Математическая физика, анализ, геометрия
2000, т. 7, № 2, с. 131–152

Восстановление специальных подмногообразий евклидова пространства по заданному грассманову образу

В.А. Горькавый

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
Пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61164, Украина
E-mail: gorkaviy@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 14 декабря 1998 года
Представлена И.В. Островским

Доказаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы заданное подмногообразие грассманова многообразия было грассмановым образом некоторого подмногообразия евклидова пространства, несущего сеть сопряженных координат.

Введение

Каждому регулярному n-мерному подмногообразию F^n в (n+m)-мерном евклидовом пространстве E^{n+m} можно сопоставить его грассманов образ, который лежит в грассмановом многообразии $G(m, n+m)$. Однако произвольное подмногообразие Γ в $G(m, n+m)$ при $n, m \geq 2$, вообще говоря, не будет грассмановым образом ни для какого регулярного $F^n \subset E^{n+m}$. Действительно, размерность $G(m, n+m)$ равна mn, и, следовательно, произвол в задании подмногообразия в $G(m, n+m)$ больше, чем в E^{n+m}. Поэтому нетривиальной является следующая *задача восстановления: найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы наперед заданное подмногообразие в $G(m, n+m)$ было бы грассмановым образом регулярного $F^n \subset E^{n+m}$, $n, m \geq 2$.*

Решение указанной проблемы было получено сначала в случае подмногообразий $F^2 \subset E^4$, а затем — в случае $F^2 \subset E^{m+2}$, $m \geq 3$, с невырожденным грассмановым образом (см. [1–4], а также обзор [5]). В ряде работ автора полученные результаты были дополнены и обобщены в двух направлениях: *тангенциально вырожденные* подмногообразия F^n в E^{n+m} с вырожденным грассмановым образом [6–8] и *свободные* подмногообразия F^n в E^{n+m}, т.е. такие, у которых точечная коразмерность постоянна и принимает максимально возможное значение $\dfrac{n(n+1)}{2}$ (см. [9], где приведены результаты для $n=3$). Отметим, что если первый из указанных классов подмногообразий является достаточно узким и специальным, то второй представляет собой наиболее общую ситуацию.

Проведенные исследования показали, что, по всей видимости, не существует *общих* необходимых и достаточных условий на грассманов образ, которые возможно было бы эффективно представить в более или менее инвариантном виде. Реальный же интерес может представлять только исследование отдельных частных классов подмногообразий (как это было сделано для тангенциально вырожденных и свободных подмногообразий). В настоящей статье изучается один такой класс, называемый $\mathcal{A}$-*подмногообразиями*. Отличительной особенностью $\mathcal{A}$-подмногообразий F^n в E^{n+m} является возможность введения на F^n локальных координат так, чтобы координатные линии были взаимно сопряжены относительно второй квадратичной формы F^n. Наличие такого свойства является достаточно ограничительным условием при $n, m \geq 2$, поэтому $\mathcal{A}$-подмногообразия образуют очень специальный класс. Он не пуст: примерами $\mathcal{A}$-подмногообразий могут служить стандартные вложения тора $S^1 \times \ldots \times S^1$ в $E^2 \times \ldots \times E^2$, локальные изометрические погружения пространства Лобачевского L^n в E^{2n-1} и т.д.

Основным результатом статьи является доказательство необходимых и достаточных условий для того, чтобы наперед заданное подмногообразие Γ^n в $G(m, n+m)$ было бы невырожденным грассмановым образом какого-либо $\mathcal{A}$-подмногообразия $F^n \subset E^{n+m}$ (теоремы 2, 3). Кроме того, в подтверждение результатов В.В. Рыжкова [12], показано, что $\mathcal{A}$-подмногообразие $F^n \subset E^{n+m}$ определено своим грассмановым образом неоднозначно, т.е. существуют нетривиальные деформации F^n в E^{n+m}, отличные от параллельного переноса и гомотетии, при которых грассманов образ сохраняется (произвол — n функций одной переменной).

