Математическая физика, анализ, геометрия
1999, т. 6, № 3/4, с. 264–287

Методы построения оптимальных по быстродействию управлений для канонических управляемых систем

В.И. Коробов, Г.М. Скляр, В.В. Флоринский

Харьковский государственный университет
Украина, 310077, Харьков, пл. Свободы, 4
Szczecin Institute of Mathematics, 15 Wielkopolska, Szczecin, Poland
Белгородский государственный педагогический университет,
Россия, г. Белгород, ул. Студенческая,12

E-mail: korobov@mathem.kharkov.ua
E-mail: korobov@sus.univ.szczecin.pl
E-mail: sklyar@mathem.kharkov.ua
E-mail: sklyar@sus.univ.szczecin.pl
E-mail: flor@bgpu.belgorod.su

Статья поступила в редакцию 14 мая 1997 года

Получены новые методы нахождения моментов переключения оптимального по быстродействию управления для канонической системы произвольного порядка. На этой основе предлагаются численные методы решения задачи быстродействия для систем с двумерным управлением.

Существенное развитие теории линейного быстродействия получено в последние годы на основе изучения ее связи с классической проблемой моментов и привлечения аналитических идей и методов, традиционно используемых в этой проблеме [1–4]. Одним из центральных пунктов в таком подходе стало исследование задачи быстродействия для канонической системы:

$$\dot{x}_1 = u, \quad |u| \le 1,$$
$$\dot{x}_i = x_{i-1}, \quad i = 2, \ldots, n,$$
$$x(0) = x_0, \quad x(\Theta) = 0, \quad \Theta \to \min\,. \tag{1}$$

В [1] показано, что эта задача эквивалентна степенной проблеме моментов на минимально возможном отрезке. Изучение задачи (1) с таких позиций позволило впервые получить [1] ее аналитическое решение для произвольного порядка системы n: даны методы нахождения управления $u(t)$, времени оптимального быстродействия Θ и последовательного нахождения моментов переключения $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$.

Принципиальное место в указанном подходе сыграло введение и исследования некоторой системы специальных многочленов $\alpha_k(x,\Theta)$ и $\beta_k(x,\Theta)$, $k=1,\ldots,n$, называемых каноническими переменными.

Существенная часть данной работы посвящена развитию результатов работы [1]. Получены уравнения для нахождения моментов переключения, которые имеют симметричный вид. Для этого вводятся новые (сопряженные) канонические переменные $\bar{\alpha}_k(x,\Theta)$ и $\bar{\beta}_k(x,\Theta)$, $k=1,\ldots,n$. При этом управление и время оптимального быстродействия Θ определяются так же, как и в работе [1].

В работе [5] показано, что решение задачи

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad |u| \le 1,$$

$$x(0) = x, \quad x(\Theta) = 0, \quad \Theta \to \min,$$
$$rank(b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b) = n \tag{2}$$

с произвольной матрицей A может быть сведено к решению задачи (2) с такой матрицей A, которая допускает точное решение. Задача быстродействия для исходной системы в этом случае сводится к отысканию неподвижной точки некоторого отображения. Для ее нахождения методом последовательного приближения на каждом шаге используется решение системы (2), которая допускает точное решение.

Представляет интерес вопрос о решении задачи быстродействия с двумерным управлением, основанном на степенной проблеме моментов. Этому посвящена заключительная часть статьи, в которой предлагаются численные методы.

1. Канонические переменные

Для решения задачи (1) в работе [1] были введены две последовательности полиномов $\alpha_k(x,\Theta)$ и $\beta_k(x,\Theta)$ следующими уравнениями:

$$\alpha_1 = \frac{\Theta - x_1}{2}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & 2\alpha_2 & \ldots & (k-1)\alpha_{k-1} & k\alpha_k \\ -1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{k-2} & \alpha_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & \alpha_1 \end{vmatrix} = \frac{\Theta^k + (-1)^k k! x_k}{2},$$
$$k = 2, \ldots, n; \tag{1.1}$$

$$\beta_1=\frac{\Theta+x_1}{2},\quad \begin{vmatrix} \beta_1 & 2\beta_2 & \dots & (k-1)\beta_{k-1} & k\beta_k \\ -1 & \beta_1 & \dots & \beta_{k-2} & \beta_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \beta_1 \end{vmatrix} = \frac{\Theta^k-(-1)^k k! x_k}{2},$$

$$k=2,\dots,n. \tag{1.2}$$

Обозначим через $\tilde{u}$ управление на последнем интервале $[T_{n-1},\Theta]$. Если $\tilde{u}=-1$, то $\tilde{u}$ будем называть управлением первого рода, если $\tilde{u}=+1$, то это — управление второго рода [1]. Введем в рассмотрение последовательность полиномов $\gamma_k(x,\Theta,\tilde{u})$ следующим образом:

$$\gamma_k(x,\Theta,\tilde{u})=\begin{cases} \alpha_k(x,\Theta), & \text{если} \quad \tilde{u}=-1; \\ \beta_k(x,\Theta), & \text{если} \quad \tilde{u}=+1. \end{cases} \tag{1.3}$$

Тогда, используя равенства (1.1) и (1.2), последовательность $\gamma_k(x,\Theta,\tilde{u})$ можно получить из аналогичных уравнений:

$$\gamma_1=\frac{\Theta-\tilde{u}x_1}{2},\quad \begin{vmatrix} \gamma_1 & 2\gamma_2 & \dots & (k-1)\gamma_{k-1} & k\gamma_k \\ -1 & \gamma_1 & \dots & \gamma_{k-2} & \gamma_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \gamma_1 \end{vmatrix} = \frac{\Theta^k-(-1)^k \tilde{u} k! x_k}{2},$$

$$k=2,\dots,n. \tag{1.4}$$

Обозначим правые части равенств (1.4), (1.1) и (1.2) через G_k, A_k, B_k, т.е.

$$G_k=\frac{\Theta^k+(-1)^{k+1}\tilde{u}k!x_k}{2},\quad k=1,\dots,n; \tag{1.5}$$

$$A_k=\frac{\Theta^k+(-1)^{k}k!x_k}{2},\quad k=1,\dots,n; \tag{1.5а}$$

$$B_k=\frac{\Theta^k+(-1)^{k+1}k!x_k}{2},\quad k=1,\dots,n. \tag{1.5б}$$

Очевидно, что

$$G_k=\begin{cases} A_k, & \text{если} \quad \tilde{u}=-1; \\ B_k, & \text{если} \quad \tilde{u}=+1. \end{cases} \tag{1.6}$$

Раскрывая определитель в равенстве (1.4) по последнему столбцу, получим

$$G_k=\sum_{i=1}^{k-1}\gamma_i G_{k-i}+k\gamma_k,\quad k=1,\dots,n. \tag{1.7}$$

Отсюда следует рекуррентная формула для γ_k:

$$\gamma_1 = \frac{\Theta + \tilde{u}x_1}{2}, \quad \gamma_k = \frac{1}{k}(G_k - \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i G_{k-i}), \quad k = 2, \ldots, n. \tag{1.8}$$

