Математическая физика, анализ, геометрия
2000, т. 7, № 1, с. 66–90

О вложении тотальных пространств расслоений над окружностью со слоем множество Кантора в двумерные многообразия

Е.А. Полулях

Институт математики НАН Украины
Ул. Терещенковская, 3, г. Киев, 01601, Украина

Статья поступила в редакцию 16 декабря 1996 года
Представлена А.А. Борисенко

Исследуется проблема вложения тотальных пространств расслоений над окружностью со слоем множество Кантора (расслоений Понтрягина) в двумерные многообразия. Получено достаточное условие того, что для тотального пространства N расслоения Понтрягина $\xi = (N, p, S^1)$ не существует двумерного многообразия M^2 и вложения $\Phi : N \to M^2$, а также строится широкий класс пространств, которые этому условию удовлетворяют.

1. Введение

Напомним, что *расслоение* — это произвольная тройка вида $\xi = (E, p, B)$, где E и B — топологические пространства, называемые соответственно *тотальным пространством* и *базой*, а $p : E \to B$ — непрерывное отображение, называемое *проекцией* расслоения ξ. Для произвольной точки $b \in B$ множество $p^{-1}(b) \subset E$ называется слоем расслоения ξ над точкой b (см. [1, с. 13]).

Определение 1. *Пусть Γ — канторово множество (определенное, например, в [2, с. 221]), $f : \Gamma \to \Gamma$ — гомеоморфизм. Расслоение ξ над окружностью S^1 со слоем Γ, построенное по f, называется расслоением Понтрягина [3].*

Более подробно: на прямом произведении $I \times \Gamma$, где $I = [0, 1] \subset \mathbf{R}$, вводится отношение эквивалентности. Эквивалентными объявляются точки

$\{1\} \times \{x\}$ и $\{0\} \times \{f(x)\}$. Обозначим через N фактор-пространство пространства $I \times \Gamma$ по этому отношению. Проекция $p : N \to S^1$ задается соотношением $p((t,x)) = t$ для всех точек $(t,x) \in N$. Тогда $\xi = (N, p, S^1)$.

Пусть $\xi = (N, p, S^1)$ — расслоение Понтрягина, построенное по гомеоморфизму $f : \Gamma \to \Gamma$. На его тотальном пространстве N можно задать естественную структуру потока $T_t : N \to N$ при помощи соотношения $T_t : (\tau, x) \to (\{t+\tau\}, f^{[t]}(x))$. (Здесь $[t], \{t\}$ — целая и дробная части числа соответственно.) Этот поток называется *специальным потоком* [4], построенным по гомеоморфизму $f : \Gamma \to \Gamma$, или (абстрактной) *динамической системой Понтрягина* [3].

Известны случаи (пример Данжуа, потоки Черри на торе), когда при описании потока на двумерном многообразии ключевую роль играет его поведение на инвариантном подмножестве, гомеоморфном тотальному пространству расслоения Понтрягина, причем ограничение потока на это инвариантное множество сопряжено соответствующей динамической системе Понтрягина.

В связи с этим представляются актуальными следующие задачи:

1) проблема классификации динамических систем Понтрягина (с точностью до сопряжения);

2) отыскание критерия продолжаемости динамических систем Понтрягина до потоков на двумерных многообразиях,

и тесно связанные с ними:

3) классификация тотальных пространств расслоений Понтрягина (с точностью до гомеоморфности их как топологических пространств);

4) отыскание критерия вложимости тотальных пространств расслоений Понтрягина в двумерные многообразия.

В настоящей работе приводится достаточное условие того, что для тотального пространства N расслоения $\xi = (N, p, S^1)$ не существует двумерного многообразия M^2 и вложения $\Phi : N \to M^2$, а также строится широкий класс пространств, которые этому условию удовлетворяют.

2. Некоторые свойства расслоений Понтрягина

Предложение 1. *Пусть $\xi = (N, p, S^1)$ — расслоение Понтрягина, построенное по гомеоморфизму $f : \Gamma \to \Gamma$, $T_t : N \to N$ — специальный поток, построенный по f. Пусть $U \subset S^1$ — связное открытое множество, такое что $\mathrm{int}(S^1 \setminus U) \neq \emptyset$, и существует гомеоморфизм $\varphi : U \times \Gamma \to p^{-1}(U)$, для которого $pr_1 = p \circ \varphi$ ($pr_1 : U \times \Gamma \to U$ — проекция).*

При этих условиях для любого множества вида $U \times \{pt\}$ найдется траектория $\{T_t(z)\}_{t \in \mathbf{R}}$ потока T_t, для которой $\varphi(U \times \{pt\}) \subset \{T_t(z)\}_{t \in \mathbf{R}}$.

Доказательство. По построению поток $\{T_t\}$ обладает следующими свойствами:

1) при любом $z \in N$ отображение $P_z : \mathbf{R} \to N, P_z(t) = T_t(z)$ непрерывно;

2) $p \circ P_z(t) = p \circ P_z(t+1)$ для всех $t \in \mathbf{R}$;

3) $p \circ P_z|_{(t,t+1]} \colon (t, t+1] \to S^1$ взаимно-однозначно при любом $t \in \mathbf{R}$.

Фиксируем точку $\{s\} \times \{x\} \in U \times \{x\}$. Обозначим $z = \varphi(\{s\} \times \{x\}) \in N$. Рассмотрим траекторию $\{T_t(z)\}_{t\in\mathbf{R}}$ этой точки и отображение $P_z : \mathbf{R} \to N$. Ясно, что $P_z(\mathbf{R}) = \{T_t(z)\}_{t\in\mathbf{R}}$.

Фиксируем точку $s_0 \in \operatorname{int}(S^1 \setminus U)$. Пусть $t_0 \in (p \circ P_z)^{-1}(s_0)$ — один из прообразов точки z_0. Из 2) и 3) получим, что $s_0 = p \circ P_z(\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}} \{t_0 + k\})$, $U \subset p \circ P_z(\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}} (t_0 + k, t_0 + k + 1))$. Так как $z = P_z(0)$ и $p \circ P_z(0) = s \in U$, то найдется $k_0 \in \mathbf{Z}$, такое что $0 \in (t_0 + k_0, t_0 + k_0 + 1)$. Для простоты будем считать $k_0 = 0$.

Найдем $\varepsilon > 0$, для которого $p\circ P_z(B_\varepsilon(t_0))$ и $p\circ P_z(B_\varepsilon(t_0+1))$ расположены в $\operatorname{int}(S^1 \setminus U)$. Обозначим $J = [t_0 + \frac{\varepsilon}{2}, t_0 + 1 - \frac{\varepsilon}{2}]$, $J_0 = (t_0 + \varepsilon, t_0 + 1 - \varepsilon)$. Рассмотрим отображение

$$F = p \circ P_z|_J \colon J \to S^1 .$$

Это отображение непрерывно и инъективно. Так как J — компакт, то F — гомеоморфизм на свой образ. Отображение

$$F_0 = F|_{J_0} \colon J_0 \to S^1$$

также является гомеоморфизмом на свой образ, причем $U \subset F(J_0)$, т.е. $V = F_0^{-1}(U) = F^{-1}(U) \subset J_0$. Отсюда заключаем, что V — открытое связное подмножество интервала J_0 (а следовательно, и $\mathbf{R}$), для которого $p\circ P_z(V) = U$ и $P_z(V) \subset p^{-1}(U)$.

Рассмотрим непрерывное отображение

$$pr_2 \circ \varphi^{-1} \circ P_z|_V \colon V \to \Gamma .$$

(Здесь $pr_2 : U \times \Gamma \to \Gamma$ — проекция.)

С одной стороны, $0 \in V \subset \mathbf{R}$ и $pr_2 \circ \varphi^{-1} \circ P_z(0) = pr_2 \circ \varphi^{-1}(z) = pr_2(\{s\} \times \{x\}) = x$. С другой стороны, $pr_2 \circ \varphi^{-1} \circ P_z(V)$ — связное подмножество канторова множества Γ (как образ связного множества) и, следовательно, состоит из одной точки. Поэтому $\varphi^{-1} \circ P_z(V) \subset U \times \{x\}$.

Но так как $p \circ P_z(V) = U$, то для любого $s' \in U$ найдется $t \in V$, такое что $p \circ P_z(t) = s'$ и $\varphi^{-1} \circ P_z(t) = pr_1^{-1}(s') \cap (U \times \{x\}) = \{s'\} \times \{x\}$, откуда $U \times \{x\} \subset \varphi^{-1} \circ P_z(V)$.

В итоге получим, что $U \times \{x\} = \varphi^{-1} \circ P_z(V)$ или $\varphi^{-1}(\{T_t(z)\}_{t \in V}) = U \times \{x\}$. Предложение доказано.

Предложение 2. *Пусть $\xi = (N, p, S^1)$, $T_t : N \to N$ — те же, что и в предложении 1.*

Для любого непрерывного инъективного отображения $\gamma : S^1 \to N$ (если такое существует) множество $\gamma(S^1)$ совпадает с одной из периодических траекторий потока $\{T_t\}$.

Доказательство. Докажем сначала, что найдется траектория $\{T_t(z)\}_{t \in \mathbf{R}}$, такая что $\gamma(S^1) \subset \{T_t(z)\}_{t \in \mathbf{R}}$. Пусть $\gamma(S^1) \cap \{T_t(z)\}_{t \in \mathbf{R}} \neq \emptyset$ для некоторого $z \in N$. Обозначим через $A \subset S^1$ множество $\gamma^{-1}(\{T_t(z)\}_{t \in \mathbf{R}})$. По построению $A \neq \emptyset$. Предположим, что $A \neq S^1$.

Множество $\partial A = \mathrm{cl} A \setminus \mathrm{int} A$ не пусто (в противном случае окружность распалась бы на две компоненты связности $S^1 = A \cup (S^1 \setminus A)$). Фиксируем $\tau \in \partial A \subset S^1$, $y = \gamma(\tau)$.

Так как расслоение $\xi = (N, p, S^1)$ — локально-тривиально, найдутся открытая окрестность $U \subset S^1$ точки $s = p(y) = p \circ \gamma(\tau)$ и гомеоморфизм $\varphi : U \times \Gamma \to p^{-1}(U)$, такой что $\mathrm{pr}_1 = p \circ \varphi : U \times \Gamma \to U$ (здесь $\mathrm{pr}_1 : U \times \Gamma \to U$ — проекция). Можно считать, что множество U связное и $\mathrm{int}(S^1 \setminus U) \neq \emptyset$. В противном случае его всегда можно уменьшить, заменив на подмножество связной компоненты множества U, содержащее точку s.

