$ — объем единичного шара $E$ в $R^n$. При этом на $\varepsilon$ было наложено условие $\varepsilon < (r_A^n \mathcal{V}_n/2)^n$.

Пусть теперь $\Delta(A, X) < \varepsilon$ и $V(X) = V(sA)$. Тогда $\Delta(sA, X) = V_1^n(sA, X) - V(X)V^{n-1}(sA) = s^{n(n-1)}\Delta(A, X) < s^{n(n-1)}\varepsilon = \alpha$. Применим к телам $sA$ и X утверждение 1. Заменяя $r_A$, $R_A$ и $\varepsilon$ соответственно $sr_A$, $sR_A$ и $\alpha$, получим $\delta(sA, X) < C_3 \varepsilon^{1/n}$, где $C_3 = (12sR_A/((sr_A)^n \mathcal{V}_n))(s^{n(n-1)})^{1/n} = 12R_A/(r_A^n \mathcal{V}_n)$, при условии $\varepsilon < (sr_A^n \mathcal{V}_n/2)^n = \varepsilon_0$.

Доказательство теоремы 2. Покажем сначала выполнение оценок

$$\Delta\left(H_{\frac{1}{2}}, A\right) < C_5 \varepsilon\,,\ \Delta\left(H_{\frac{1}{2}}, X\right) < C_6 \varepsilon\,, \tag{3}$$

в которых $C_5$ и $C_6$ зависят от $n$, $R_A$ и $s$.

Условие теоремы $\Phi\left(A, X, \frac{1}{2}\right) < \varepsilon$ запишем в виде

$$V^{1/n}\left(H_{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2}V^{1/n}(A) - \frac{1}{2}V^{1/n}(X) < \varepsilon\,. \tag{4}$$

Используя свойство линейности смешанного объема по каждому из своих аргументов, запишем

$$V\left(H_{\frac{1}{2}}\right) = V_1\left(H_{\frac{1}{2}}, H_{\frac{1}{2}}\right) = V_1\left(H_{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}X\right)$$

$$= \frac{1}{2} V_1 \left( H_{\frac{1}{2}}, A \right) + \frac{1}{2} V_1 \left( H_{\frac{1}{2}}, X \right) . \tag{5}$$

Умножив обе части неравенства (4) на $V^{1-1/n}\left(H_{\frac{1}{2}}\right)$ и заменив в левой части полученного неравенства слагаемое, равное $V\left(H_{\frac{1}{2}}\right)$, на правую часть (5), получим

$$V_1 \left( H_{\frac{1}{2}}, A \right) + V_1 \left( H_{\frac{1}{2}}, X \right) - V^{1/n}(A) V^{1-1/n} \left( H_{\frac{1}{2}} \right) - V^{1/n}(X) V^{1-1/n} \left( H_{\frac{1}{2}} \right)$$
$$< 2\varepsilon V^{1-1/n} \left( H_{\frac{1}{2}} \right). \tag{6}$$

Введем обозначение

$$\widetilde{\Delta} \left( H_{\frac{1}{2}}, A \right) = V_1 \left( H_{\frac{1}{2}}, A \right) - V^{1/n}(A) V^{1-1/n} \left( H_{\frac{1}{2}} \right).$$

Тогда (6) запишем в виде

$$\widetilde{\Delta} \left( H_{\frac{1}{2}}, A \right) + \widetilde{\Delta} \left( H_{\frac{1}{2}}, X \right) < 2\varepsilon V^{1-1/n} \left( H_{\frac{1}{2}} \right). \tag{7}$$

Из (1) следует, что $\widetilde{\Delta} \left( H_{\frac{1}{2}}, A \right) \geq 0$, $\widetilde{\Delta} \left( H_{\frac{1}{2}}, X \right) \geq 0$. Отсюда и из (7) имеем

$$\widetilde{\Delta} \left( H_{\frac{1}{2}}, A \right) < 2\varepsilon V^{1-1/n} \left( H_{\frac{1}{2}} \right), \ \widetilde{\Delta} \left( H_{\frac{1}{2}}, X \right) < 2\varepsilon V^{1-1/n} \left( H_{\frac{1}{2}} \right). \tag{8}$$

Положим $a = V_1 \left( H_{\frac{1}{2}}, A \right)$, $b = V^{1/n}(A) V^{1-1/n} \left( H_{\frac{1}{2}} \right)$. Тогда $\widetilde{\Delta} \left( H_{\frac{1}{2}}, A \right) = a - b$ и

$$\Delta \left( H_{\frac{1}{2}}, A \right) = a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + \ldots + b^{n-1})$$
$$= \widetilde{\Delta} \left( H_{\frac{1}{2}}, A \right) \sum_{k=0}^{n-1} V_1^{n-1-k} \left( H_{\frac{1}{2}}, A \right) \left( V^{1/n}(A) V^{1-1/n} \left( H_{\frac{1}{2}} \right) \right)^k . \tag{9}$$