Аналогичным образом введем последовательности полиномов $\bar{\alpha}_k(x, \Theta), \bar{\beta}_k(x, \Theta), \bar{\gamma}_k(x, \Theta, \tilde{u})$:

$$\bar{\alpha}_1 = -\frac{\Theta - x_1}{2}, \quad \begin{vmatrix} \bar{\alpha}_1 & 2\bar{\alpha}_2 & \ldots & (k-1)\bar{\alpha}_{k-1} & k\bar{\alpha}_k \\ -1 & \bar{\alpha}_1 & \ldots & \bar{\alpha}_{k-2} & \bar{\alpha}_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & \bar{\alpha}_1 \end{vmatrix} = -\frac{\Theta^k + (-1)^k k! x_k}{2},$$

$$k = 2, \ldots, n; \tag{1.9}$$

$$\bar{\beta}_1 = -\frac{\Theta + x_1}{2}, \quad \begin{vmatrix} \bar{\beta}_1 & 2\bar{\beta}_2 & \ldots & (k-1)\bar{\beta}_{k-1} & k\bar{\beta}_k \\ -1 & \bar{\beta}_1 & \ldots & \bar{\beta}_{k-2} & \bar{\beta}_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & \bar{\beta}_1 \end{vmatrix} = -\frac{\Theta^k - (-1)^k k! x_k}{2},$$

$$k = 2, \ldots, n; \tag{1.10}$$

$$\bar{\gamma}_1 = -\frac{\Theta + \tilde{u}x_1}{2}, \quad \begin{vmatrix} \bar{\gamma}_1 & 2\bar{\gamma}_2 & \ldots & (k-1)\bar{\gamma}_{k-1} & k\bar{\gamma}_k \\ -1 & \bar{\gamma}_1 & \ldots & \bar{\gamma}_{k-2} & \bar{\gamma}_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & \bar{\gamma}_1 \end{vmatrix} = -\frac{\Theta^k - (-1)^k \tilde{u} k! x_k}{2},$$

$$k = 2, \ldots, n. \tag{1.11}$$

Откуда видно, что

$$\bar{\gamma}_k(x, \Theta, \tilde{u}) = \begin{cases} \bar{\alpha}_k(x, \Theta), & \text{если} \quad \tilde{u} = -1; \\ \bar{\beta}_k(x, \Theta), & \text{если} \quad \tilde{u} = +1. \end{cases} \tag{1.12}$$

Обозначим правые части равенств (1.9), (1.10) и (1.11) через $\bar{A}_k, \bar{B}_k, \bar{G}_k$ соответственно, т.е.

$$\bar{G}_k = -\frac{\Theta^k + (-1)^{k+1} \tilde{u} k! x_k}{2}, \quad k = 1, \ldots, n; \tag{1.13}$$

$$\bar{A}_k = -\frac{\Theta^k + (-1)^k k! x_k}{2}, \quad k = 1, \ldots, n; \tag{1.13a}$$

$$\bar{B}_k = -\frac{\Theta^k + (-1)^{k+1}k!x_k}{2}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{1.13б}$$

Очевидно, что

$$\bar{G}_k = \begin{cases} \bar{A}_k, & \text{если} \quad \tilde{u} = -1; \\ \bar{B}_k, & \text{если} \quad \tilde{u} = +1. \end{cases} \tag{1.14}$$

Раскрывая определитель в равенстве (1.11) по последнему столбцу, получим равенство, аналогичное (1.7):

$$\bar{G}_k = \sum_{i=1}^{k-1} \bar{\gamma}_i \bar{G}_{k-i} + k\bar{\gamma}_k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{1.15}$$

Отсюда следует рекуррентная формула, аналогичная (1.8):

$$\bar{\gamma}_1 = -\frac{\Theta + \tilde{u}x_1}{2}, \quad \bar{\gamma}_k = \frac{1}{k}(\bar{G}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \bar{\gamma}_i \bar{G}_{k-i}), \quad k = 2, \ldots, n. \tag{1.16}$$

З а м е ч а н и е 1.1. Канонические переменные γ_k можно вычислять, используя явную формулу

$$\gamma_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \begin{vmatrix} G_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ G_2 & G_1 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{k-1} & G_{k-2} & G_{k-3} & \ldots & k-1 \\ G_k & G_{k-1} & G_{k-2} & \ldots & G_1 \end{vmatrix}, \quad k = 1, \ldots, n; \tag{1.17}$$

если в данной формуле заменить γ_k и G_k на $\bar{\gamma}_k$ и $\bar{G}_k$ соответственно, то получим аналогичную формулу для вычисления переменных $\bar{\gamma}_k$.

Из равенств (1.5) и (1.13) видно, что

$$\bar{G}_k = -G_k, \quad \bar{A}_k = -A_k, \quad \bar{B}_k = -B_k.$$

Как и в работе [1], дополним систему (1) уравнением $\dot{\Theta} = -1$ и рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u, \\ \dot{x}_i &= x_{i-1}, \\ \dot{\Theta} &= -1. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Тогда имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1.1. *Полиномы $\bar{\gamma}_k(x, \Theta, \tilde{u})$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений*

$$\dot{\bar{\gamma}}_k = -(k-1)\bar{\gamma}_{k-1}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{1.19}$$

и системе

$$\dot{\bar{\gamma}}_1 = 1, \quad \dot{\bar{\gamma}}_k = -k\bar{\gamma}_{k-1}, \quad k = 2, \dots, n, \tag{1.20}$$

где производные $\dot{\bar{\gamma}}_k$ в (1.19) и (1.20) берутся в силу системы (1.18) с управлением $u = \tilde{u}$ и $u = -\tilde{u}$ соответственно.

Доказательство. Доказывать будем по индукции.

При $k = 1$

$$\dot{\bar{\gamma}}_1 = -\frac{\dot{\Theta} + \tilde{u}\dot{x}_1}{2} = -\frac{-1 + u\tilde{u}}{2} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad u = \tilde{u}; \\ 1, & \text{если} \quad u = -\tilde{u}. \end{cases}$$

Предположим справедливость утверждения для $1 \le k \le s \le n-1$ и докажем для $k = s+1$. Продифференцируем равенство (1.15) при $k = s+1$:

$$\dot{\bar{G}}_{s+1} = \sum_{i=1}^{s} \dot{\bar{\gamma}}_i \bar{G}_{s-i+1} + \sum_{i=1}^{s} \bar{\gamma}_i \dot{\bar{G}}_{s-i+1} + (s+1)\dot{\bar{\gamma}}_{s+1}. \tag{1.21}$$

Продифференцируем равенство (1.13):

$$\dot{\bar{G}}_k = -\frac{k\Theta^{k-1}\dot{\Theta} + (-1)^{k+1}\tilde{u}k!\dot{x}_k}{2} = k\frac{\Theta^{k-1} + (-1)^k\tilde{u}(k-1)!x_{k-1}}{2} = -k\bar{G}_{k-1},$$

т.е.

$$\dot{\bar{G}}_1 = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad u = \tilde{u}; \\ 1, & \text{если} \quad u = -\tilde{u}; \end{cases} \qquad \dot{\bar{G}}_k = -k\bar{G}_{k-1}, \quad k = 2, \dots, n. \tag{1.22}$$

Для $u = \tilde{u}$ из предположения индукции и равенств (1.21) и (1.22) получаем

$$-(s+1)\bar{G}_s = -\sum_{i=1}^{s}(i-1)\bar{\gamma}_{i-1}\bar{G}_{s-i+1} - \sum_{i=1}^{s-1}(s-i+1)\bar{\gamma}_i\bar{G}_{s-i} + (s+1)\dot{\bar{\gamma}}_{s+1}$$

$$= -\sum_{i=1}^{s-1}(i\bar{\gamma}_i\bar{G}_{s-i} + (s-i+1)\bar{\gamma}_i\bar{G}_{s-i}) + (s+1)\dot{\bar{\gamma}}_{s+1} = -(s+1)\sum_{i=1}^{s-1}\bar{\gamma}_i\bar{G}_{s-i} + (s+1)\dot{\bar{\gamma}}_{s+1}.$$

Откуда

$$\dot{\bar{\gamma}}_{s+1} = -\bar{G}_s + \sum_{i=1}^{s-1}\bar{\gamma}_i\bar{G}_{s+1}.$$

Используя равенство (1.16), имеем $\dot{\bar{\gamma}}_{s+1} = -s\bar{\gamma}_s$, что доказывает справедливость (1.19).