Пусть $\varphi^{-1} \circ \gamma(\tau) = \{s\} \times \{x\} \in U \times \Gamma$. Выберем связную окрестность B точки $\tau \in S^1$, такую что $p \circ \gamma(B) \subset U$. Множество $pr_2 \circ \varphi^{-1} \circ \gamma(B) \subset \Gamma$ связно и содержит точку x. Следовательно, $pr_2 \circ \varphi^{-1} \circ \gamma(B) = x$ и $\varphi^{-1} \circ \gamma(B) \subset U \times \{x\}$. Согласно предложению 1 найдется траектория $\{T_t(z')\}_{t \in \mathbf{R}}$ потока $T_t : N \to N$, содержащая множество $\gamma(B)$. Это значит, что $B \subset A$, если $\{T_t(z')\}_{t \in \mathbf{R}} = \{T_t(z)\}_{t \in \mathbf{R}}$, или $B \subset (S^1 \setminus A)$ в противном случае. Приходим к противоречию с тем, что $A \neq S^1$.

Итак, найдется $z \in N$, для которого $\gamma(S^1) \subset \{T_t(z)\}$. Предположим, что траектория $\{T_t(z)\}$ — непериодическая, т.е. непрерывное отображение $P_z : \mathbf{R} \to N$ инъективно. Докажем, что инъективное отображение $\Psi = P_z^{-1} \circ \gamma : S^1 \to \mathbf{R}$ непрерывно.

Возьмем произвольную точку $\tau \in S^1$. Обозначим через $y \in N$ ее образ $\gamma(\tau)$. Как и выше, построим связную окрестность U точки $s = p(y) \in S^1$ и гомеоморфизм $\varphi : U \times \Gamma \to p^{-1}(U)$, для которого $\mathrm{pr}_1 = p \circ \varphi$. Найдем связную окрестность B точки τ, такую что $\gamma(B) \subset p^{-1}(U)$ (т.е. $\varphi^{-1} \circ \gamma(B) \subset U \times \{x\}$, где $\{s\} \times \{x\} = \varphi^{-1}(y)$). Найдем замкнутый интервал $J \subset \mathbf{R}$ и открытый интервал $J_0 \subset \mathbf{R}$, такие что $J_0 \subset J$, $U \times \{x\} \subset \varphi^{-1} \circ P_z(J_0)$ (т.е. $\Psi(B) \in J_0$).

Рассмотрим непрерывное инъективное отображение $F = P_z|_J \colon J \to N$. Так как J — компакт, то это отображение является гомеоморфизмом на свой образ (в топологии, индуцированной с N). Пусть $I \subset \mathbf{R}$ — произвольная открытая окрестность точки $t = \Psi(\tau)$. Положим $I_0 = I \cap J_0$. Это множество открыто. Множество $P_z(I_0) = F(I_0)$ открыто в $F(J)$, т.е. найдется открытое множество $W' \subset N$, такое что $P_z(I_0) = W' \cap P_z(J)$.

С другой стороны, $\gamma(B)$ открыто в $\gamma(S^1)$, так как B открыто и $\gamma : S^1 \to \gamma(S^1)$ — гомеоморфизм. То есть найдется открытое множество $V' \subset N$, такое что $\gamma(B) = V' \cap \gamma(S^1)$.

Рассмотрим множество $W = W' \cap V'$ и пересечение $W \cap P_z(I_0) = W \cap P_z(J_0) = W \cap P_z(J)$, открытое в $P_z(J_0)$ и в $P_z(J)$. Так как отображение $F : J \to N$ непрерывно, то $F^{-1}(W \cap P_z(I_0)) = P_z^{-1}(W \cap P_z(I_0))$ открыто в J_0, а следовательно, и в $\mathbf{R}$. Кроме того, $t \in P_z^{-1}(W \cap P_z(I_0))$. Покажем, что $\Psi^{-1}(P_z^{-1}(W \cap P_z(I_0)))$ открыто в S^1.

$$\Psi^{-1}(P_z^{-1}(W \cap P_z(I_0))) = \gamma^{-1} \circ P_z(P_z^{-1}(W \cap P_z(I_0)))$$

$$= \gamma^{-1}(W \cap P_z(I_0)) = \gamma^{-1}(W \cap \gamma(S^1) \cap P_z(I_0)) .$$

Так как $W \subset V'$ и $V' \cap \gamma(S^1) = \gamma(B)$, то $\gamma^{-1}(W \cap \gamma(S^1) \cap P_z(I_0)) = \gamma^{-1}(W \cap \gamma(B) \cap P_z(I_0))$ и

$$\Psi^{-1}(P_z^{-1}(W \cap P_z(I_0))) = \gamma^{-1}(W \cap \gamma(B) \cap P_z(I_0)) .$$

Поскольку $W \subset W'$ и $P_z(I_0) = P_z(J_0) \cap W'$, то $\gamma^{-1}(W \cap \gamma(B) \cap P_z(I_0)) = \gamma^{-1}(W \cap \gamma(B) \cap P_z(J_0))$ и

$$\Psi^{-1}(P_z^{-1}(W \cap P_z(I_0))) = \gamma^{-1}(W \cap \gamma(B) \cap P_z(J_0)) .$$

Так как $\gamma(B) \subset P_z(J_0)$, то $\gamma^{-1}(W \cap \gamma(B) \cap P_z(J_0)) = \gamma^{-1}(W \cap \gamma(B))$ и

$$\Psi^{-1}(P_z^{-1}(W \cap P_z(I_0))) = \gamma^{-1}(W \cap \gamma(B)) = \gamma^{-1}(W \cap \gamma(S^1)) = \gamma^{-1}(W) .$$

Множество $\gamma^{-1}(W)$ открыто как прообраз открытого множества.

В силу произвольности $\tau \in S^1$ отображение $\Psi : S^1 \to \mathbf{R}$ непрерывно. Так как Ψ инъективно и S^1 — компакт, то Ψ является гомеоморфизмом на свой образ. Получаем заведомо неверное утверждение, что окружность гомеоморфна подмножеству вещественной прямой.

Приходим к противоречию с тем, что $\{T_t(z)\}_{t\in\mathbf{R}}$ — непериодическая траектория потока $T_t : N \to N$.

Пусть теперь $\{T_t(z)\}_{t\in\mathbf{R}}$ — периодическая траектория, $\gamma(S^1) \subset \{T_t(z)\}$. Это значит, что отображение $P_z : \mathbf{R} \to N$ является поднятием некоторого непрерывного инъективного отображения $\widetilde{P_z} : S^1 \to N$.

Предположим, что $\gamma(S^1) \neq \{T_t(z)\}$. Пусть $z_0 \in \{T_t(z)\} \setminus \gamma(S^1), t_0 = \widetilde{P_z}^{-1}(z_0)$. Найдется гомеоморфизм $G : \mathbf{R} \to (S^1 \setminus \{t_0\})$. Композиция $\widehat{P_z} =$

$\widetilde{P_z} \circ G : \mathbf{R} \to N$ дает непрерывное инъективное отображение, являющееся гомеоморфизмом на свой образ, причем $\gamma(S^1) \subset \widehat{P_z}(\mathbf{R})$. Из этого следует, что отображение $\widehat{P_z}^{-1} \circ \gamma : S^1 \to \mathbf{R}$ является гомеоморфизмом на свой образ. А это невозможно.

Полученное противоречие завершает доказательство.

З а м е ч а н и е 1. Здесь и далее через π_1 будем обозначать представление фундаментальной группы пространства S^1 в аддитивную группу $\mathbf{Z}$ целых чисел. Иными словами, отображение π_1 сопоставляет гомотопическому классу $[\gamma]$ кривой $\gamma : S^1 \to S^1$ целое число.

Предложение 3. *Пусть $\xi = (N, p, S^1)$ — расслоение Понтрягина, построенное по гомеоморфизму $f : \Gamma \to \Gamma$, $\gamma : S^1 \to N$ — непрерывное инъективное отображение.*

Найдется открытая окрестность $W \subset N$ множества $\gamma(S^1)$, такая что для любого непрерывного инъективного отображения $\gamma_1 : S^1 \to W$ справедливо сравнение

$$\pi_1(p \circ \gamma_1) \equiv 0 \; (\mathrm{mod}\, |\pi_1(p \circ \gamma)|)\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из предложения 2 следует, что $\gamma(S^1)$ совпадает с одной из периодических траекторий потока $T_t : N \to N$. Пусть $\alpha = \{x_1, \ldots, x_n \,|f(x_i) = x_{i+1},\ i = 1, \ldots, n-1,\ f(x_n) = x_1\}$ — периодическая траектория каскада (Γ, f), такая что $\gamma(S^1) = \mathcal{F}(\bigcup\limits_{i=1}^{n} I \times \{x_i\})$, где $\mathcal{F} : I \times \Gamma \to N$ — проекция. Нетрудно видеть, что $|\pi_1(p \circ \gamma)| = n$, где n — период траектории α каскада (Γ, f).

Пусть $d : \Gamma \times \Gamma \to \Gamma$ — метрика, индуцированная на Γ с отрезка. Положим

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{\substack{i,j=1,\ldots,n \\ i \neq j}} d(x_i, x_j)\,.$$

Так как $f^k : \Gamma \to \Gamma$ — гомеоморфизм при любом $k \in \mathbf{Z}$ и Γ — компакт, найдется $\delta_0 > 0$, такое что для всех $x, y \in \Gamma$ неравенство $d(x, y) < \delta_0$ влечет $d(f^k(x), f^k(y)) < \varepsilon$ при $k = 1, \ldots, n$.

Положим $\delta = \min(\varepsilon, \delta_0)$. Рассмотрим систему открытых множеств $\{U_i\}_{i=1}^{n}$, где $U_1 = B_\delta(x_1), U_i = f(U_{i-1}) = f^{i-1}(U_1)$ при $i = 2, \ldots, n$, которая обладает следующими свойствами:

1) $U_i \cap U_j = \emptyset$ при $i \neq j$;

2) $f(U_n) \cap U_i = \emptyset$ при $i = 2, \ldots, n$, так как $f(U_n) = f^n(U_1) \subset B_\varepsilon(x_1)$;

3) $f(U_n) \cap U_1 \neq \emptyset$, так как $x_1 \in f(U_n) \cap U_1$.

Положим

$$\widetilde{W} = ((0,1] \times U_1) \cup (\bigcup_{i=2}^{n-1} I \times U_i) \cup ([0,1) \times U_n)$$

$$\cup(\{0\} \times (U_1 \cap f(U_n))) \cup (\{1\} \times (U_n \cap f^{-1}(U_1)))\ ,$$

$$W = \mathcal{F}(\widetilde{W})\,.$$

Нетрудно видеть, что множество $\widetilde{W}$ открыто в $I \times \Gamma$ и является полным прообразом множества W. Следовательно, множество $W \subset N$ открыто.

Траектория $\{T_t(y)\}_{t\in\mathbf{R}}$ потока $T_t : N \to N$ будет расположена в множестве W тогда и только тогда, когда соответствующая ей траектория каскада (Γ, f) будет расположена в множестве $V = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$.