Заменяя в (9) $A$ на X, придем к равенству

$$\Delta \left( H_{\frac{1}{2}}, X \right) = \widetilde{\Delta} \left( H_{\frac{1}{2}}, X \right) \sum_{k=0}^{n-1} V_1^{n-1-k} \left( H_{\frac{1}{2}}, X \right) \left( V^{1/n}(X) V^{1-1/n} \left( H_{\frac{1}{2}} \right) \right)^k . \tag{10}$$

Из неравенств $V(A) \leq V(R_A E) = R_A^n \mathcal{V}_n$, $V(X) = V(sA) \leq s^n R_A^n \mathcal{V}_n$ следует, что $V(A)$ и $V(X)$ допускают оценки сверху, зависящие от $n$, $R_A$ и $s$. Будем считать, что

$$\varepsilon < (1/2) V^{1/n}(A) + (1/2) V^{1/n}(X) = (1/2) V^{1/n}(A)(1+s).$$

Это неравенство имеет место при $\varepsilon < (1/2)r_A(1+s)\mathcal{V}_n^{1/n} = C_7$, где $C_7 > 0$. Тогда при $\varepsilon < C_7$ из (4) имеем

$$V^{1/n}\left(H_{\frac{1}{2}}\right) < V^{1/n}(A) + V^{1/n}(X) = V^{1/n}(A)(1+s). \tag{11}$$

Поэтому $V\left(H_{\frac{1}{2}}\right)$ при $\varepsilon < C_7$ допускает оценку сверху, зависящую от $n$, $R_A$ и $s$. Смешанные объемы $V_1\left(H_{\frac{1}{2}}, A\right)$, $V_1\left(H_{\frac{1}{2}}, X\right)$ неотрицательны. Каждый из них, как это следует из (5), не превосходит $2V\left(H_{\frac{1}{2}}\right)$. Поэтому каждый из них допускает оценку сверху, зависящую от $n$, $R_A$ и $s$. Тогда (3) — следствие (8)–(10) при $\varepsilon < C_7$.

Положим теперь $s_1 = \sqrt[n]{V(A)/V\left(H_{\frac{1}{2}}\right)}$, $s_2 = \sqrt[n]{V(X)/V\left(H_{\frac{1}{2}}\right)}$, $r_{\frac{1}{2}} = r_{H_{\frac{1}{2}}}$, $R_{\frac{1}{2}} = R_{H_{\frac{1}{2}}}$ и покажем существование такого $\varepsilon_1 > 0$, что при $0 \le \varepsilon < \varepsilon_1$ имеют место оценки

$$\delta\left(s_1 H_{\frac{1}{2}}, A\right) < C_8\varepsilon^{1/n},\ \delta\left(s_2 H_{\frac{1}{2}}, X\right) < C_9\varepsilon^{1/n}, \tag{12}$$

где $\varepsilon_1$, $C_8$, $C_9$ зависят от $n$, $r_A$, $R_A$ и $s$.

Для доказательства первой оценки в (12) заметим, что (3) и равенство $V(A) = V\left(s_1 H_{\frac{1}{2}}\right)$, $s_1 > 0$, дают возможность применить теорему 1 к телам $H_{\frac{1}{2}}$ и $A$. По теореме 1 при $\varepsilon < \frac{1}{C_5}\left(\frac{1}{2}s_1 r_{\frac{1}{2}}^n \mathcal{V}_n\right)^n = C_{10}$ имеем

$$\delta\left(s_1 H_{\frac{1}{2}}, A\right) < C_3'(C_5\varepsilon)^{1/n},$$

где $C_3' = 12R_{\frac{1}{2}}/(r_{\frac{1}{2}}^n \mathcal{V}_n)$.

Убедимся, что $C_{10}$ допускает положительную оценку снизу, а $C_3'$ — оценку сверху величинами, зависящими от $n$, $r_A$, $R_A$ и $s$. Для этого покажем наличие положительных оценок снизу для $r_{\frac{1}{2}}$ и $s_1$ и оценки сверху для $R_{\frac{1}{2}}$ величинами, зависящими от $n$, $r_A$, $R_A$ и $s$.