Для $u = -\tilde{u}$ из равенств (1.21) и (1.22) получаем

$$-(s+1)\bar{G}_s = \bar{G}_s - \sum_{i=2}^{s} i\gamma_{i-1}\bar{G}_{s-i+1} - \sum_{i=1}^{s-1}(s-i+1)\bar{\gamma}_i\bar{G}_{s-i} + \bar{\gamma}_s + (s+1)\dot{\bar{\gamma}}_{s+1}$$

$$= -(s+2)\sum_{i=1}^{s-1}\bar{\gamma}_i\bar{G}_{s-i} + \bar{G}_s + \bar{\gamma}_s + (s+1)\dot{\bar{\gamma}}_{s+1}.$$

Откуда

$$\dot{\bar{\gamma}}_{s+1} = \frac{1}{s+1}\left[(s+2)\left(\sum_{i=1}^{s-1}\bar{\gamma}_i\bar{G}_{s-i} - \bar{G}_s\right) - \bar{\gamma}_s\right].$$

Так как из равенства (1.15) при $k = s$ имеет место

$$\sum_{i=1}^{s-1}\bar{\gamma}_i\bar{G}_{s-i} = \bar{G}_s - s\bar{\gamma}_s,$$

то получаем, что

$$\dot{\bar{\gamma}}_{s+1} = \frac{1}{s+1}\left[-(s+2)\bar{G}_S - \bar{\gamma} + (s+2)(\bar{G}_s + s\bar{\gamma}_s)\right] = -(s+1)\bar{\gamma}_s.$$

То есть $\dot{\bar{\gamma}}_{s+1} = -(s+1)\bar{\gamma}_s$, что доказывает справедливость (1.20).

Воспользуемся обозначениями работы [1]. Рассмотрим матрицу

$$[\Gamma] =$$

$$\begin{pmatrix}
\dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n & \dots \\
\dots & 0 & 0 & \dots & -1 & -\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \dots & \gamma_{n+1} & \dots \\
\dots & 0 & 0 & \dots & \gamma_1 & -\gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \dots & \gamma_{n+2} & \dots \\
\ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\
\dots & 0 & (-1)^{n-2} & \dots & \gamma_{n-3} & -\gamma_{n-2} & \gamma_{n-1} & \gamma_n & \dots & \gamma_{2n-2} & \dots \\
\dots & (-1)^{n-1} & (-1)^{n-1}\gamma_1 & \dots & \gamma_{n-2} & -\gamma_{n-1} & \gamma_n & \gamma_{n+1} & \dots & \gamma_{2n-1} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{pmatrix}.$$

Столбцы этой матрицы имеют целочисленную нумерацию от $-\infty$ до $+\infty$, и столбец с первым элементом γ_1 имеет номер 1.

Обозначим $\Gamma_{l_1,l_2,\dots,l_k}$ определитель $k \times k$, полученный из матрицы $[\Gamma]$ выбором k столбцов с номерами $l_1, l_2, \dots, l_k$, где $l_1 < l_2 < \dots < l_k$ и первых k строк.

В дальнейшем подразумевается, что

$$\Gamma_{2,\dots,i+1,i+3,\dots,p+1}\big|_{i=0} = \Gamma_{3,4,\dots,p+1},$$

$$\Gamma_{2,\dots,i+1,i+3,\dots,p+1}\big|_{i=p+1} = \Gamma_{2,3,\dots,p}.$$

Если элементами матрицы $[\Gamma]$ являются канонические переменные α, β, γ, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, то соответствующие им определители будем обозначать A, B, Γ, $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{\Gamma}$ соответственно.

2. Уравнения для нахождения моментов переключения

Теорема 2.1. *Пусть для системы (1) время оптимального быстродействия Θ. Тогда моменты переключения T_i, $i = 1, \dots, n-1$, оптимального управления $u(t)$ определяются как корни следующих уравнений:*

1) для $n = 2p$

$$\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{p-i-1} \Gamma_{2,\dots,i+1,i+3,\dots,p+1}(x, \Theta, \tilde{u}) z^i = 0 \tag{2.1}$$

или

$$\begin{vmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 & \dots & \gamma_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_p & \gamma_{p+1} & \dots & \gamma_{2p-1} \\ 1 & z & \dots & z^{p-1} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.1a}$$

для нахождения четных моментов переключения $T_2, T_4, \dots, T_{2p-2}$, и

$$\sum_{i=0}^{p} (-1)^{p-i} \bar{\Gamma}_{0,\dots,i-1,i+1,\dots,p}(x, \Theta, \tilde{u}) z^i = 0 \tag{2.2}$$

или

$$\begin{vmatrix} 1 & \bar{\gamma}_1 & \dots & \bar{\gamma}_p \\ -\bar{\gamma}_1 & \bar{\gamma}_2 & \dots & \bar{\gamma}_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{\gamma}_{p-1} & \bar{\gamma}_p & \dots & \bar{\gamma}_{2p-1} \\ -1 & z & \dots & z^p \end{vmatrix} = 0 \tag{2.2a}$$

для нахождения нечетных моментов переключения $T_1, T_3, \dots, T_{2p-1}$;

2) для $n = 2p-1$

$$\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{p-i-1} \bar{\Gamma}_{1,\dots,i,i+2,\dots,p}(x, \Theta, \tilde{u}) z^i = 0 \tag{2.3}$$

или

$$\begin{vmatrix} \bar{\gamma}_1 & \bar{\gamma}_2 & \dots & \bar{\gamma}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\gamma}_{p-1} & \bar{\gamma}_p & \dots & \bar{\gamma}_{2p-2} \\ 1 & z & \dots & z^{p-1} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.3a}$$

для нахождения четных моментов переключения $T_2, T_4, \dots, T_{2p-2}$, и

$$\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{p-i-1} \Gamma_{1,\dots,i,i+2,\dots,p}(x, \Theta, \tilde{u}) z^i = 0 \tag{2.4}$$

или

$$\begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \gamma_p & \cdots & \gamma_{2p-2} \\ 1 & z & \ldots & z^{p-1} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.4a}$$

для нахождения нечетных моментов переключения $T_1, T_3, \ldots, T_{2p-3}$.

Доказательство. Так как оптимальное по быстродействию управление является кусочно-постоянной функцией на интервале $[0, \Theta]$ и принимает значения на отрезке $[T_{i-1}, T_i]$ либо $+1$, либо -1, то для определения моментов переключения имеем следующую систему равенств:

$$(-1)^k x_k = (-1)^{n+1} \frac{2\tilde{u}}{k!} \left[\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} T_i^k + (-1)^{n+1} \frac{T_n^k}{2} \right], \quad k = 1, \ldots, n, \tag{2.5}$$

где $T_n = \Theta$.

Здесь имеем две системы равенств: для начальных точек x, которые переводятся в начало координат управлением первого рода, мы имеем $\tilde{u} = -1$, в противном случае $\tilde{u} = +1$. Учитывая, что $\tilde{u} = \pm 1$ (т.е. $\tilde{u} = 1/\tilde{u}$), равенства (2.5) можно записать в следующем виде:

$$\frac{T_n^k + (-1)^{k+1} \tilde{u} k! x_k}{2} = (-1)^n \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} T_i^k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Дополним G_k для $k \geq n+1$ равенствами

$$G_k = (-1)^n \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} T_i^k.$$

Далее будем рассматривать бесконечную систему равенств

$$(-1)^n \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} T_i^k = G_k; \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.6}$$

в ней $G_1, \ldots, G_n$ определяются равенствами (1.5).

Пусть $n = 2p$. Разделим равенства (2.6) на kz^k и запишем эти равенства для $k = 1, 2, \ldots$:

$$\frac{T_1}{z} - \frac{T_2}{z} + \frac{T_3}{z} - \ldots + \frac{T_{n-1}}{z} = \frac{G_1}{z},$$

$$\frac{T_1^2}{2z^2} - \frac{T_2^2}{2z^2} + \frac{T_3^2}{2z^2} - \ldots + \frac{T_{n-1}^2}{2z^2} = \frac{G_2}{2z^2},$$

$$\frac{T_1^3}{3z^3} - \frac{T_2^3}{3z^3} + \frac{T_3^3}{3z^3} - \ldots + \frac{T_{n-1}^3}{3z^3} = \frac{G_3}{3z^3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .$$

Складывая все равенства и используя разложение функции $\ln(1 - T_i/z)$ в ряд Тейлора, получим

$$-\ln\left(1 - \frac{T_1}{z}\right) + \ln\left(1 - \frac{T_2}{z}\right) - \ln\left(1 - \frac{T_3}{z}\right) + \ldots - \ln\left(1 - \frac{T_{n-1}}{z}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_k}{kz^k}$$

или

$$\ln \frac{(z-T_1)(z-T_3)\ldots(z-T_{n-1})}{z(z-T_2)(z-T_4)\ldots(z-T_{n-2})} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_k}{kz^k}. \tag{2.7}$$

Разложим рациональную функцию

$$\frac{(z-T_1)(z-T_3)\ldots(z-T_{n-1})}{z(z-T_2)(z-T_4)\ldots(z-T_{n-2})} \tag{2.8}$$

в ряд по степеням $1/z$. Это разложение имеет вид

$$\frac{(z-T_1)(z-T_3)\ldots(z-T_{n-1})}{z(z-T_2)(z-T_4)\ldots(z-T_{n-2})} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{z^k}. \tag{2.9}$$

Тогда

$$\ln\left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{z^k}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_k}{kz_k}. \tag{2.10}$$

Отсюда нетрудно показать, что связь между переменными γ_k и G_k дается формулами (1.1), (1.2), а с учетом обозначений (1.3) — формулами (1.8) или непосредственная зависимость переменной γ_k от $G_1, \ldots, G_k$ задается формулой (1.17).