Пусть $\gamma_1 : S^1 \to W$ — инъективное непрерывное отображение, $\gamma_1(S^1) = \{T_t(z)\}_{t\in\mathbf{R}}$ и траектории $\{T_t(z)\}_{t\in\mathbf{R}}$ соответствует периодическая траектория $\beta = \{y_1, \ldots, y_m \mid f(y_i) = y_{i+1},\ i = 1, \ldots, m-1,\ f(y_m) = y_1\}$ длины m каскада (Γ, f). Тогда $\beta \subset V$ и $|\pi_1(p \circ \gamma_1)| = m$. Покажем, что $m \equiv 0 \pmod n$.

Для простоты будем считать, что $y_1 \in U_1 \subset V$. По построению $f^k(y_1) \in U_{k+1}$ (и $f^k(y_1) \notin U_1$) для $k = 1, \ldots, n-1$; $f^n(y_1) \in V \cap f(U_n) \subset U_1$.

Пусть $F^{sn}(y_1) \in U_1$ для некоторого $s \in \mathbf{N}$. Тогда $f^{sn+k}(y_1) \in U_{k+1}$ (и $f^{sn+k}(y_1) \notin U_1$) для $k = 1, \ldots, n-1$; $f^{sn+n}(y_1) = f^{s(n+1)}(y_1) \in V \cap f(U_n) \subset U_1$. По индукции получим, что $f^{sn}(y_1) \in U_1, f^{sn+k}(y_1) \notin U_1$ при $k = 1, \ldots, n-1$ для произвольного $s \in \mathbf{N}$. Другими словами, включение $f^m(y_1) \in U_1$ влечет $m \equiv 0 \pmod n$, откуда получим $\pi_1(p \circ \gamma_1) \equiv 0 \pmod{|\pi_1(p \circ \gamma)|}$.

Предложение доказано.

Предложение 4. *Пусть $\xi = (N, p, S^1)$ — расслоение Понтрягина, построенное по гомеоморфизму $f : \Gamma \to \Gamma$, $\mu = (X, pr, S^1)$ — произвольное расслоение над окружностью, $\Phi : N \to X$ — непрерывное отображение тотальных пространств этих расслоений (Φ не обязано сохранять структуру расслоения). Пусть $\gamma : S^1 \to N$ — непрерывное инъективное отображение.*

Найдется открытая окрестность $W_0 \subset N$ множества $\gamma(S^1)$, такая что для любого непрерывного инъективного отображения $\gamma_1 : S^1 \to W_0$ выполняется соотношение

$$\left|\frac{\pi_1(pr \circ \Phi \circ \gamma_1)}{\pi_1(pr \circ \Phi \circ \gamma)}\right| = \left|\frac{\pi_1(p \circ \gamma_1)}{\pi_1(p \circ \gamma)}\right|.$$

Доказательство предложения основано на лемме

Лемма 1. *Пусть $\gamma_1, \gamma_2 : S^1 \to S^1$ — два непрерывных отображения; $G, H : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — их непрерывные поднятия, такие что* *(i)* $G(x+1) = G(x) + m$ *для некоторого* $m \in \mathbf{Z}$ *и произвольного* $x \in \mathbf{R}$*;*

(ii) $H(x+1) = H(x) + s$ *для некоторого* $s \in \mathbf{Z}$ *и произвольного* $x \in \mathbf{R}$*;*

(iii) *найдутся* $k \in \mathbf{N}$ *и* $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$*, такие что при любом* $x \in \mathbf{R}$ *выполняется включение* $H(\frac{x}{k}) - G(x) \in \bigcup\limits_{i \in \mathbf{Z}} (i - \varepsilon, i + \varepsilon)$*.*

Тогда $H(x+1) = H(x) + mk$ *при любом* $x \in \mathbf{R}$.

Доказательство леммы. Обозначим $F(x) = H(\frac{x}{k}) - G(x)$. По условию $F(\mathbf{R}) \subset \bigcup\limits_{i \in \mathbf{Z}} (i - \varepsilon, i + \varepsilon)$. Так как $\mathbf{R}$ связно и F непрерывно, то найдется $i_0 \in \mathbf{Z}$, такое что $F(\mathbf{R}) \subset (i_0 - \varepsilon, i_0 + \varepsilon)$. Тогда $|F(x + k - F(x))| < 2\varepsilon < 1$ при любом $x \in \mathbf{R}$.

С другой стороны,

$$F(x+k) - F(x) = H\Big(\frac{x+k}{k}\Big) - H\Big(\frac{x}{k}\Big) - \{G(x+k) - G(x)\}$$

$$= H\Big(\frac{x}{k} + 1\Big) - H\Big(\frac{x}{k}\Big) - \sum_{i=0}^{k-1} \{G(x+i+1) - G(x+i)\} = s - km \in \mathbf{Z}\,.$$

Из этого получим, что $s - km = 0$ и $H(x+1) - H(x) = s = km$.

Доказательство предложения. Рассмотрим отображение

$$pr \circ \Phi \circ \mathcal{F} : I \times \Gamma \to S^1\ .$$

Так как топология на множествах $I \times \Gamma$ и S^1 — метрическая, $I \times \Gamma$ — компакт и отображение $pr \circ \Phi \circ \mathcal{F}$ непрерывно, то оно равномерно-непрерывно. Иными словами, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, для которого при любых $y_1, y_2 \in I \times \Gamma$ неравенство $d(y_1, y_2) < \delta$ влечет $d(pr \circ \Phi \circ \mathcal{F}(y_1), pr \circ \Phi \circ \mathcal{F}(y_2)) < \varepsilon$.

Фиксируем достаточно маленькое $\varepsilon_1 > 0$ (такое, чтобы при переходе к поднятию отображения $pr \circ \Phi \circ \mathcal{F}$ расстояние между образами точек y_1 и y_2, взятое $(\mathrm{mod}\ 1)$, было меньше $\frac{1}{2}$, как только $d(pr \circ \Phi \circ \mathcal{F}(y_1), pr \circ \Phi \circ \mathcal{F}(y_2)) < \varepsilon_1$). Найдем по ε_1 число $\delta_1 > 0$, такое чтобы при любых $y_1, y_2 \in I \times \Gamma$ из неравенства $d(y_1, y_2) < \delta_1$ следовало $d(pr \circ \Phi \circ \mathcal{F}(y_1), pr \circ \Phi \circ \mathcal{F}(y_2)) < \varepsilon_1$.

Пусть $\gamma : S^1 \to N$ — кривая из условия предложения, $W \subset N$ — окрестность этой кривой, построенная в предложении 3. Уменьшим множества $\{U_i\}$ из предложения 3 так, чтобы при всех $s = 0, \ldots, n$ выполнялось включение $f^s(U_1) \subset B_{\delta_1}(x_{s+1})$. Построим по новой системе $\{U_i\}$ множества $\widetilde{W_0} \subset I \times \Gamma$ и $W_0 = \mathcal{F}(\widetilde{W_0})$.

Пусть теперь $\gamma_1 : S^1 \to W_0$ — инъективная кривая. Тогда $\pi_1(p \circ \gamma_1) \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ |\pi_1(p \circ \gamma)|)$ и найдется $k \in \mathbf{N}$, для которого $|\pi_1(p \circ \gamma_1)| = k|\pi_1(p \circ \gamma)|$.

Рассмотрим кривые $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}_1 : S^1 \to N$ (для которых $\tilde{\gamma}(S^1) = \gamma(S^1)$, $\tilde{\gamma}_1(S^1) = \gamma_1(S^1)$), определенные следующим образом:

$$\tilde{\gamma} : e^{2\pi it} \mapsto (\{tn\}, f^{[tn]}(x_1)), \;\; n = |\pi_1(p \circ \gamma)|\,;$$

$$\tilde{\gamma}_1 : e^{2\pi it} \mapsto (\{tkn\}, f^{[tkn]}(y_1))\,.$$

Здесь $(0, x_1) \in \gamma(S^1)$, $(0, y_1) \in \gamma_1(S^1)$.

Из доказательства предложения 3 следует, что при всех $m \in \mathbf{Z}$ $d(f^m(x_1), f^m(y_1)) < \delta_1$ (в пространстве Γ). Отсюда получим, что при всех $t \in \mathbf{R}$ найдутся два прообраза $a_1 = (\{tn\}, f^{[tn]}(x_1)), a_2 = (\{tn\}, f^{[tn]}(y_1)) \in I \times \Gamma$ точек $\tilde{\gamma}(e^{2\pi it}), \tilde{\gamma}_1(e^{2\pi i\frac{t}{k}}) \in N$ при отображении $\mathcal{F}$, удовлетворяющие соотношению

$$d(a_1, a_2) < \delta_1\;,$$

из которого немедленно вытекает

$$d(pr \circ \Phi \circ \mathcal{F}(a_1), pr \circ \Phi \circ \mathcal{F}(a_2)) = d(pr \circ \Phi \circ \tilde{\gamma}(e^{2\pi it}), pr \circ \Phi \circ \tilde{\gamma}_1(e^{2\pi i\frac{t}{k}}) < \varepsilon_1\;.$$

Следовательно, мы находимся в условиях леммы 1 для отображений $pr \circ \Phi \circ \tilde{\gamma}, pr \circ \Phi \circ \tilde{\gamma}_1 : S^1 \to S^1$ и их поднятий $G, H : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Применяя лемму 1, получим

$$|\pi_1(pr \circ \Phi \circ \tilde{\gamma}_1)| = k|\pi_1(pr \circ \Phi \circ \tilde{\gamma})|$$

и

$$k = \left|\frac{\pi_1(pr \circ \Phi \circ \tilde{\gamma}_1)}{\pi_1(pr \circ \Phi \circ \tilde{\gamma})}\right| = \left|\frac{\pi_1(p \circ \tilde{\gamma}_1)}{\pi_1(p \circ \tilde{\gamma})}\right|.$$

Остается заметить, что кривая γ гомотопна кривой $\tilde{\gamma}$, если гомеоморфизм $\tilde{\gamma}^{-1} \circ \gamma : S^1 \to S^1$ сохраняет ориентацию, или кривой $\tilde{\gamma}' : S^1 \to N$,

$$\tilde{\gamma}' : e^{2\pi it} \mapsto (\{(1-t)n\}, f^{[(1-t)n]}(x_1))$$

в противном случае. Причем $\pi_1(p \circ \tilde{\gamma}') = -\pi_1(p \circ \tilde{\gamma})$.

Аналогично и для кривой $\gamma_1 : S^1 \to N$.

Последнее замечание завершает доказательство предложения.

З а м е ч а н и е 2. Предложение 4 остается справедливым при более слабых условиях. А именно, достаточно потребовать, чтобы отображение Φ было определено на некотором замкнутом подмножестве $K \subset N$ с непустой внутренностью, таком что $\gamma(S^1) \subset \mathrm{Int}K$.