Так как $H_{\frac{1}{2}} = (1/2)A + (1/2)X$, то в $H_{\frac{1}{2}}$ можно вложить шар радиуса $(1/2)r_A$. Поэтому $r_{\frac{1}{2}} \ge (1/2)r_A > 0$. Из (2) и (11) при $\varepsilon < C_7$ имеем

$$(1/2)V^{1/n}(A)(1+s) \le V^{1/n}\left(H_{\frac{1}{2}}\right) \le V^{1/n}(A)(1+s).$$

Откуда получаем оценки для $s_1$

$$0 < \frac{1}{1+s} \le s_1 \le \frac{2}{1+s}.$$

Пусть $D_{\frac{1}{2}}$ — диаметр $H_{\frac{1}{2}}$. Тогда $V\left(H_{\frac{1}{2}}\right) \ge \frac{1}{n}D_{\frac{1}{2}}((1/2)r_A)^{n-1}\mathcal{V}_{n-1}$. Отсюда и из (11) при $\varepsilon < C_7$ следует, что $D_{\frac{1}{2}}$ допускает оценку сверху, зависящую от $n$, $r_A$, $R_A$ и $s$. Известно [1], что $R_{\frac{1}{2}} \leq D_{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{n}{2n+2}}$. Поэтому и $R_{\frac{1}{2}} < C_{11}$, где $C_{11}$ зависит от $n$, $r_A$, $R_A$ и $s$. Следовательно, $C_{10} \geq \frac{1}{C_5}\left(\frac{((1/2)r_A)^n}{2(1+s)}\mathcal{V}_n\right)^n = C_{12} > 0$, $C_3' < 12C_{11}/\left(((1/2)r_A)^n\mathcal{V}_n\right)$. Тогда при $\varepsilon < \min(C_7, C_{12})$ из последнего неравенства для $C_3'$ следует первая оценка в (12). Вторая оценка в (12) может быть получена из (3) и равенства $V(X) = V\left(s_2 H_{\frac{1}{2}}\right)$, если к телам $H_{\frac{1}{2}}$ и X применить теорему 1. Она имеет место при $\varepsilon < \min(C_7, C_{13})$, где $C_{13}$ получается из $C_{10}$, если в $C_{10}$ заменить $C_5$ на $C_6$, $r_{\frac{1}{2}}$ — на $(1/2)r_A$, $s_1$ — на оценку снизу для $s_2$, которая вытекает из равенства $s_2 = ss_1$. Таким образом, при $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_1 = \min(C_7, C_{12}, C_{13})$ имеют место обе оценки в (12).

Покажем, наконец, что при $\varepsilon < \varepsilon_1$ выполняется оценка

$$\delta(sA, X) < C_4\varepsilon^{1/n}.$$

Известно [6], что для любых выпуклых тел $A$ и $B$ в $R^n$

$$\rho(A, B) = \max_{\vec{u}\in\Omega}|H_A(\vec{u}) - H_B(\vec{u})|,$$

где $\Omega$ — единичная сфера в $R^n$ с центром в начале координат, $H_A(\vec{u})$, $H_B(\vec{u})$ — опорные функции тел $A$ и $B$. Если $\lambda > 0$, то $H_{\lambda A}(\vec{u}) = \lambda H_A(\vec{u})$. Поэтому $\rho(\lambda A, \lambda B) = \lambda\rho(A, B)$. Заметим, что если $(\widetilde{\lambda B})$ — тело, полученное из $\lambda B$ параллельным сдвигом, то найдется тело $\widetilde{B}$, которое получено из $B$ параллельным сдвигом такое, что $\lambda\widetilde{B} = (\widetilde{\lambda B})$. Поэтому и $\delta(\lambda A, \lambda B) = \lambda\delta(A, B)$.

Так как $s_1$, $s_2 > 0$, то при $\varepsilon < \varepsilon_1$ из (12) имеем

$$\delta\left(H_{\frac{1}{2}}, \frac{1}{s_1}A\right) = \frac{1}{s_1}\delta\left(s_1 H_{\frac{1}{2}}, A\right) < \frac{1}{s_1}C_8\varepsilon^{\frac{1}{n}},$$
$$\delta\left(H_{\frac{1}{2}}, \frac{1}{s_2}X\right) = \frac{1}{s_2}\delta\left(s_2 H_{\frac{1}{2}}, X\right) < \frac{1}{s_2}C_9\varepsilon^{\frac{1}{n}}.$$

Если $\widetilde{A}$ и $\widetilde{X}$ — такие выпуклые тела, что

$$\delta\left(H_{\frac{1}{2}}, \frac{1}{s_1}A\right) = \rho\left(H_{\frac{1}{2}}, \frac{1}{s_1}\widetilde{A}\right),\ \delta\left(H_{\frac{1}{2}}, \frac{1}{s_2}X\right) = \rho\left(H_{\frac{1}{2}}, \frac{1}{s_2}\widetilde{X}\right),$$