Обозначим полиномы числителя и знаменателя рациональной функции (2.8) следующим образом:

$$(z-T_1)(z-T_3)\ldots(z-T_n) = z^p + a_1 z^{p-1} + a_2 z^{p-2} + \ldots + a_p, \tag{2.11}$$

$$z(z-T_2)(z-T_4)\ldots(z-T_{n-2}) = z^p + b_1 z^{p-1} + b_2 z^{p-2} + \ldots + b_{p-1} z. \tag{2.12}$$

Тогда равенство (2.9) можно переписать в виде

$$z^p + a_1 z^{p-1} + a_2 z^{p-2} + \ldots + a_p$$
$$= (z^p + b_1 z^{p-1} + b_2 z^{p-2} + \ldots + b_{p-1} z)\left(1 - \frac{\gamma_1}{z} - \frac{\gamma_2}{z^2} - \ldots - \frac{\gamma_k}{z^k} - \ldots\right).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых отрицательных степенях z от -1 до $-p$ и учитывая, что в левой части равенства коэффициенты при отрицательных степенях z нулевые, получим линейную систему

$$\begin{gathered}\gamma_2 b_{p-1}+\gamma_3 b_{p-2}+\ldots+\gamma_p b_1+\gamma_{p+1}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \gamma_{p+1}b_{p-1}+\gamma_{p+2}b_{p-2}+\ldots+\gamma_{2p-1}b_1+\gamma_{2p}=0.\end{gathered}\tag{2.13}$$

Поскольку эта система линейных уравнений имеет нетривиальное решение $b_{p-1},\ldots,b_1,1$, то определитель этой системы

$$\begin{vmatrix}\gamma_2 & \cdots & \gamma_{p+1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \gamma_{p+1} & \cdots & \gamma_{2p}\end{vmatrix}=0.\tag{2.14}$$

Переменные $\gamma_i \quad (i=2,\ldots,2p)$ являются в силу(1.4) полиномами i-й степени от времени быстродействия Θ, начальной точки x и $\tilde{u}$. Поэтому время быстродействия Θ является корнем уравнения (2.14). Выбор корня Θ определяется теоремой 1 или следствием 1 из теоремы 1 в [1].

Первые $p-1$ уравнения системы (2.13) можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix}\gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_p\\ \gamma_3 & \gamma_4 & \cdots & \gamma_{p+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \gamma_p & \gamma_{p+1} & \cdots & \gamma_{2p-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{p-1}\\ b_{p-2}\\ \vdots\\ b_1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\gamma_{p+1}\\ \gamma_{p+2}\\ \vdots\\ \gamma_{2p-1}\end{pmatrix}.$$

Откуда находим, что

$$b_1=-\frac{\Gamma_{2,3,\ldots,p-1,p+1}}{\Gamma_{2,3,\ldots,p}},\quad b_2=\frac{\Gamma_{2,3,\ldots,p-2,p,p+1}}{\Gamma_{2,3,\ldots,p}},\ldots,b_{p-1}=(-1)^{p-1}\frac{\Gamma_{3,4,\ldots,p+1}}{\Gamma_{2,3,\ldots,p}},$$

т.е.

$$b_i=(-1)^i\frac{\Gamma_{2,\ldots,p-i,p-i+2,\ldots,p+1}}{\Gamma_{2,3,\ldots,p}},\quad i=1,\ldots,p-1.$$

Тогда полином (2.12) можно записать в виде

$$z(z^{p-1}+b_1 z^{p-2}+\ldots+b_{p-1})=\frac{z}{\Gamma_{2,3,\ldots,p}}\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^{p-i-1}\Gamma_{2,\ldots,i+1,i+3,\ldots,p+1}(x,\Theta,\tilde{u})z^i$$

$$=\frac{z}{\Gamma_{2,3,\ldots,p}}\begin{vmatrix}\gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{p+1}\\ \gamma_3 & \gamma_4 & \cdots & \gamma_{p+2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \gamma_p & \gamma_{p+1} & \cdots & \gamma_{2p-1}\\ 1 & z & \ldots & z^{p-1}\end{vmatrix}=\frac{(-1)^{p-1}z}{\Gamma_{2,3,\ldots,p}}\begin{vmatrix}1 & z & \ldots & z^{p-1}\\ \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{p+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \gamma_p & \gamma_{p+1} & \cdots & \gamma_{2p-1}\end{vmatrix}.\tag{2.15}$$

Приравнивая полином (2.12) к нулю, получаем уравнение для определения четных моментов переключения $T_2, T_4, \ldots, T_{2p-2}$ при $n = 2p$:

$$\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^{p-i-1}\Gamma_{2,\ldots,i+1,i+3,\ldots,p+1}(x,\Theta,\tilde{u})z^i = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{p+1} \\ \gamma_3 & \gamma_4 & \cdots & \gamma_{p+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_p & \gamma_{p+1} & \cdots & \gamma_{2p-1} \\ 1 & z & \ldots & z^{p-1} \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. уравнения (2.1) или (2.1а) служат для определения четных моментов переключения.

Приступим к выводу уравнения относительно нечетных моментов переключения. Учитывая, что $G_k = -\bar{G}_k$, равенство (2.7) можно записать в виде

$$\ln\frac{z(z-T_2)\ldots(z-T_{n-2})}{(z-T_1)(z-T_3)\ldots(z-T_{n-1})} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{G}_k}{kz^k}. \tag{2.16}$$

Разложим рациональную функцию

$$\frac{z(z-T_2)\ldots(z-T_{n-2})}{(z-T_1)(z-T_3)\ldots(z-T_{n-1})} \tag{2.17}$$

в ряд по степеням $1/z$. Это разложение имеет вид

$$\frac{z(z-T_2)\ldots(z-T_{n-2})}{(z-T_1)(z-T_3)\ldots(z-T_{n-1})} = 1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{\gamma}_k}{z^k}. \tag{2.18}$$

Тогда

$$\ln\left(1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{\gamma}_k}{z^k}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{G}_k}{kz^k}. \tag{2.19}$$

Отсюда нетрудно показать, что связь между переменными $\bar{\gamma}_k$ и $\bar{G}_k$ дается формулами (1.11) или (1.16). При помощи формулы, аналогичной (1.17) для $\bar{\gamma}_k$ и $\bar{G}_k$, можно получать $\bar{\gamma}_k$ только используя $\bar{G}_1, \ldots, \bar{G}_k$.