3. Основной результат

Дадим следующее

Определение 2. *Пусть $\xi = (N, p, S^1)$ — расслоение Понтрягина. Назовем непрерывное инъективное отображение $\gamma : S^1 \to N$ U-кривой, если найдется последовательность непрерывных инъективных отображений $\beta_i : S^1 \to N$, $i \in \mathbf{N}$, удовлетворяющая условиям:*

(i) для произвольной открытой окрестности U множества $\gamma(S^1) \subset N$ найдется $k \in \mathbf{N}$, такое что $\beta_i(S^1) \subset U$ при всех $i > k$;

(ii) $|\pi_1(p \circ \gamma)| \neq |\pi_1(p \circ \beta_i)|$ при всех $i \in \mathbf{N}$.

Назовем кривую γ RU-кривой, если найдется последовательность $\beta_i : S^1 \to N$, $i \in \mathbf{N}$, удовлетворяющая условиям (i), (ii) и

(iii) $|\pi_1(p \circ \gamma)| \neq 2|\pi_1(p \circ \beta_i)|$ при всех $i \in \mathbf{N}$.

Предложение 4 показывает корректность следующего определения.

Определение 3. *Топологическое пространство N называется U-пространством (RU-пространством), если в нем найдется U-кривая (RU-кривая).*

Теорема 1. *Пусть $\xi = (N, p, S^1)$ — расслоение Понтрягина, N — его тотальное пространство.*

Если N — U-пространство (RU-пространство), то не существует пары (M^2, Φ), где M^2 — двумерное ориентируемое многообразие (M^2 — двумерное многообразие, не обязательно ориентируемое), $\Phi : N \to M^2$ — вложение пространства N в это многообразие.

Доказательство. Пусть N — U-пространство (RU-пространство). Предположим, что найдутся ориентируемое двумерное многообразие M^2 (произвольное двумерное многообразие M^2, не обязательно ориентируемое) и непрерывное инъективное отображение $\Phi : N \to M^2$, такое что $\Phi : N \to \Phi(N)$ — гомеоморфизм (топология на $\Phi(N)$ индуцирована с M^2).

Найдем инъективную непрерывную кривую $\gamma : S^1 \to N$ и семейство инъективных непрерывных кривых $\beta_i : S^1 \to N$, $i \in \mathbf{N}$, относительно которого γ является U-кривой (RU-кривой). Отметим, что из предложения 2 вытекают следующие неравенства:

$$\pi_1(p \circ \gamma) \neq 0\,,$$

$$\pi_1(p \circ \beta_i) \neq 0 \text{ при всех } i \in \mathbf{N}\,.$$

Отображение $\Phi \circ \gamma : S^1 \to M^2$ непрерывно и инъективно, и так как S^1 — компакт, это отображение является вложением. Как известно, произвольная регулярная окрестность замкнутой непрерывной кривой, вложенной в двумерное ориентируемое многообразие, гомеоморфна цилиндру C^2 (если M^2 — произвольное двумерное многообразие, не обязательно ориентируемое, регулярная окрестность замкнутой непрерывной кривой, вложенной в M^2, гомеоморфна цилиндру C^2 или листу Мебиуса $\mathcal{M}^2$). Пусть $U \subset M^2$ — замкнутая регулярная окрестность кривой $\Phi \circ \gamma$, $\varphi : U \to C^2$ — гомеоморфизм, при котором кривая $\Phi \circ \gamma$ переходит в экватор цилиндра ($\varphi : U \to \mathcal{M}^2$ — гомеоморфизм, при котором кривая $\Phi \circ \gamma$ переходит в экватор листа Мебиуса).

Множество $\Phi^{-1}(\mathrm{Int}U) \subset N$ является окрестностью кривой γ, поэтому найдется $k \in \mathbf{N}$, такое что при всех $i \geq k$ $\beta_i(S^1) \subset \Phi^{-1}(\mathrm{Int}U)$.

Цилиндр C^2 (лист Мебиуса $\mathcal{M}^2$) можно наделить естественной структурой расслоения над окружностью со слоем отрезок. Отображение $\varphi \circ \Phi : N \to C^2$ ($\varphi \circ \Phi : N \to \mathcal{M}^2$) непрерывно, $|\pi_1(\varphi \circ \Phi \circ \gamma)| = 1$. Применяя предложение 4 с учетом замечания 2, заключаем, что найдутся окрестность $W_0 \subset N$ множества $\gamma(S^1)$ и $s \in \mathbf{N}$, такие что при всех $i \geq s$

1) $\beta_i(S^1) \subset W_0$,

2) $\varphi \circ \Phi \circ \beta_i$ инъективно и непрерывно,

3) $\left|\dfrac{\pi_1(p \circ \beta_i)}{\pi_1(p \circ \gamma)}\right| = \left|\dfrac{\pi_1(\varphi \circ \Phi \circ \beta_i)}{\pi_1(\varphi \circ \Phi \circ \gamma)}\right|$.

Положим $m = \max(k, s)$. Так как $|\pi_1(\varphi \circ \Phi \circ \gamma)| = 1$ и $|\pi_1(p \circ \beta_i)| \notin \{0, |\pi_1(p \circ \gamma)|\}$, то $\pi_1(\varphi \circ \Phi \circ \beta_i) \notin \{0, \pm 1\}$. (Для *RU*-кривой, так как $|\pi_1(\varphi \circ \Phi \circ \gamma)| = 1$ и $|\pi_1(p \circ \beta_i)| \notin \{0, |\pi_1(p \circ \gamma)|, 2|\pi_1(p \circ \gamma)|\}$, то $\pi_1(\varphi \circ \Phi \circ \beta_i) \notin \{0, \pm 1, \pm 2\}$.)

С другой стороны, имеет место

Лемма 2. *Пусть C^2 — цилиндр, $\gamma : S^1 \to C^2$ — непрерывное инъективное отображение. Тогда $\pi_1(\gamma) \in \{0, \pm 1\}$.*

Доказательство леммы. Рассмотрим меридиан цилиндра $M = \{x \in C^2 \mid \varphi(x) = \varphi_0 \ (\mathrm{mod}\ 2\pi)\}$ и его пересечение $M \cap \gamma$ с кривой γ.

Отображение $\gamma : S^1 \to C^2$ инъективно и непрерывно, S^1 — компакт. Известно, что инъективное непрерывное отображение компакта является его гомеоморфизмом на свой образ. Следовательно, $\gamma : S^1 \to \gamma(S^1)$ — гомеоморфизм и $\gamma : S^1 \to C^2$ — вложение. Согласно теореме 5.3 из [5] можно привести γ и M в общее положение, т.е. существует изотопия $\chi_t : C^2 \to C^2$, такая что $\chi_0 = id : C^2 \to C^2$, $\chi_1(\gamma)$ — непрерывная замкнутая кривая без самопересечений, пересекающая M трансверсально. Очевидно, $\pi_1(\gamma) = \pi_1(\chi_1(\gamma))$.

Так как S^1 — компакт, то кривая $\chi_1(\gamma)$ пересекает M в конечном числе точек. Пусть это будут точки $A_i = (1, \varphi_0, z_i),\ i = 1, \ldots, n$.

Спроецируем $\chi_1(\gamma)$ на экватор γ_0 при помощи отображения $p : C^2 \to \gamma_0,\ p((1, \varphi, z)) = (1, \varphi, 0)$. Присвоим точке A_i знак "$+$", если после проектирования направление движения вдоль $\chi_1(\gamma)$ в достаточно малой окрестности точки A_i совпадет с направлением обхода экватора, и знак "$-$" в противном случае.

Пусть среди точек $A_i,\ i = 1, \ldots, n$, найдутся как точки, помеченные "$+$", так и "$-$". Докажем, что кривую $\chi_1(\gamma)$ можно произотопировать так, что ее образ будет пересекаться с M трансверсально в тех же точках, что и $\chi_1(\gamma)$, кроме двух $A_j \neq A_k$, одна из которых имеет знак "$+$", а другая знак "$-$".

Кривая $\chi_1(\gamma)$ разбивается точками A_i на n интервалов $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Перенумеруем точки A_i, так чтобы концами интервала $\gamma_i,\ i = 1, \ldots, (n-1)$, были точки A_i и A_{i+1}, концами интервала γ_n — точки A_n и A_1.

Сопоставим каждой точке интервала $\gamma_i \subset C^2$ одно из значений ее полярного угла, так чтобы функция $\varphi_i : \gamma_i \to \mathbf{R}$ была непрерывна и $\varphi_i(A_i) = \varphi_0$. Сопоставим отрезку γ_i число

$$a_i = \sup_{x \in \gamma_i} \{|\varphi_i(x) - \varphi_0|\} .$$

Так как при всех i $\gamma_i \cap M = \partial\gamma_i = A_i \cup A_{i+1}$, то кривые γ_i делятся на два класса:

(i) точки A_i и A_{i+1} имеют один знак, при этом $\varphi_i(A_{i+1}) = \varphi_0 \pm 2\pi$ и $a_i = 2\pi$;

(ii) точки A_i и A_{i+1} имеют разные знаки, тогда $\varphi_i(A_{i+1}) = \varphi_0$ и $a_i < 2\pi$.

Выберем среди чисел $a_i,\ i = 1, \ldots, n$, минимальное. Пусть это будет число a_j для интервала γ_j. Тогда $a_j < 2\pi$.

Рассмотрим область B, которая ограничена интервалом γ_j и отрезком $J \in M$, соединяющим точки A_j и A_{j+1}. ∂B — простая замкнутая кривая, и $\pi_1(\partial B) = 0$ в силу выбора a_j. Поэтому B гомеоморфна двумерному диску. Для любой кривой $\gamma_i,\ i \neq j$, найдется точка x, такая что $|\varphi_i(x) - \varphi_0| > \sup\limits_{x \in \gamma_j} \{|\varphi_j(x) - \varphi_0|\}$. Следовательно, $x_i \in \gamma_i \cap (C^2 \setminus B)$.

Покажем, что при всех $i \neq j$ $B \cap \gamma_i = \emptyset$. Действительно, если бы для некоторого $i \neq j$ выполнялось соотношение $B \cap \gamma_i \neq \emptyset$, кривая γ_i должна была бы пересечься с ∂B, что невозможно, так как $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$, $\gamma_i \cap M = \emptyset$ и $J \subset M$.

Возьмем достаточно малую окрестность U диска B и произотопируем ее на себя (неподвижно на границе), так чтобы при этом $\gamma \cap U$ перешло в компоненту связности множества $U \setminus M$, не пересекающуюся с диском B. Продолжим эту изотопию на C^2 при помощи тождественной изотопии.

При помощи конечного числа таких изотопий можно добиться, чтобы все точки пересечения кривой γ с меридианом M имели один знак.

Пусть теперь все точки A_i, $i = 1, \ldots, n$, имеют один знак. Заметим, что $n = |\pi_1(\gamma)|$. Предположим, что $n \geq 2$.

Рассмотрим простую замкнутую кривую $\beta = \gamma_1 \cup J$, где $J \subset M$ — интервал, соединяющий точки A_1 и A_2. Ясно, что $\pi_1(\beta) = \pm 1$. Кривая β делит C^2 на две связные компоненты C_1 и C_2. Пусть C_2 — та из них, в которой лежит дуга γ_2.