то

$$\delta\left(\frac{1}{s_1}A, \frac{1}{s_2}X\right) = \delta\left(\frac{1}{s_1}\widetilde{A}, \frac{1}{s_2}\widetilde{X}\right) \leq \rho\left(\frac{1}{s_1}\widetilde{A}, \frac{1}{s_2}\widetilde{X}\right)$$
$$\leq \rho\left(\frac{1}{s_1}\widetilde{A}, H_{\frac{1}{2}}\right) + \rho\left(H_{\frac{1}{2}}, \frac{1}{s_2}\widetilde{X}\right) = \delta\left(H_{\frac{1}{2}}, \frac{1}{s_1}A\right) + \delta\left(H_{\frac{1}{2}}, \frac{1}{s_2}X\right).$$

Тогда при $\varepsilon < \varepsilon_1$

$$\delta(sA, X) = \delta(\frac{s_2}{s_1}A, X) = s_2\delta(\frac{1}{s_1}A, \frac{1}{s_2}X)$$
$$< s_2\left(\frac{1}{s_1}C_8\varepsilon^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{s_2}C_9\varepsilon^{\frac{1}{n}}\right) = (sC_8 + C_9)\varepsilon^{\frac{1}{n}} = C_4\varepsilon^{\frac{1}{n}}.$$

## Список литературы


[1] *T. Bonnesen und W. Fenchel*, Theorie der konvexen Körper. Berlin, (1934).

[2] *В.И. Дискант*, Уточнения изопериметрического неравенства и теоремы устойчивости в теории выпуклых тел. — Тр. ин-та мат. СО АН СССР (1989), т. 14, с. 98–132.

[3] *H. Groemer*, On the Brunn–Minkowski theorem. — Geom. Dedic. (1988), v. 27, № 3, p. 357–371.

[4] *R. Schneider*, On the general Brunn–Minkowski theorem. — Beitr. Algebra and Geom. (1993), v. 34, № 1, p. 1–8.

[5] *H. Groemer*, Stability of geometric inequalities. — Handbook of convex geometry (1993), v. A.B., p. 125–150.

[6] *К. Лейхтвейс*, Выпуклые множества. Наука, Москва (1985).


## Stability of Minkowski and Brunn's equations solutions

V.I. Diskant


The following theorem of stability of Minkowski and Brunn's equations solutions are proved.

**Theorem 1.** *If*

$$V_1^n(A,X) - V(X)V^{n-1}(A) < \varepsilon, 0 \le \varepsilon < \varepsilon_0, V(X) = V(sA), s > 0,$$

*then* $\delta(sA,X) < C\varepsilon^{1/n}$.

**Theorem 2.** *If*

$$V^{1/n}(H_{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}V^{1/n}(A) - \frac{1}{2}V^{1/n}(X) < \varepsilon, 0 \le \varepsilon < \varepsilon_0, V(X) = V(sA), s > 0,$$

*then* $\delta(sA,X) < C\varepsilon^{1/n}$.

In these theorems $A$ and $X$ — convex bodies in $R^n$, $V(A)$ — volume $A$, $V_1(A,X)$ — the first mixed volume $A$ and $X$, $H_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}X$, $\delta(sA,X)$ — deflection of $sA$ and $X$ bodies, $C$ and $\varepsilon_0$ are determined by task $s$, $n$, $r_A$ and $R_A$ ($r_A$ — radius of ball entered in $A$, $R_A$ — described about $A$).

## Стійкість розв'язків рівнянь Мінковського і Брунна

В.І. Діскант


Доведено наступні теореми стійкості розв'язків рівнянь Мінковського і Брунна.

**Теорема 1.** *Якщо*

$$V_1^n(A,X) - V(X)V^{n-1}(A) < \varepsilon, 0 \le \varepsilon < \varepsilon_0, V(X) = V(sA), s > 0,$$

*то* $\delta(sA, X) < C\varepsilon^{1/n}$.

**Теорема 2.** *Якщо*

$$V^{1/n}(H_{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}V^{1/n}(A) - \frac{1}{2}V^{1/n}(X) < \varepsilon, 0 \le \varepsilon < \varepsilon_0, V(X) = V(sA), s > 0,$$

*то* $\delta(sA, X) < C\varepsilon^{1/n}$.

В цих теоремах $A$ і X — опуклі тіла в $R^n$, $V(A)$ — об'єм $A$, $V_1(A,X)$ — перший мішаний об'єм $A$ і $X$, $H_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}X$, $\delta(sA,X)$ — відхилення тіл $sA$ і X, C і $\varepsilon_0$ визначаються заданням $s$, $n$, $r_A$ і $R_A$ ($r_A$ і $R_A$ — радіуси вписаної в $A$ та описаної навколо $A$ куль).