Используя обозначения (2.11) и (2.12), запишем равенство (2.18) в виде

$$\begin{aligned} &z^p + b_1z^{p-1} + \ldots + b_{p-1}z \\ &= (z^p + a_1z^{p-1} + \ldots + a_p)\left(1-\frac{\bar{\gamma}_1}{z}-\frac{\bar{\gamma}_2}{z^2}-\ldots-\frac{\bar{\gamma}_k}{z^k}-\ldots\right). \end{aligned}$$

Как и в предыдущем случае, приравнивая коэффициенты при одинаковых неположительных степенях z от 0 до $1-p$, получим систему линейных уравнений относительно $a_i \quad (i = 1, \ldots, p)$:

$$\begin{gathered} -a_p + \bar{\gamma}_1 a_{p-1} + \ldots + \bar{\gamma}_{p-1} a_1 + \bar{\gamma}_p = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{\gamma}_{p-1} a_p + \bar{\gamma}_p a_{p-1} + \ldots + \bar{\gamma}_{2p-2} a_1 + \bar{\gamma}_{2p-1} = 0. \end{gathered} \tag{2.20}$$

В матричной форме эта система имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & \bar{\gamma}_1 & \ldots & \bar{\gamma}_{p-1} \\ \bar{\gamma}_1 & \bar{\gamma}_2 & \ldots & \bar{\gamma}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\gamma}_{p-1} & \bar{\gamma}_p & \ldots & \bar{\gamma}_{2p-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_p \\ a_{p-1} \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_p \\ \bar{\gamma}_{p+1} \\ \vdots \\ \bar{\gamma}_{2p-1} \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Откуда находим

$$a_i = (-1)^i \frac{\bar{\Gamma}_{0,\ldots,p-i-1,p-i+1,\ldots,p}}{\bar{\Gamma}_{0,1,\ldots,p-1}}, \quad i = 1, \ldots, p.$$

Тогда полином (2.11) запишется в виде

$$z^p + a_1 z^{p-1} + \ldots + a_p = \frac{1}{\bar{\Gamma}_{0,1,\ldots,p-1}} \sum_{i=0}^{p} (-1)^{p-i} \bar{\Gamma}_{0,\ldots,i-1,i+1,\ldots,p}(x, \Theta, \tilde{u}) z^i$$

$$= \frac{1}{\bar{\Gamma}_{0,1,\ldots,p-1}} \begin{vmatrix} -1 & \bar{\gamma}_1 & \ldots & \bar{\gamma}_p \\ -\bar{\gamma}_1 & \bar{\gamma}_2 & \ldots & \bar{\gamma}_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{\gamma}_{p-1} & \bar{\gamma}_p & \ldots & \bar{\gamma}_{2p-1} \\ -1 & z & \ldots & z^p \end{vmatrix} = \frac{(-1)^p}{\bar{\Gamma}_{0,1,\ldots,p-1}} \begin{vmatrix} -1 & z & \ldots & z^p \\ 1 & \bar{\gamma}_1 & \ldots & \bar{\gamma}_p \\ -\bar{\gamma}_1 & \bar{\gamma}_2 & \ldots & \bar{\gamma}_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{\gamma}_{p-1} & \bar{\gamma}_p & \ldots & \bar{\gamma}_{2p-1} \end{vmatrix}. \tag{2.22}$$

Приравнивая полином (2.11) к нулю, получим уравнение для нахождения нечетных моментов переключения $T_1, T_3, \ldots, T_{2p-1}$ при $n = 2p$:

$$\sum_{i=0}^{p} (-1)^{p-i} \bar{\Gamma}_{0,\ldots,i-1,i+1,\ldots,p}(x, \Theta, \tilde{u}) z^i = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} 1 & \bar{\gamma}_1 & \ldots & \bar{\gamma}_p \\ -\bar{\gamma}_1 & \bar{\gamma}_2 & \ldots & \bar{\gamma}_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{\gamma}_{p-1} & \bar{\gamma}_p & \ldots & \bar{\gamma}_{2p-1} \\ -1 & z & \ldots & z^p \end{vmatrix} = 0,$$

что доказывает справедливость (2.2) и (2.2a).

Пусть $n = 2p - 1$. Произведем преобразования, аналогичные преобразованиям для четного n. Получим равенства

$$\ln \frac{(z-T_1)(z-T_3)\dots(z-T_{n-2})}{(z-T_2)(z-T_4)\dots(z-T_{n-1})} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{G}_k}{z^k} \tag{2.23}$$

и

$$\ln \frac{(z-T_2)(z-T_4)\dots(z-T_{n-1})}{(z-T_1)(z-T_3)\dots(z-T_{n-2})} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_k}{z^k}. \tag{2.24}$$

Разлагая, как и ранее, рациональные функции, стоящие под знаком логарифма, в ряд по степеням $1/z$, получим равенства

$$\frac{(z-T_1)(z-T_3)\dots(z-T_{n-2})}{(z-T_2)(z-T_4)\dots(z-T_{n-1})} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\gamma}_k}{z^k} \tag{2.25}$$

и

$$\frac{(z-T_2)(z-T_4)\dots(z-T_{n-1})}{(z-T_1)(z-T_3)\dots(z-T_{n-2})} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{z^k}. \tag{2.26}$$

Обозначим полиномы, стоящие в числителе и знаменателе рациональной функции, так же как и в случае четного n, следующим образом:

$$(z-T_1)(z-T_3)\dots(z-T_{n-2}) = z^{p-1} + a_1 z^{p-2} + \dots + a_{p-1}, \tag{2.27}$$

$$(z-T_2)(z-T_4)\dots(z-T_{n-1}) = z^{p-1} + b_1 z^{p-2} + \dots + b_{p-1}. \tag{2.28}$$

Тогда равенство (2.25) можно записать в виде

$$\begin{gathered} z^{p-1} + a_1 z^{p-2} + \dots + a_{p-1} \\ = (z^{p-1} + b_1 z^{p-2} + \dots + b_{p-1}) \left(1 - \frac{\bar{\gamma}_1}{z} - \frac{\bar{\gamma}_2}{z^2} - \dots - \frac{\bar{\gamma}_k}{z^k} - \dots\right), \end{gathered}$$

а равенство (2.26) — в виде

$$\begin{gathered} z^{p-1} + b_1 z^{p-2} + \dots + b_{p-1} \\ = (z^{p-1} + a_1 z^{p-2} + \dots + a_{p-1}) \left(1 - \frac{\gamma_1}{z} - \frac{\gamma_2}{z^2} - \dots - \frac{\gamma_k}{z^k} - \dots\right). \end{gathered}$$

Как и в случае $n = 2p$, приравнивая коэффициенты при одинаковых отрицательных степенях z от -1 до $-p$, получим, что время быстродействия является корнем полинома

$$\begin{vmatrix} \gamma_1 & \cdots & \gamma_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_p & \cdots & \gamma_{2p-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда систему относительно $b_1, \ldots, b_{p-1}$ можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \bar\gamma_1 & \bar\gamma_2 & \cdots & \bar\gamma_{p-1} \\ \bar\gamma_2 & \bar\gamma_3 & \cdots & \bar\gamma_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar\gamma_{p-1} & \bar\gamma_p & \cdots & \bar\gamma_{2p-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{p-1} \\ b_{p-2} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \bar\gamma_p \\ \bar\gamma_{p+1} \\ \vdots \\ \bar\gamma_{2p-2} \end{pmatrix},$$

а относительно $a_1, \ldots, a_{p-1}$ — в виде

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{p-1} \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \gamma_p & \cdots & \gamma_{2p-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{p-1} \\ a_{p-2} \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \gamma_p \\ \gamma_{p+1} \\ \vdots \\ \gamma_{2p-2} \end{pmatrix},$$

решения которых

$$b_i = (-1)^{i-1} \frac{\bar\Gamma_{1,\ldots,p-i-1,p-i+1,\ldots,p}}{\bar\Gamma_{1,2,\ldots,p-1}}, \quad a_i = (-1)^i \frac{\Gamma_{1,\ldots,p-i-1,p-i+1,\ldots,p}}{\Gamma_{1,2,\ldots,p-1}},$$

$$i = 1, \ldots, p-1.$$

Подставляя полученные a_i и b_i в (2.27) и (2.28), можно записать:

$$z^{p-1} + a_1 z^{p-2} + \ldots + a_{p-1} = \frac{1}{\Gamma_{1,2,\ldots,p-1}} \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{p-i-1} \Gamma_{1,\ldots,i,i+2,\ldots,p}(x, \Theta, \tilde u) z^i$$

$$= \frac{1}{\Gamma_{1,2,\ldots,p-1}} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_p \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \gamma_p & \cdots & \gamma_{2p-2} \\ 1 & z & \ldots & z^{p-1} \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{p-1}}{\Gamma_{1,2,\ldots,p-1}} \begin{vmatrix} 1 & z & \ldots & z^{p-1} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_p \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \gamma_p & \cdots & \gamma_{2p-2} \end{vmatrix}, \tag{2.29}$$