Пусть $t_1 = \gamma^{-1}(A_1)$ и $t_2 = \gamma^{-1}(A_2)$ — прообразы точек A_1 и A_2 на окружности S^1. Найдутся ε_1 и ε_2, такие что

1) окрестности $U_1 = U_{\varepsilon_1}(A_1)$ и $U_2 = U_{\varepsilon_2}(A_2)$ не пересекаются;
2) $\gamma^{-1}(U_k \cap \gamma) = (t_k - \delta'_k, t_k + \delta''_k)$ для некоторых $\delta'_k, \delta''_k > 0$, $k = 1, 2$;
3) интервалы $\gamma((t_k - \delta'_k, t_k))$ и $\gamma((t_k, t_k + \delta''_k))$ лежат в разных компонентах связности множества $U_k \setminus M$, $k = 1, 2$.

Пусть $U_k \setminus M = U_k^- \cup U_k^+$, $\gamma((t_k - \delta'_k, t_k)) \subset U_k^-$, $\gamma((t_k, t_k + \delta''_k)) \subset U_k^+$, $k = 1, 2$. Найдется односвязная окрестность U меридиана M, такая что $U_k \subset U$, $k = 1, 2$. Так как точки A_1 и A_2 имеют один знак, то множества U_1^-, U_2^- содержатся в одной компоненте связности множества $U^- \cup U^+ = U \setminus M$, U_1^+, U_2^+ — в другой. Пусть $U_k^- \subset U^-$, $U_k^+ \subset U^+$, $k = 1, 2$.

Покажем, что кривые β и $\tilde{\gamma} = \gamma \setminus (\gamma_1 \cup A_1 \cup A_2)$ не пересекаются.

Так как $\tilde{\gamma} \cap \gamma_1 = \emptyset$, то точки множества $\tilde{\gamma} \cap \beta$ должны принадлежать интервалу $J \subset M$. Отсюда следует, что кривые $\tilde{\gamma}$ и β могут пересекаться только в тех из точек A_i, $i \neq 1, 2$, которые принадлежат интервалу J, а точнее интервалу $J_0 = J \setminus (U_1 \cup U_2) \subset J$.

Найдем связную окрестность V интервала J_0, такую что $V \cap \gamma_1 = \emptyset$, $V \subset U$. Множество $V \setminus M$ имеет две компоненты связности V^- и V^+. Поскольку $(V \setminus M) \cap (U_2 \setminus M) \neq \emptyset$ и $V^+ \subset U^+$, $U_2^+ \subset U^+$, то $V^+ \cup U_2^+$ — связное множество.

Так как по предположению $\gamma_2 \subset C_2$, то $C_2 \cap U_2^+ \neq \emptyset$, потому что $\gamma((t_2, t_2 + \delta''_2)) = \gamma_2 \cap U_2^+ = \tilde{\gamma} \cap U_2^+ \subset U_2^+ \subset C_2$. Из связности C_2 и U_2^+ заключаем, что $U_2^+ \subset C_2$ (аналогичные рассуждения приводят к выводу, что $\gamma((t_1 - \delta'_1, t_1)) = \tilde{\gamma} \cap U_1^- \subset C_1$). Отсюда следует, что $V^+ \subset C_2$, $V^- \subset C_1$.

Предположим, что $A_3 \in J_0$, $t_3 = \gamma^{-1}(A_3)$. Тогда для некоторого $\delta > 0$ должно выполняться включение $\gamma((t_3 - \delta, t_3)) \subset V \cap C_2 = V^+$. С другой стороны, для всех достаточно малых $\delta > 0$ $\gamma((t_3 - \delta, t_3)) \subset V^-$, потому что точка A_3 имеет тот же знак, что и A_1. Так как $V^+ \cap V^- = \emptyset$, то $A_3 \notin J_0$.

Итак, $A_3 \in C_2$. Из этого заключаем, что $\gamma_3 \subset C_2$. Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что $A_4 \in C_2$. А тогда $\gamma_4 \subset C_2$ и т.д.

В результате за конечное число шагов получим, что

$$(\bigcup_{i\neq 1}\gamma_i)\cup(\bigcup_{i\neq 1,2}A_i)=\tilde{\gamma}\subset C_2 \ .$$

Но $\gamma((t_1-\delta_1',t_1))\subset\tilde{\gamma}$ и $\gamma((t_1-\delta_1',t_1))\subset U_1^-\subset C_1$. Кроме того, $C_1\cap C_2=\emptyset$.

Полученное противоречие завершает доказательство.

Если M^2 — ориентируемое многообразие, приходим к противоречию с тем, что $\Phi:N\to M^2$ — вложение.

В случае, когда M^2 неориентируемо, доказательство теоремы завершает совместное применение леммы 2 и следующей леммы

Лемма 3. *Пусть $\mathcal{M}^2$ — лист Мебиуса, e — его экватор, $\gamma:S^1\to\mathcal{M}^2\setminus e$ — непрерывное инъективное отображение. Тогда $\pi_1(\gamma)\in\{0,\pm 2\}$.*

Доказательство леммы. Так как $\gamma(S^1)$ и e — непересекающиеся компакты, найдутся окрестность V экватора e, такая что $V\cap\gamma(S^1)=\emptyset$, и гомеоморфизм $\psi:\mathcal{M}^2\setminus V\to C^2$. Из леммы 2 заключаем, что образ кривой γ при гомеоморфизме ψ может иметь гомотопический тип $0,\pm1$. Если $\pi_1(\psi\circ\gamma)=0$, то множество $\psi\circ\gamma(S^1)$ ограничивает диск в C^2. Следовательно, $\gamma(S^1)=\psi^{-1}(\psi\circ\gamma(S^1))$ ограничивает диск в $\mathcal{M}^2$, и $\pi_1(\gamma)=0$.

Пусть $\pi_1(\psi\circ\gamma)=\pm1$. Тогда кривая $\psi\circ\gamma$ гомотопна любой из компонент края ∂C^2 (каждая компонента ∂C^2 имеет гомотопический тип ±1). Выберем ту из них, которая под действием ψ^{-1} переходит в $\partial\mathcal{M}^2$. Так как $|\pi_1(\partial\mathcal{M}^2)|=2$, то и $|\pi_1(\gamma)|=|\pi_1(\psi^{-1}\circ\psi\circ\gamma)|=2$.

Лемма доказана.

Теорема полностью доказана.

4. Один способ построения гомеоморфизмов множества Кантора

Рассмотрим семейство отображений $h_i:I\to I_i$, $h_i(x)=\frac{1}{3^i}(x+2)$, $i\in\mathbf{N}$, где $I=[0,1]$, $I_i=[\frac{2}{3^i},\frac{1}{3^{i-1}}]$. Как известно, множество Γ состоит в точности из тех точек отрезка I, которые в троичной системе счисления можно представить так, что в их записи будут отсутствовать единицы. Пусть $x\in I$, $y=h_i(x)$, $x=\sum\limits_{k\in\mathbf{N}}\frac{1}{3^k}x_k$, $y=\sum\limits_{k\in\mathbf{N}}\frac{1}{3^k}y_k$, $x_k,y_k\in\{0,1,2\}$ при всех $k\in\mathbf{N}$. Тогда $y_1=\ldots=y_{i-1}=0$, $y_i=2$, $y_{i+k}=x_k$, $k\in\mathbf{N}$. Из этого заключаем, что $h_i(\Gamma)=\Gamma\cap I_i$.

Пусть $f_i:\Gamma\to\Gamma$ — счетный набор гомеоморфизмов множества Кантора. Так как $\Gamma=\{0\}\cup\bigcup\limits_{i\in\mathbf{N}}I_i$, то корректно определено отображение

$$f:\Gamma\to\Gamma\,,$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0; \\ h_i \circ f_i \circ h_i^{-1}(x), & \text{если } x \in I_i,\ i \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Отображение f — взаимно-однозначно. Проверим его непрерывность.

При $x \neq 0$ найдутся $j \in \mathbf{N}$, такое что $x \in I_j \cap \Gamma$, и окрестность U точки x, для которой $U \subset I_j \cap \Gamma$, $f|_U = h_j \circ f_j \circ h_j^{-1}|_U$. Отображение $f|_U$ — непрерывно как композиция непрерывных отображений.

При $x = 0$ непрерывность отображения f обеспечивается неравенством

$$|f(y)| \le 2|y| \text{ при всех } y \in \Gamma \setminus \{0\},$$

выполнение которого гарантируется тем, что $f(I_i \cap \Gamma) = I_i \cap \Gamma$ при любом $i \in \mathbf{N}$.

Так как Γ — компакт, $f : \Gamma \to \Gamma$ — взаимно-однозначно и непрерывно, то f — гомеоморфизм.

5. Основные примеры

П р и м е р 1. Фиксируем $k \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$. Рассмотрим отображение

$$\tilde{g}_k : J_k \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} I_i \to J_k \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} I_i\,,$$

$$\tilde{g}_k(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}, & \text{если } x \in I_i,\ i = 1, \dots, k-2; \\ x - \frac{2}{3^{k-1}}, & \text{если } x \in I_{k-1}; \\ 3^{k-2}x + \frac{2}{3}, & \text{если } x \in J_k. \end{cases}$$

Здесь I_i — те же, что и выше, $J_k = [0, \frac{1}{3^{k-1}}]$.

Нетрудно видеть, что $\tilde{g}_k$ — гомеоморфизм, причем для любого $x \in J_k \cup \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} I_i$ $\tilde{g}_k^k(x) = x$ и $\tilde{g}_k^s(x) \neq x$ при $s = 1, \dots, k-1$.

Покажем, что $\Gamma \subset J_k \cup \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} I_i$ и $\tilde{g}_k(\Gamma) = \Gamma$. Пусть $y = \tilde{g}_k(x)$, $x = \sum\limits_{j \in \mathbf{N}} \frac{1}{3^j} x_j$, $y = \sum\limits_{j \in \mathbf{N}} \frac{1}{3^j} y_j$, $x_j, y_j \in \{0, 1, 2\}$ при всех $j \in \mathbf{N}$ — запись чисел $x, y \in [0, 1]$ в троичной системе счисления. Имеем

$$I_i = \{x |\ x_s = 0,\ \ s = 1, \dots, i-1,\ x_i = 2\}\,,\ i = 1, \dots, k-1\,,$$

$$J_k = \{x |\ x_s = 0,\ \ s = 1, \dots, k-1\}\,,$$

из чего следует, что $\Gamma \subset J_k \cup \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} I_i$. Кроме того,

$$y_1 = 0,\ y_{s+1} = x_s \text{ при всех } s \in \mathbf{N}, \text{ если } x \in I_i,\ i = 1, \dots, k-2\,;$$

$$y_1 = \ldots = y_{k-1} = 0,\ y_s = x_s \text{ при } s \geq k,\ \text{если } x \in I_{k-1}\,,$$

$$y_1 = x_{k-1} + 2 = 2,\ y_s = x_{s+k-1} \text{ при всех } s \in \mathbf{N},\ \text{если } x \in J_{k-1}\,,$$

т.е. $\tilde{g}_k(x) \in \Gamma$ для любого $x \in \Gamma$, или $\tilde{g}_k(\Gamma) \subset \Gamma$. С другой стороны, $\Gamma = id(\Gamma) = \tilde{g}_k^k(\Gamma) = \tilde{g}_k(\tilde{g}_k^{k-1}(\Gamma)) \subset \tilde{g}_k(\Gamma)$.

Следовательно, $\tilde{g}_k(\Gamma) = \Gamma$, и корректно определен гомеоморфизм

$$g_k = \tilde{g}_k|_\Gamma \colon \Gamma \to \Gamma\,.$$

Построим теперь по счетной системе отображений $f_i = g_k : \Gamma \to \Gamma$, $i \in \mathbf{N}$, гомеоморфизм $q_k : \Gamma \to \Gamma$, обладающий следующими свойствами:

1) $q_k^k = id : \Gamma \to \Gamma$;

2) $q_k^s(x) \neq x$ при $s = 1, \ldots, k-1$ для любого $x \in \Gamma \setminus \{0\}$;

3) $q_k(0) = 0$.

Построим по гомеоморфизму q_k расслоение Понтрягина $\xi_k = (N_k, p_k, S^1)$. Отметим, что кривая $\gamma : S^1 \to N_k$, $\gamma(e^{2\pi i t}) = (\{t\}, 0)$, является U-кривой при любом $k \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ и RU-кривой при $k \neq 2$.

Предложение 5. *Пространства N_{k_1} и N_{k_2} не гомеоморфны при $k_1 \neq k_2$, k_1, $k_2 \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, найдется гомеоморфизм $\varphi : N_{k_1} \to N_{k_2}$. Рассмотрим кривую $\gamma : S^1 \to N_{k_1}$, $\gamma(e^{2\pi i t}) = (\{t\}, 0)$ и ее образ $\varphi \circ \gamma$. Существуют две возможности.

(1) $\varphi \circ \gamma(S^1) = \mathcal{F}_{k_2}(I \times \{0\}) \subset N_{k_2}$ (здесь $\mathcal{F}_{k_2} : I \times \Gamma \to N_{k_2}$ — проекция).

Пусть $\gamma_1 : S^1 \to N_{k_1}$ — непрерывное инъективное отображение, $\gamma_1(S^1) \neq \gamma(S^1)$. Тогда

$$\left| \frac{\pi_1(p_{k_1} \circ \gamma_1)}{\pi_1(p_{k_1} \circ \gamma)} \right| = k_1\,.$$

Пусть $\tilde{\gamma}_1 : S^1 \to N_{k_2}$ — непрерывное инъективное отображение, $\tilde{\gamma}_1(S^1) \neq \mathcal{F}_{k_2}(I \times \{0\})$. Тогда

$$\left| \frac{\pi_1(p_{k_2} \circ \tilde{\gamma}_1)}{\pi_1(p_{k_2} \circ \varphi \circ \gamma)} \right| = k_2\,.$$

Следовательно,

$$k_2 = \left| \frac{\pi_1(p_{k_2} \circ \varphi \circ \gamma_1)}{\pi_1(p_{k_2} \circ \varphi \circ \gamma)} \right| \neq \left| \frac{\pi_1(p_{k_1} \circ \gamma_1)}{\pi_1(p_{k_1} \circ \gamma)} \right| = k_1\,.$$

Так как γ_1 — произвольное непрерывное инъективное отображение, для которого $\gamma_1(S^1) \neq \gamma(S^1)$, и γ является U-кривой (т.е. в любой окрестности множества $\gamma(S^1)$ найдется непрерывная инъективная кривая), приходим к противоречию с утверждением 4.

Значит, случай (1) не реализуется.

(2) $\varphi\circ\gamma(S^1)\subset\mathcal{F}_{k_2}(I\times(\Gamma\cap I_j))$ для некоторого $j\in\mathbf{N}$. В этом случае найдется окрестность $V\subset N_{k_2}$ множества $\varphi\circ\gamma(S^1)$, лежащая в множестве $\mathcal{F}_{k_2}(I\times(\Gamma\cap I_j))$. Для любой непрерывной инъективной кривой $\tilde\gamma_1 : S^1\to V$ имеем $|\pi_1(p_{k_2}\circ\tilde\gamma_1)| = |\pi_1(p_{k_2}\circ\tilde\gamma)| = k_2$, где $\tilde\gamma=\varphi\circ\gamma : S^1\to N_{k_2}$.

Воспользовавшись предложением 4, найдем окрестность W_0 множества $\gamma(S^1)$, такую что для всякой непрерывной инъективной кривой $\gamma_1 : S^1\to W_0$ выполняется равенство

$$k_1=\left|\frac{\pi_1(p_{k_1}\circ\gamma_1)}{\pi_1(p_{k_1}\circ\gamma)}\right|=\left|\frac{\pi_1(p_{k_2}\circ\varphi\circ\gamma_1)}{\pi_1(p_{k_2}\circ\varphi\circ\gamma)}\right|.$$

Рассмотрим окрестность $W=W_0\cap\varphi^{-1}(V)$ множества $\gamma(S^1)$. Так как γ — U-кривая, найдется по крайней мере одна инъективная непрерывная кривая $\beta : S^1\to W$. Для этой кривой

$$k_1=\left|\frac{\pi_1(p_{k_1}\circ\beta)}{\pi_1(p_{k_1}\circ\gamma)}\right|=\left|\frac{\pi_1(p_{k_2}\circ\varphi\circ\beta)}{\pi_1(p_{k_2}\circ\varphi\circ\gamma)}\right|.$$

С другой стороны, для отображения $\varphi\circ\beta : S^1\to V$ должно выполняться соотношение

$$\left|\frac{\pi_1(p_{k_2}\circ\varphi\circ\beta)}{\pi_1(p_{k_2}\circ\varphi\circ\gamma)}\right|=1\neq k_1\,.$$

Полученное противоречие завершает доказательство.

Предложение 6. *Существует вложение $\Phi : N_2\to\mathcal{M}^2$, где N_2 — тотальное пространство расслоения $\xi_2=(N_2,p_2,S^1)$ из примера 1, построенного по гомеоморфизму $q_2:\Gamma\to\Gamma$, $\mathcal{M}^2$ — лист Мебиуса.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $e=(E,p,S^1)$ — тривиальное расслоение Понтрягина (построенное по гомеоморфизму $\mathrm{id}:\Gamma\to\Gamma$). Построим замкнутое отображение $P_1 : E\to N_2$. Напомним, что замкнутым называется отображение, при котором образ произвольного замкнутого множества замкнут.

Рассмотрим N_0 — тотальное пространство расслоения $\xi_0=(N_0,p_0,S^1)$, построенного по гомеоморфизму $g_2:\Gamma\to\Gamma$,

$$g_2(x)=\begin{cases} x+\frac{2}{3}, & \text{если } x\in[0,\frac{1}{3}];\\ \\ x-\frac{2}{3}, & \text{если } x\in[\frac{2}{3},1].\end{cases}$$

Рассмотрим также отображение $u : E \to N_0$,

$$u((t,x)) = \begin{cases} (2t, \frac{x}{3} + \frac{2}{3}), & \text{если } t \in [0, \frac{1}{2}); \\ \\ (2t-1, \frac{x}{3}), & \text{если } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Легко видеть, что это отображение является гомеоморфизмом.

Рассмотрим отображения

$$\widetilde{h}_j : E \to E,\ \widetilde{h}_j((t,x)) = (t, h_j(x)),\ j \in \mathbf{N}\,;$$

$$\widehat{h}_j : N_0 \to N_2,\ \widehat{h}_j((t,x)) = (t, h_j(x)),\ j \in \mathbf{N}\,.$$

Эти отображения являются гомеоморфизмами на свой образ, так как они инъективны, непрерывны и множества E, N_0 являются компактами. Положим

$$P_1((t,x)) = \begin{cases} (2t, 0), & \text{если } t \in [0, \frac{1}{2}),\ x = 0; \\ (2t-1, 0), & \text{если } t \in [\frac{1}{2}, 1],\ x = 0; \\ \widehat{h}_j \circ u \circ \widetilde{h}_j^{-1}((t,x)), & \text{если } x \in \Gamma \cap I_j. \end{cases}$$

Докажем замкнутость отображения P_1.

Представим E в виде объединения попарно непересекающихся замкнутых множеств:

$$E = K \cup \bigcup_{j \in \mathbf{N}} V_j\,,$$

$$K = \mathcal{F}(I \times \{0\}) = \{(t,0) \in E \mid t \in S^1\}\,,$$

$$V_j = \mathcal{F}(I \times (\Gamma \cap I_j)) = \{(t,x) \in E \mid x \in I_j\},\ j \in \mathbf{N}\,.$$

Представим N_2 в виде объединения попарно непересекающихся замкнутых множеств

$$E = \widetilde{K} \cup \bigcup_{j \in \mathbf{N}} W_j\,,$$

$$\widetilde{K} = \mathcal{F}_2(I \times \{0\}) = \{(t,0) \in N_2 \mid t \in S^1\}\,,$$

$$W_j = \mathcal{F}_2(I \times (\Gamma \cap I_j)) = \{(t,x) \in N_2 \mid x \in I_j\},\ j \in \mathbf{N}\,.$$

Здесь $\mathcal{F} : I \times \Gamma \to E$, $\mathcal{F}_2 : I \times \Gamma \to N_2$ — проекции. Отметим, что множества V_j, W_j, $j \in \mathbf{N}$, являются также открытыми в E и N_2 соответственно.

Пусть $V \subset E$ — произвольное замкнутое множество, $W = P_1(V)$. Пусть $\{w_k = (\tau_k, y_k) \in W\}_{k \in \mathbf{N}}$ — произвольная последовательность точек множества W, сходящаяся к точке $w_0 \in N_2$. Покажем, что $w_0 \in W$. Возможны два случая.

(i) $w_0 \in W_j$ при некотором $j \in \mathbf{N}$. Так как $w_k \to w_0$ и W_j — открытая окрестность точки w_0, то найдется $k_0 \in \mathbf{N}$, такое что при всех $k > k_0$ $w_k \in W_j$. Из того, что $P_1|_{V_j}\colon V_j \to W_j$ — гомеоморфизм, заключаем, что $z_k = P_1^{-1}(w_k) \to z_0 = P_1^{-1}(w_0)$ при $k \to \infty$. Так как V — замкнуто и $z_k \in V$ при всех $k \in \mathbf{N}$, то $z_0 = \lim\limits_{k\to\infty} z_k \in V$ и $w_0 = P_1(z_0) \in P_1(V) = W$.

(ii) $w_0 \in \widetilde{K}$. Пусть $\{z_k = (t_k, x_k) \in V \mid P_1(z_k) = w_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ — последовательность прообразов элементов последовательности $\{w_k\}_{k\in\mathbf{N}}$.