$$z^{p-1} + b_1 z^{p-2} + \ldots + b_{p-1} = \frac{1}{\bar\Gamma_{1,2,\ldots,p-1}} \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{p-i-1} \bar\Gamma_{1,\ldots,i,i+2,\ldots,p}(x, \Theta, \tilde u) z^i$$

$$= \frac{1}{\bar\Gamma_{1,2,\ldots,p-1}} \begin{vmatrix} \bar\gamma_1 & \bar\gamma_2 & \cdots & \bar\gamma_p \\ \bar\gamma_2 & \bar\gamma_3 & \cdots & \bar\gamma_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar\gamma_{p-1} & \bar\gamma_p & \cdots & \bar\gamma_{2p-2} \\ 1 & z & \ldots & z^{p-1} \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{p-1}}{\bar\Gamma_{1,2,\ldots,p-1}} \begin{vmatrix} 1 & z & \ldots & z^{p-1} \\ \bar\gamma_1 & \bar\gamma_2 & \cdots & \bar\gamma_p \\ \bar\gamma_2 & \bar\gamma_3 & \cdots & \bar\gamma_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar\gamma_{p-1} & \bar\gamma_p & \cdots & \bar\gamma_{2p-2} \end{vmatrix}. \tag{2.30}$$

Так как нечетные моменты переключения служат корнями полинома (2.27), то приравниваем полином (2.27) к нулю и, пользуясь равенством (2.29), получим уравнения (2.4) и (2.4а) для нахождения всех нечетных моментов переключения. Аналогично получаем уравнения (2.3) и (2.3а) для нахождения всех четных моментов переключения.

Замечание 2.1. Уравнение для нахождения всех моментов переключения (четных и нечетных $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$) в случае $n = 2p$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 & \dots & \gamma_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_p & \gamma_{p+1} & \dots & \gamma_{2p-1} \\ 1 & z & \dots & z^{p-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \bar\gamma_1 & \dots & \bar\gamma_p \\ -\bar\gamma_1 & \bar\gamma_2 & \dots & \bar\gamma_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar\gamma_{p-1} & \bar\gamma_p & \dots & \bar\gamma_{2p-1} \\ -1 & z & \dots & z^p \end{vmatrix} = 0, \qquad (2.31)$$

а уравнение для нахождения всех моментов переключения для случая $n = 2p - 1$ — в виде

$$\begin{vmatrix} \bar\gamma_1 & \bar\gamma_2 & \dots & \bar\gamma_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar\gamma_{p-1} & \bar\gamma_p & \dots & \bar\gamma_{2p-2} \\ 1 & z & \dots & z^{p-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \gamma_p & \dots & \gamma_{2p-2} \\ 1 & z & \dots & z^{p-1} \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.32)$$

Поскольку для заданной начальной точки $x = x(0)$ время быстродействия Θ определено, то в левых частях равенств (2.31) и (2.32) $\gamma_1, \dots, \gamma_{2p-1}$, $\bar\gamma_1, \dots, \bar\gamma_{2p-1}$ — известные числа, тогда левые части этих равенств представляют собой полиномы степени $n-1$ относительно z, корнями которых являются все моменты переключения и только они.

Рассмотрим еще одну систему относительно вспомогательных переменных $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ [6]:

$$\dot\psi = -A^*\psi,$$

где A^* — матрица, транспонированная к матрице A. Решение этой системы — вектор ψ с компонентами $(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})$, который является опорным вектором к области управляемости системы (2) в начальной точке $x(0)$ [6]. Оптимальное управление

$$u(t) = sign(\psi, -e^{-At}b) = -sign(\psi, e^{-At}b). \qquad (2.33)$$

Скалярное произведение $(\psi, \exp(-At)b)$ представляет собой полином

$$(\psi, e^{-At}b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \psi_k t^k}{k!}. \qquad (2.34)$$

Корни этого полинома согласно равенству (2.33) являются моментами переключения. Следовательно, полином (2.34) с точностью до постоянного множителя совпадает с левой частью уравнения (2.31) при $n = 2p$ и с левой частью уравнения (2.32) при $n = 2p-1$. Если записать левую часть вышеуказанных уравнений в виде

$$c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_{n-1} t^{n-1},$$

то

$$\psi_k = (-1)^k k! c_k, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

То есть вектор g с компонентами

$$(c_0, -c_1, 2!\, c_2, \ldots, (-1)^{n-1}(n-1)!\, c_{n-1}) \tag{2.35}$$

является опорным вектором к области управляемости системы (2).

В качестве примера рассмотрим задачу оптимального быстродействия для системы (1) при $n = 5$ из точки $x = (0,0,0,0,x_5)$ $(x_5 > 0)$ в 0. В этом случае $p = 3$,

$$\gamma_1(x,\Theta) = \frac{\Theta}{2}; \quad \gamma_2(x,\Theta) = \frac{\Theta^2}{8}; \quad \gamma_3(x,\Theta) = \frac{\Theta^3}{16};$$

$$\gamma_4(x,\Theta) = \frac{5\Theta^4}{128}; \quad \gamma_5(x,\Theta) = \frac{7\Theta^5}{256} + 12\tilde{u}x_5;$$

$$\bar{\gamma}_1(x,\Theta) = -\frac{\Theta}{2}; \bar{\gamma}_2(x,\Theta) = -\frac{3\Theta^2}{8}; \bar{\gamma}_3(x,\Theta) = -\frac{5\Theta^3}{16}; \bar{\gamma}_4(x,\Theta) = -\frac{35\Theta^4}{128}.$$

Применяя метод, описанный в [1], получаем, что время оптимального быстродействия

$$\Theta = \Theta(x) = 4\sqrt[5]{6x_5},$$

а управление, решающее данную задачу быстродействия, является управлением первого рода, т.е. $\tilde{u} = -1$.

Определим теперь моменты переключения. Из (2.4a) следует, что уравнение для определения четных моментов переключения имеет вид

$$\begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ 1 & t & t^2 \end{vmatrix} = 0$$

или $16t^2 - 12\Theta t + \Theta^2 = 0$, корни которого

$$T_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{8}\Theta, \qquad T_3 = \frac{3+\sqrt{5}}{8}\Theta.$$

Из (2.3а) получаем уравнение для определения четных моментов переключения

$$\begin{vmatrix} \bar\gamma_1 & \bar\gamma_2 & \bar\gamma_3 \\ \bar\gamma_2 & \bar\gamma_3 & \bar\gamma_4 \\ 1 & t & t^2 \end{vmatrix} = 0$$

или $16t^2 - 20\Theta t + 5\Theta^2 = 0$, корни которого

$$T_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{8}\Theta, \qquad T_4 = \frac{3+\sqrt{5}}{8}\Theta.$$

Рассмотрим теперь задачу быстродействия для системы (1) при $n = 6$ из начальной точки $x = (0,0,0,0,0,x_6)$ $(x_6 > 0)$ в начало координат. В этом случае $p = 3$,

$$\gamma_1(x,\Theta) = \frac{\Theta}{2}; \quad \gamma_2(x,\Theta) = \frac{\Theta^2}{8}; \quad \gamma_3(x,\Theta) = \frac{\Theta^3}{16};$$

$$\gamma_4(x,\Theta) = \frac{5\Theta^4}{128}; \quad \gamma_5(x,\Theta) = \frac{7\Theta^5}{256}; \quad \gamma_6(x,\Theta) = \frac{21\Theta^6}{2^{10}} - 60\tilde{u}x_6;$$

$$\bar\gamma_1(x,\Theta) = -\frac{\Theta}{2}; \quad \bar\gamma_2(x,\Theta) = -\frac{3\Theta^2}{8}; \quad \bar\gamma_3(x,\Theta) = -\frac{5\Theta^3}{16};$$

$$\bar\gamma_4(x,\Theta) = -\frac{35\Theta^4}{128}; \quad \bar\gamma_5 = -\frac{63\Theta^5}{256}.$$

Методом, описанным в [1], находим время оптимального быстродействия

$$\Theta = \Theta(x) = 4\sqrt[6]{30x_6}$$

и род управления, которое является управлением второго рода, т.е. $\tilde{u} = +1$.