Так как проекция $p_2 : N_2 \to S^1$ — непрерывна, то $\tau_k \to \tau_0$ при $k \to \infty$. Из того, что $t_k = \frac{\tau_k}{2}$ или $t_k = \frac{\tau_k+1}{2}$, вытекает, что последовательность $\{t_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ распадается на две подпоследовательности $\{t_{k_1}\}_{k\in\mathbf{N}}$ и $\{t_{k_2}\}_{k\in\mathbf{N}}$, такие что $t_{k_1} \to \frac{\tau}{2}$, $t_{k_2} \to \frac{\tau+1}{2}$ при $k \to \infty$. Не ограничивая общности, будем считать, что одна из этих последовательностей содержит конечное число элементов и $t_k \to t_0$ при $k \to \infty$, где $t_0 = \frac{\tau_0}{2}$ или $t_0 = \frac{\tau_0+1}{2}$.

Обозначим $z_0 = (t_0, 0)$. Отметим, что $z_0 = P_1^{-1}(w_0)$.

Рассмотрим набор множеств $\{U_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $U_n = \{(t,x) \in E \mid x < \frac{1+\varepsilon}{3^n},\ t - t_0 \in \bigcup\limits_{i\in\mathbf{Z}} (i - \frac{1}{n}, i + \frac{1}{n})\}$ при некотором фиксированом $\varepsilon \in (0,1)$. Отметим, что выполнение неравенства $x < \frac{1+\varepsilon}{3^n}$ равносильно включению $x \in \{0\} \cup \bigcup\limits_{j=n+1}^{\infty} I_j$. Все U_n открыты, так как $\mathcal{F}^{-1}(U_n) = \{\{t\} \times \{x\} \in I \times \Gamma \mid x < \frac{1+\varepsilon}{3^n},\ t - t_0 \in (-1-\frac{1}{n}, -1+\frac{1}{n}) \cup (\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}) \cup (1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n})\}$ открыты в топологии прямого произведения. Кроме того, система $\{\mathcal{F}^{-1}(U_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ образует базу окрестностей множества $\mathcal{F}^{-1}(z_0)$. Следовательно, $\{U_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ – база окрестностей точки z_0.

Аналогично, система $\{\widetilde{U}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $\widetilde{U}_n = \{(\tau, y) \in N_2 \mid \tau - \tau_0 \in \bigcup\limits_{i\in\mathbf{Z}} (i - \frac{1}{n}, i + \frac{1}{n}),\ y < \frac{1+\varepsilon}{3^n}\}$ образует базу окрестностей точки $w_0 = (\tau_0, 0)$.

Так как $(\tau_k, y_k) \to (\tau_0, 0)$, то для любого $n \in \mathbf{N}$ найдется $m = m(n) \in \mathbf{N}$, такое что при всех $k > m$ $(\tau_k, y_k) \in \widetilde{U}_n$ и $y_k \le \frac{1}{3^n}$. Следовательно, $y_k \to 0$ при $k \to \infty$. Так как включение $y_k \in I_j$ влечет $x_k \in I_j$ и $y_k = 0$ влечет $x_k = 0$, то $x_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Следовательно, для любого $n \in \mathbf{N}$ найдется $l = l(n)$, такое что при всех $k > l$ $(t_k, x_k) \in U_n$, т.е. $(t_k, x_k) \to (t_0, 0)$ при $k \to \infty$. Так как $z_k = (t_k, x_k) \in V$ и множество V замкнуто, то $z_0 = (t_0, 0) \in V$ и $w_0 = P_1(z_0) \in P_1(V) = W$.

Из того, что последовательность $\{w_k \in W\}_{k\in\mathbf{N}}$ произвольна, получим замкнутость множества W. В силу произвольности выбора замкнутого множества $V \subset E$ $P_1 : E \to N_2$ является замкнутым отображением.

2) Пусть $\mathcal{H}_c : I \times I \to C^2$, $\mathcal{H}_m : I \times [-1,1] \to \mathcal{M}^2$ – проекции. Отображение $\mathcal{H}_c$ попарно отождествляет точки $\{0\} \times \{x\}$ и $\{1\} \times \{x\}$, $x \in I$. Отображение $\mathcal{H}_m$ отождествляет точки $\{0\} \times \{x\}$ и $\{1\} \times \{-x\}$, $x \in [-1,1]$.

Построим отображение $P_2 : C^2 \to \mathcal{M}^2$,

$$P_2((t,x)) = \begin{cases} (2t, x), & \text{если } t \in [0, \frac{1}{2}); \\ (2t-1, -x), & \text{если } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Представим C^2 и $\mathcal{M}^2$ в виде объединения непересекающихся множеств

$$C^2 = R \cup V_1, \ \mathcal{M}^2 = \widetilde{R} \cup W_1 \,,$$

$$R = \mathcal{H}_c(I \times \{0\}) = \{(t,x) \in C^2 \mid x = 0\} \,,$$
$$V_1 = \mathcal{H}_c(I \times (0,1]) = \{(t,x) \in C^2 \mid x \neq 0\} \,,$$
$$\widetilde{R} = \mathcal{H}_m(I \times \{0\}) = \{(t,x) \in \mathcal{M}^2 \mid x = 0\} \,,$$
$$W_1 = \mathcal{H}_m(I \times [-1,0) \cup (0,1]) = \{(t,x) \in \mathcal{M}^2 \mid x \neq 0\} \,.$$

Пусть $\{z_k = (t_k, x_k) \in C^2\}_{k \in \mathbf{N}}$ — последовательность, сходящаяся к точке $z_0 = (t_0, x_0)$, $\{w_k = (\tau_k, y_k) \in \mathcal{M}^2\}_{k \in \mathbf{N}}$ — образ последовательности $\{z_k\}$ при отображении $P_2 : C^2 \to \mathcal{M}^2$. Рассуждения, аналогичные приведенным для доказательства замкнутости отображения P_1, приводят к выводу, что $w_k \to w_0 = P_2(z_0)$. То есть отображение P_2 — непрерывно.

3) Воспользуемся отображениями $P_1 : E \to N_2$, $Q_1 : E \to C^2$ (где $Q_1((t,x)) = (t,x)$ для всех $(t,x) \in E$ — вложение), $P_2 : C^2 \to \mathcal{M}^2$ для построения инъективного непрерывного отображения $Q_2 : N_2 \to \mathcal{M}^2$.

Отображение $P_1|_{E \setminus K} \colon E \setminus K \to N_2 \setminus \widetilde{K}$ взаимно-однозначно и замкнуто, т.е. определено непрерывное отображение $P_1^{-1}|_{N_2 \setminus \widetilde{K}} \colon N_2 \setminus \widetilde{K} \to E \setminus K$. Определим

$$Q_2|_{N_2 \setminus \widetilde{K}} = P_2 \circ Q_1 \circ (P_1|_{E \setminus K})^{-1} : N_2 \setminus \widetilde{K} \to \mathcal{M}^2 \,.$$

Это отображение инъективно, потому что $Q_1 \circ (P_1|_{E \setminus K})^{-1}(N_2 \setminus \widetilde{K}) \subset C^2 \setminus R$, и отображение $P_2|_{C^2 \setminus R} \colon C^2 \setminus R \to \mathcal{M}^2 \setminus \widetilde{R}$ — взаимно-однозначно.

Заметим, что

$$P_1(Q_1^{-1}(P_2^{-1}((t,0))))$$
$$= P_1(Q_1^{-1}(\{(\frac{t}{2}, 0) \cup (\frac{t+1}{2}, 0)\})) = P_1(\{(\frac{t}{2}, 0) \cup (\frac{t+1}{2}, 0)\}) = (t, 0)$$

при любом $t \in S^1$, поэтому имеет смысл доопределить Q_1 на $K \subset N_2$ следующим образом:

$$Q_1|_K((t,0)) = (t,0) \in \mathcal{M}^2 \,.$$

В итоге получим инъективное отображение $Q_2 : N_2 \to \mathcal{M}^2$. Проверим его непрерывность.

Пусть $V \subset \mathcal{M}^2$ — произвольное замкнутое множество. По построению

$$Q_2^{-1}(V) = P_1(Q_1^{-1}(P_2^{-1}(V)))\,.$$

Множество $Q_1^{-1}(P_2^{-1}(V))$ замкнуто, так как отображения Q_1 и P_2 непрерывны. Поскольку P_1 — замкнутое отображение, то замкнутым является и множество $P_1(Q_1^{-1}(P_2^{-1}(V))) = Q_2^{-1}(V)$. Для произвольного замкнутого множества V его прообраз замкнут, поэтому отображение $Q_2 : N_2 \to \mathcal{M}^2$ непрерывно.

Как известно, непрерывное инъективное отображение компакта является гомеоморфизмом на свой образ, т.е. вложением. Предложение доказано.

Следствие 1. *Существует счетный набор расслоений Понтрягина* $\{\xi^i = (N^i, p^i, S^1)\}_{i\in\mathbf{N}}$*, тотальные пространства которых попарно негомеоморфны, являются U-пространствами и для любого $i \in \mathbf{N}$ найдется двумерное неориентируемое многообразие M_i^2 и вложение $\Phi_i : N^i \to M_i^2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим несвязное объединение $N^n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (N_2)_i$ n экземпляров пространства N_2. Введем на этом пространстве структуру расслоения. Зададим проекцию $p : N^n \to S^1$, $p((t,x)) = t$, если $(t,x) \in (N_2)_i$, $i = 1,\ldots,n$. Так как несвязное объединение $\tilde{\Gamma} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Gamma_i$ конечного числа экземпляров множества Γ гомеоморфно множеству Кантора и для произвольного $t \in S^1$ $p^{-1}(t) \cong \Gamma$, то (N^n, p, S^1) — расслоение Понтрягина.

Докажем, что при $n_1 \neq n_2$ пространства N^{n_1} и N^{n_2} не гомеоморфны. Пусть, например, $n_1 < n_2$, $\Psi : N^{n_2} \to N^{n_1}$ — гомеоморфизм. Из доказательства теоремы следует, что найдется вложение $\Phi : N^{n_1} \to X$ пространства N^{n_1} в двумерное неориентируемое многообразие X достаточно большого рода, такое что его образ $\Phi(N^{n_1})$ содержит ровно n_1 замкнутых кривых, для каждой из которых регулярная окрестность гомеоморфна листу Мебиуса. Отображение $\Phi \circ \Psi : N^{n_2} \to X$ будет вложением. Но каждое из подмножеств $(N_2)_i \subset N^{n_2}$, $i = 1,\ldots,n_2$, содержит, по крайней мере, одну кривую, регулярная окрестность образа которой гомеоморфна листу Мебиуса. Следовательно, $\Phi(N^{n_1})$ содержит не меньше n_2 замкнутых кривых, обладающих этим свойством.

Полученное противоречие завершает доказательство.

П р и м е р 2. Рассмотрим счетный набор неотрицательных целых чисел $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, $a_i \in \mathbf{Z}_+$, такой что $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \to \infty$ при $n \to \infty$. Скажем, что наборы α и $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$ равны ($\alpha = \beta$), если $a_i = b_i$ при всех $i \in \mathbf{N}$. Обозначим семейство всех таких наборов через $\mathcal{A}$.