Из (2.1а) находим, что уравнение для нахождения четных моментов переключения имеет вид

$$\begin{vmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 \\ 1 & t & t^2 \end{vmatrix} = 0$$

или $16t^2 - 16\Theta t + 3\Theta^2 = 0$, корни этого уравнения

$$T_2 = \frac{\Theta}{4}, \qquad T_4 = \frac{3\Theta}{4}.$$

Из (2.2а) находим, что уравнение для нахождения всех нечетных моментов переключения имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & \bar\gamma_1 & \bar\gamma_2 & \bar\gamma_3 \\ -\bar\gamma_1 & \bar\gamma_2 & \bar\gamma_3 & \bar\gamma_4 \\ -\bar\gamma_2 & \bar\gamma_3 & \bar\gamma_4 & \bar\gamma_5 \\ -1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = 0$$

или $32t^3 - 48\Theta t^2 + 18\Theta^2 t - \Theta^3 = 0$, корни этого уравнения

$$T_1 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}\Theta, \qquad T_3 = \frac{\Theta}{2}, \qquad T_5 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}\Theta.$$

3. Случай двумерного управления

Рассмотрим задачу оптимального быстродействия с двумерным управлением:

$$\begin{gathered} \dot{x} = Ax + b_1 u_1 + b_2 u_2, \\ |u_1| \le 1, \quad |u_2| \le 1, \quad x(0) = x_0, \quad x(\Theta) = 0. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Пусть матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — управления, переводящие точку $x(0)$ в 0. Обозначим через $M_1(\Theta)$ множество точек вида

$$v_0 = -\int\limits_0^\Theta e^{-A\tau} b_1 u_1(\tau) d\tau,$$

а через $M_2(\Theta)$ — множество точек вида

$$w_0 = -\int\limits_0^\Theta e^{-A\tau} b_2 u_2(\tau) d\tau.$$

Множества $M_1(\Theta)$ и $M_2(\Theta)$ являются выпуклыми, содержащими нуль в качестве внутренней точки.

Нетрудно видеть, что множество $M_1(\Theta)$ является областью управляемости в начало координат для системы

$$\dot{x} = Ax + b_1 u_1, \quad |u_1| \le 1, \tag{3.2}$$

а множество $M_2(\Theta)$ — областью управляемости в нуль для системы

$$\dot{x} = Ax + b_2 u_2, \quad |u_2| \le 1. \tag{3.3}$$

Пусть $M_3(\Theta) = x_0 - M_2(\Theta)$. Тогда $M_3(\Theta)$ – выпуклое множество, содержащее x_0 в качестве внутренней точки.

Если пересечение множеств $M_1(\Theta)$ и $M_3(\Theta)$ содержит внутреннюю точку, то тогда время Θ не является оптимальным. Действительно, пусть $\tilde{x}_0$ – общая внутренняя точка этих множеств. Тогда из этой точки можно попасть в нуль за меньшее чем Θ время Θ_1 и, аналогично, из точки $x_0 - \tilde{x}_0$ — за меньшее время Θ_2 чем Θ. Это значит, что существуют управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$ такие, что $|u_1(t)| \leq 1$ и $|u_2(t)| \leq 1$, и такие, что выполняются равенства

$$\tilde{x}_0 = -\int_0^{\Theta_1} e^{-A\tau} b_1 u_1(\tau) d\tau \tag{3.4}$$

для $\Theta_1 < \Theta$ и

$$\tilde{x}_0 = x_0 + \int_0^{\Theta_2} e^{-A\tau} b_2 u_2(\tau) d\tau \tag{3.5}$$

для $\Theta_2 < \Theta$. Пусть для определенности $\Theta_1 \geq \Theta_2$. Тогда можно положить управление $u_1(\tau) = 0$ на отрезке $[\Theta_2, \Theta_1]$. В этом случае будут справедливы равенство (3.5) и равенство

$$\tilde{x}_0 = -\int_0^{\Theta_2} e^{-A\tau} b_1 u_1(\tau) d\tau,$$

т.е. равенство

$$x_0 = -\int_0^{\Theta} e^{-A\tau} b_1 u_1(\tau) d\tau - \int_0^{\Theta} e^{-A\tau} b_2 u_2(\tau) d\tau$$

будет справедливо при $\Theta = \Theta_2$, а это значит, что из точки x_0 можно попасть в нуль в силу системы (3.1) за меньшее время.

Следовательно, если Θ — время оптимального быстродействия, то множества $M_1(\Theta)$ и $M_3(\Theta)$ имеют общую граничную точку, которую обозначим через $\tilde{x}_0$. В этой точке существует (возможно, не единственная) гиперплоскость, разделяющая эти два множества. Следовательно, в этой точке существуют опорные векторы к множествам $M_1(\Theta)$ и $M_3(\Theta)$, которые являются линейно зависимыми. Способ нахождения опорного вектора описан в п. 2, формуле (2.35). Точка $\tilde{x}_0$ находится итерационно. Методы нахождения этой точки описаны ниже. На каждом шаге итерации решается задача быстродействия для систем (3.2) и (3.3).

Опишем метод приведения системы (3.2) с произвольным вектором b_1 к каноническому виду. Для этого построим вектор c, ортогональный векторам b_1, Ab_1,...,$A^{n-2}b_1$, причем $cA^{n-1}b_1 = 1$. Построим матрицу Q_1 из строк c^*A^{n-1}, c^*A^{n-2}, ..., c^* :

$$Q_1 = \begin{pmatrix} c^*A^{n-1} \\ c^*A^{n-2} \\ \vdots \\ c^* \end{pmatrix}.$$

Тогда заменой переменных $y = Q_1(x)$ система (3.2) приводится к каноническому виду:

$$\dot{y}_1 = u_1,$$

$$\dot{y}_i = y_{i-1}, \quad i = 2, \ldots, n.$$

Нетрудно заметить, что матрица Q_1^{-1}, обратная к матрице Q_1, имеет вид

$$Q_1^{-1} = (b_1, Ab_1, \ldots, A^{n-1}b_1).$$

Аналогичным преобразованием система (3.3) приводится к каноническому виду.

Преобразуем системы (3.2) и (3.3) к каноническому виду при помощи матриц Q_1 и Q_2. Получим системы:

$$\begin{array}{lll} \dot{y}_1 = u_1, & |u_1| \le 1, & y(0) = y_0 = Q_1\tilde{x}_0, \quad y(\Theta) = 0, \\ \dot{y}_i = y_{i-1}, & i = 2, \ldots, n, & \qquad \text{где} \quad y = Q_1 x; \end{array} \tag{3.6}$$

$$\begin{array}{lll} \dot{z}_1 = u_2, & |u_2| \le 1, & z(0) = z_0 = Q_2(x_0 - \tilde{x}_0), \quad z(\Theta) = 0, \\ \dot{z}_i = z_{i-1}, & i = 2, \ldots, n, & \qquad \text{где} \quad z = Q_2 x. \end{array} \tag{3.7}$$

Обозначим через N_y и N_z опорные векторы к областям управляемости систем (3.6) и (3.7) соответственно, а через Θ_y и Θ_z — время быстродействия этих систем.

Опишем методы нахождения времени оптимального быстродействия системы (3.1).

Метод 1. Между точками x_0 и 0 на отрезке прямой, соединяющей эти две точки, находим точку $\tilde{x}$, в которой $\Theta_y = \Theta_z$. В этой точке находим опорные векторы $N_y = N_y(Q_1\tilde{x}, \Theta_y)$ и $N_z = N_z(Q_2(x_0 - \tilde{x}), \Theta_z)$. Если угол δ между векторами $Q_1^{-1}N_y$ и $-Q_2^{-1}N_z$, где Q_1^{-1} и Q_2^{-1} — матрицы, обратные матрицам Q_1 и Q_2 соответственно, равен π (или $\cos\delta = -1$), то время оптимального быстродействия системы (3.1) $\Theta = \Theta_y = \Theta_z$ и $\tilde{x}_0 = \tilde{x}$, и для каждой из систем (3.6) и (3.7) находим моменты переключений, что и будет являться решением задачи. В противном случае ($\delta \neq \pi$) находим биссектрису угла δ. На этой биссектрисе находим точки минимума для Θ_y и Θ_z и выбираем ту из них, которая находится ближе к точке $\tilde{x}$. Обозначим ее через $\tilde{x}_b$. Находим в этой точке $\Theta_y = \Theta_y(Q_1\tilde{x}_b)$ и $\Theta_z = \Theta_z(Q_2(x_0 - \tilde{x}_b))$.

Если $\Theta_y > \Theta_z$ в точке $\tilde{x}_b$, то на отрезке прямой, соединяющей точки $\tilde{x}_b$ и 0, находим точку $\tilde{x}'$, в которой $\Theta_y = \Theta_z$; если $\Theta_z > \Theta_y$, то находим точку $\tilde{x}'$ на отрезке прямой, соединяющей точки $\tilde{x}_b$ и x_0. В точке $\tilde{x}'$ находим опорные векторы $N_y = N_y(Q_1\tilde{x}', \Theta_y)$ и $N_z = N_z(Q_2(x_0 - \tilde{x}'), \Theta_z)$. Если угол δ между векторами $Q_1^{-1}N_y$ и $-Q_2^{-1}N_z$ равен π, то $\Theta_y = \Theta_z$ — время оптимального быстродействия системы (3.1) и $\tilde{x}_0 = \tilde{x}'$, $(\delta \neq \pi)$. При $\delta \neq \pi$ находим биссектрису угла δ, и процесс повторяется до тех пор, пока на очередном шаге угол δ между векторами $Q_1^{-1}N_y$ и $-Q_2^{-1}N_z$ не станет равным π с заданной точностью, т.е. пока не будет выполняться неравенство

$$|\cos\delta + 1| < \epsilon,$$

где ϵ — заданная точность.

Метод 2. Как и в методе 1, на отрезке прямой, соединяющей точки x_0 и 0, находим точку $\tilde{x}$, в которой $\Theta_y = \Theta_z$. В этой точке находим опорные векторы $N_y = N_y(Q_1\tilde{x}, \Theta_y)$ и $N_z = N_z(Q_2(x_0 - \tilde{x}), \Theta_z)$. Если угол δ между векторами $Q_1^{-1}N_y$ и $-Q_2^{-1}N_z$ равен π, то время оптимального быстродействия системы (3.1) $\Theta = \Theta_y = \Theta_z$ и $\tilde{x}_0 = \tilde{x}$. При $\delta \neq \pi$ находим биссектрису угла δ. На биссектрисе находим точку $\tilde{x}_b$, ближайшую к $\tilde{x}$, в которой угол δ между векторами $Q_1^{-1}N_y(Q_1\tilde{x}_b, \Theta_y)$ и $Q_2^{-1}N_z(Q_2(x_0 - \tilde{x}_b), \Theta_z)$ будет равен π (т.е. находим минимум $\cos\delta$). Если в точке $\tilde{x}_b$ $\Theta_y > \Theta_z$, то в направлении вектора $Q_1^{-1}N_y(Q_1\tilde{x}_b, \Theta_y)$ находим точку $\tilde{x}'$, в которой $\Theta_y = \Theta_z$; если $\Theta_z > \Theta_y$, то находим точку $\tilde{x}'$ в направлении вектора $-Q_2^{-1}N_z(Q_2(x_0 - \tilde{x}_b), \Theta_z)$, в которой $\Theta_y = \Theta_z$. Если в найденной точке $\tilde{x}'$ угол δ между векторами $Q_1^{-1}N_y$ и $-Q_2^{-1}N_z$ равен π, то время оптимального быстродействия системы (3.1) $\Theta = \Theta_y = \Theta_z$ и $\tilde{x}_0 = \tilde{x}'$. При $\delta \neq \pi$ находим биссектрису угла δ, и процесс повторяется до тех пор, пока не будет выполняться неравенство (3.8).

Описанные методы были реализованы на ЭВМ.

Для системы третьего порядка

$$\dot{x}_1 = u_1 + u_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + u_2,$$

$$\dot{x}_3 = x_2.$$

Результаты вычислений.

1. Для начальной точки $x_0 = (0; 0; 1)$:
точка $\tilde{x}_0 \approx (0,036; -0,47; 0,76)$;
время оптимального быстродействия $\Theta \approx 2,16$;
моменты переключения для u_1: $T_1 \approx 0,346$, $T_2 \approx 1,406$;

управление на конечном промежутке $\tilde{u}_1 = -1$;
моменты переключения для u_2: $T_1 \approx 0,743, \quad T_2 \approx 1,839$;
управление на конечном промежутке $\tilde{u}_2 = -1$.

2. Для начальной точки $x_0 = (0;1;1)$:
точка $\tilde{x}_0 \approx (-0,088; -0,252; 1,137)$;
время оптимального быстродействия $\Theta \approx 2,86$;
моменты переключения для u_1: $T_1 \approx 0,566, \quad T_2 \approx 2,041$;
управление на конечном промежутке $\tilde{u}_1 = -1$;
моменты переключения для u_2: $T_1 \approx 2,203, \quad T_2 \approx 2,59$;
управление на конечном промежутке $\tilde{u}_2 = -1$.

Для системы четвертого порядка

$$\dot{x}_1 = u_1 + u_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + u_2,$$

$$\dot{x}_3 = x_2 + u_2,$$

$$\dot{x}_4 = x_3.$$

Результаты вычислений для начальной точки $x_0 = (0;0;0;1)$:
точка $\tilde{x}_0 \approx (-0,082; -0,283; -0,167; 0,775)$;
время оптимального быстродействия $\Theta \approx 3,227$;
моменты переключения для u_1:
$T_1 \approx 0,123, \quad T_2 \approx 1,167, \quad T_3 \approx 2,614$;
управление на конечном промежутке $\tilde{u}_1 = +1$;
моменты переключения для u_2:
$T_1 \approx 0,682, \quad T_2 \approx 1,848, \quad T_3 \approx 2,822$;
управление на конечном промежутке $\tilde{u}_2 = +1$.

Вычисления производились с погрешностью 10^{-3}.

Описанные методы легко обобщаются на случай произвольной матрицы A. В этом случае на каждом шаге итерационной процедуры необходимо решать задачу быстродействия для системы

$$\dot{x} = Ax + b_i u_i, \quad i = 1, 2.$$

В свою очередь, эта задача может быть сведена к решению задачи быстродействия для канонической системы [5].

Список литературы

[1] *В.И. Коробов, Г.М. Скляр*, Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов. — Мат.сб. (1987), т. 134(176), № 2(10), с. 186–206.

[2] *V.I. Korobov and G.M. Sklyar*, Markov power min-moment problem with periodic gaps. — J. Math. Sci. (1996), v. 80, No. 1, p. 1559–1581.

[3] *В.И. Коробов, Г.М. Скляр*, Оптимальное быстродействие и тригонометрическая проблема моментов. — Изв. АН.СССР, сер. мат. (1989), т. 53, № 4, с. 868–885.

[4] *В.И. Коробов, Г.М. Скляр*, Метод порождающей функции в проблеме моментов с периодическими пропусками. — ДАН СССР (1991), т. 318, № 1, с. 32–35.

[5] *В.И. Коробов, Г.М. Скляр*, min-Проблема моментов Маркова и быстродействие. — Сиб. мат. ж. (1991), № 1(185), т. 32, с. 60–71.

[6] *Э.Б. Ли, Л. Маркус*, Основы теории оптимального управления. Наука, Москва (1972), 576 с.

Methods of construction of time-optimal controls for canonical control systems

V.I. Korobov, G.M. Sklyar, and V.V. Florinsky

New methods of determining of the switching points of the time-optimal control for the canonical system of an arbitrary order are obtained. On this base numerical methods of solving the time-optimal problem for systems with a two-dimensional control are proposed.

Методи побудови оптимальних за швидкодією керувань для канонічних керованих систем

В.І. Коробов, Г.М. Скляра, В.В. Флоринського

Дано нові методи знаходження моменті переключення оптимального за швидкодією керування для канонічної системи довільного порядку. На цій основі пропонуються чисельні методи розв'язання задачі швидкодії для систем із двомірним керуванням.