Сопоставим набору $\alpha \in \mathcal{A}$ систему $\{f_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ гомеоморфизмов $f_j : \Gamma \to \Gamma$, положив

$$f_j = q_k : \Gamma \to \Gamma, \text{ если } j \geq \sum_{i=1}^{k-1} a_i + 1 \text{ и } j \leq \sum_{i=1}^{k} a_i .$$

Построим по системе отображений $\{f_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ гомеоморфизм $f_\alpha : \Gamma \to \Gamma$ и расслоение Понтрягина $\xi_\alpha = (N_\alpha, p_\alpha, S^1)$. Пространство N_α характеризуется тем, что непрерывные инъективные кривые $\gamma_i : S^1 \to N_\alpha$, $i \in \mathbf{N}$, для которых $\gamma_i(S^1) = \mathcal{F}_\alpha(i \times \{\frac{2}{3^i}\})$ являются U-кривыми (и даже RU-кривыми при $i \geq a_1 + 1$). Кривая $\gamma : S^1 \to N_\alpha$, для которой $\gamma_i(S^1) = \mathcal{F}_\alpha(i \times \{0\})$, является RU-кривой, причем в произвольной окрестности V множества $\gamma(S^1)$ для любого наперед заданного числа $m \in \mathbf{N}$ найдется инъективная непрерывная кривая $\beta : S^1 \to V$, такая что

$$\left| \frac{\pi_1(p_\alpha \circ \beta)}{\pi_1(p_\alpha \circ \gamma)} \right| > m .$$

Предложение 7. *Пусть $\xi_\alpha = (N_\alpha, p_\alpha, S^1)$, $\xi_\beta = (N_\beta, p_\beta, S^1)$ — два расслоения Понтрягина из примера 2. Пространства N_α и N_β не гомеоморфны (как топологические пространства) при $\alpha \neq \beta$.*

Доказательство. Предположим, существует гомеоморфизм $\varphi : N_\alpha \to N_\beta$. Так как $\alpha \neq \beta$, найдется $k \in \mathbf{N}$, для которого $a_k \neq b_k$. Пусть $a_k > b_k$. Рассмотрим кривые

$$\gamma_j : S^1 \to N_\alpha, \ j = \sum_{i=1}^{k-1} a_i + 1, \ldots, \sum_{i=1}^{k} a_i ;$$

$$\gamma_j : e^{2\pi i t} \mapsto (\{t\}, \frac{2}{3^j})$$

и их образы $\varphi \circ \gamma_j : S^1 \to N_\beta$, $j = \sum\limits_{i=1}^{k-1} a_i + 1, \ldots, \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$ при гомеоморфизме φ.

1) Покажем, что ни для одной из кривых γ_j не может выполняться равенство $\varphi \circ \gamma_j(S^1) = \mathcal{F}_\beta(I \times \{0\})$ (здесь $\mathcal{F}_\beta : I \times \Gamma \to N_\beta$ — проекция).

Пусть это не так, и $\varphi \circ \gamma_s(S^1) = \mathcal{F}_\beta(I \times \{0\})$ для некоторого $s \in \{\sum\limits_{i=1}^{k-1} a_i + 1, \ldots, \sum\limits_{i=1}^{k} a_i\}$. Найдем окрестность W_0 кривой γ_s, такую чтобы для каждого инъективного непрерывного отображения $\mu : S^1 \to W_0$ выполнялись равенства

$$\left| \frac{\pi_1(p_\alpha \circ \mu)}{\pi_1(p_\alpha \circ \gamma_s)} \right| = \left| \frac{\pi_1(p_\beta \circ \varphi \circ \mu)}{\pi_1(p_\beta \circ \varphi \circ \gamma_s)} \right| = k .$$

Рассмотрим окрестность $\varphi(W_0) = V_0$ множества $\varphi\circ\gamma_s(S^1) = \mathcal{F}_\beta(I\times\{0\})$. Как отмечено выше, найдется непрерывное инъективное отображение $\eta: S^1\to V_0$, такое что

$$\left|\frac{\pi_1(p_\beta\circ\eta)}{\pi_1(p_\beta\circ\varphi\circ\gamma_s)}\right| \geq k+1\,.$$

Кривая $\mu = \varphi^{-1}\circ\eta : S^1\to N_\alpha$ обладает тем свойством, что $\mu(S^1)\subset W_0$ и

$$k = \left|\frac{\pi_1(p_\alpha\circ\mu)}{\pi_1(p_\alpha\circ\gamma_s)}\right| = \left|\frac{\pi_1(p_\beta\circ\varphi\circ\mu)}{\pi_1(p_\beta\circ\varphi\circ\gamma_s)}\right| = \left|\frac{\pi_1(p_\beta\circ\eta)}{\pi_1(p_\beta\circ\varphi\circ\gamma_s)}\right|.$$

Получили противоречие с тем, что $\varphi: N_\alpha\to N_\beta$ — гомеоморфизм.

2) Аналогично доказывается, что ни для одной из кривых γ_j, $j = \sum\limits_{i=1}^{k-1} a_i + 1,\ldots,\sum\limits_{i=1}^{k} a_i$, не может выполняться равенство $\varphi\circ\gamma_s(S^1) = \mathcal{F}_\beta(I\times\{\frac{2}{3^m}\})$ при $m\notin\{\sum\limits_{i=1}^{k-1} b_i+1,\ldots,\sum\limits_{i=1}^{k} b_i\}$. Отличие состоит только в том, что для произвольной инъективной непрерывной кривой $\eta: S^1\to N_\beta$, лежащей в достаточно малой окрестности множества $\varphi\circ\gamma_s(S^1)$, должно выполняться равенство

$$\left|\frac{\pi_1(p_\beta\circ\eta)}{\pi_1(p_\beta\circ\varphi\circ\gamma_s)}\right| = k'$$

при некотором $k'\neq k$.

3) Так же, как и в предложении 5, показывается, что ни при каком $m\in\mathbf{N}$ не выполняется включение $\varphi\circ\gamma_j(S^1) = \mathcal{F}_\beta(I\times(\Gamma\cap(\frac{2}{3^m},\frac{1}{3^{m-1}}]))$.

4) Из сказанного выше следует, что для любого $s\in\{\sum\limits_{i=1}^{k-1} a_i+1,\ldots,\sum\limits_{i=1}^{k} a_i\}$ найдется $r\in\{\sum\limits_{i=1}^{k-1} b_i+1,\ldots,\sum\limits_{i=1}^{k} b_i\}$, такое что $\varphi\circ\gamma_s(S^1) = \mathcal{F}_\beta(I\times\{\frac{2}{3^r}\})$. Так как множества $\gamma_j(S^1)$ не пересекаются, то и их образы при гомеоморфизме φ не пересекаются. Но $\mathrm{card}\{\sum\limits_{i=1}^{k-1} a_i+1,\ldots,\sum\limits_{i=1}^{k} a_i\} = a_k > b_k = \{\sum\limits_{i=1}^{k-1} b_i+1,\ldots,\sum\limits_{i=1}^{k} b_i\}$. Приходим к противоречию с тем, что φ — инъективное отображение.

В случае, когда $a_k < b_k$, все приведенные выше рассуждения нужно повторить для гомеоморфизма $\varphi^{-1}: N_\beta\to N_\alpha$.

Предложение доказано.

Предложение 8. *Существует континуум расслоений Понтрягина $\{\xi_\alpha = (N_\alpha, p_\alpha, S^1)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, таких что их тотальные пространства попарно не гомеоморфны (как топологические пространства), и при любом $\alpha\in\mathcal{A}$ не найдется пары (M^2,Φ), где M^2 — двумерное многообразие (не обязательно ориентируемое), $\Phi: N_\alpha\to M^2$ — вложение.*

Доказательство. Рассмотрим семейство расслоений $\{\xi_\alpha = (N_\alpha, p_\alpha, S^1)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ из примера 2. То, что их тотальные пространства попарно не гомеоморфны, доказано в предложении 7. Каждое из тотальных пространств $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ этих расслоений является RU-пространством и, согласно основной теореме, не вкладывается ни в какое двумерное многообразие. Осталось доказать, что $\mathrm{card}\{N_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}} = continuum$.

Построим соответствие $\Theta : \{N_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}} \to [0,1] \subset \mathbf{R}$. Поставим в соответствие пространству N_α, $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, действительное число $x \in [0,1]$, такое что $x = \sum\limits_{j\in\mathbf{N}} \frac{1}{10^j} x_j$, $x_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ и $a_j \equiv x_j \pmod{10}$ при всех $j \in \mathbf{N}$. Предложение 7 показывает, что соответствие Θ определено корректно.

Пусть $x = \sum\limits_{j\in\mathbf{N}} \frac{1}{10^j} x_j$, $x_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ — запись произвольного элемента отрезка $[0,1]$ в десятичной системе счисления. Число x является образом пространства N_α, где $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, $a_j = x_j + 10$ при всех $j \in \mathbf{N}$. Из этого следует, что соответствие Θ сюръективно и $\mathrm{card}\{N_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}} = continuum$.

Предложение доказано.

Список литературы

[1] *М.М. Постников*, Лекции по геометрии. Семестр 4. Дифференциальная геометрия. Наука, Москва (1988), 496 с.

[2] *Дж.Л. Келли*, Общая топология. Наука, Москва (1981), 432 с.

[3] *В.В. Немыцкий*, Топологические вопросы теории динамических систем. — Успехи мат. наук (1949), т. IV, вып. 6(34), с. 90–153.

[4] *В.М. Алексеев*, Символическая динамика. Издание Института математики АН УССР, Киев (1976), 212 с.

[5] *К. Рурк, Б. Сандерсон*, Введение в кусочно линейную топологию. Мир, Москва (1974), 208 с.

On embedding of total spaces of fiber bundles over a circle with the Cantor set as a fiber in two-dimensional manifolds

E.A. Polulyakh

The problem of an embedding of total spaces of fiber bundles over a circle with the Cantor set as a fiber (Pontryagin bundles) in two-dimensional manifolds is investigated. The sufficient condition is obtained for nonexistence of a two-dimensional manifold M^2 and inclusion map $\Phi : N \to M^2$ for total space N of the Pontryagin bundle $\xi = (N, p, S^1)$. We also construct the extensive class of spaces satisfying the condition.

Про вкладення тотальних просторів розшарувань над колом з шаром множина Кантора в двовимірні многовиди

Є.О. Полулях

Досліджується проблема вкладення тотальних просторів розшарувань над колом з шаром множина Кантора (розшарувань Понтрягіна) в двовимірні многовиди. Отримано достатню умову того, що для тотального простору N розшарування Понтрягіна $\xi = (N, p, S^1)$ не існує двовимірного многовиду M^2 и вкладення $\Phi : N \to M^2$. Побудовано також широкий клас просторів, що задовольняють цій умові.