§ 1

Объемлющим пространством для грассманова образа является грассманово многообразие $G(m, n+m)$ m-мерных подпространств $(n+m)$-мерного евклидова пространства E^{n+m}. Под термином "подпространство в E^{n+m}" будем всегда подразумевать линейное подпространство, проходящее через фиксированное начало $O \in E^{n+m}$; для m-мерных аффинных подпространств в E^{n+m} будем использовать термин "m-мерная плоскость".

Многообразие Грассмана $G(m, n+m)$ обладает рядом интересных свойств, из которых выделим три.

Во-первых, $G(m, n+m)$ является аналитическим многообразием, на котором можно ввести естественную риманову структуру, превращающую $G(m, n+m)$ в риманово глобально симметрическое пространство [5].

Во-вторых, для $G(m, n+m)$ с естественной римановой метрикой существует аналитическое изометрическое вложение **Pl** с помощью плюккеровых координат в вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^{\mathcal{M}}$ размерности $\mathcal{M} = C_{n+m}^{m} - 1$ [5]. В дальнейшем под $G(m, n+m) \subset \mathbb{R}P^{\mathcal{M}}$ будем подразумевать многообразие $G(m, n+m)$, вложенное в $\mathbb{R}P^{\mathcal{M}}$ именно с помощью плюккеровых координат.

Наконец, каковы бы ни были $k \leq n$, $l \leq m$, многообразие $G(l, k+l)$ изометрически вкладывается в $G(m, n+m)$. А именно, зафиксируем тройку взаимно ортогональных подпространств $E_0^{n-k}, E_0^{m-l}, E_0^{k+l}$ в E^{n+m}. Сопоставим каждому подпространству $E^l \subset E_0^{k+l}$ подпространство E^m в E^{n+m}, натянутое на E_0^{m-l} и E^l. Это соответствие и определяет отображение $G(l, k+l) \to G(m, n+m)$, которое является изометрическим вложением, при этом образ $\Lambda(l, k+l) \subset G(m, n+m)$ является вполне геодезическим подмногообразием [5]. Будем называть $\Lambda(l, k+l)$ стандартным подмногообразием в $G(m, n+m)$. Стандартные подмногообразия очень удобны в применении, с их помощью можно описывать отдельные свойства как самого многообразия Грассмана $G(m, n+m)$, так и его подмногообразий [8].

Завершая параграф, посвященный свойствам грассмановых многообразий, остановимся на так называемых "естественных" координатах в $G(m, n+m)$. Зафиксируем некоторое $E_0^m \subset E^{n+m}$ и рассмотрим подпространства $E^m \subset E^{n+m}$, которые ортогональной проекцией $E^{n+m} \to E_0^m$ отображаются биективно на E_0^m. Все такие E^m образуют окрестность $U(E_0^m)$ подпространства E_0^m как точки в $G(m, n+m)$. Введем декартовы координаты $x^1, \ldots, x^{n+m}$ в E^{n+m}, зафиксировав ортонормированный базис $\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_{n+m}$ так, чтобы E_0^m было натянуто на векторы $\vec{e}_{n+1}, \ldots, \vec{e}_{n+m}$. Тогда каждое подпространство E^m из $U(E_0^m)$ имеет однозначно определенный базис из векторов специального вида

$$\vec{\varepsilon}_\sigma = \sum_{i=1}^{n} z_\sigma^i \vec{e}_i + \vec{e}_{n+\sigma}, \quad \sigma = \overline{1, m}, \tag{1}$$

и задается системой уравнений

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^1 & \ldots & z_m^1 \\ \vdots & & \vdots \\ z_1^n & \ldots & z_m^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ \vdots \\ x^{n+m} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Величины z_σ^i могут быть взяты за локальные координаты в $G(m, n+m)$, они и называются *естественными координатами с центром* E_0^m. Обычно каждая точка из $U(E_0^m)$ представляется матрицей $z = (\, z_\sigma^i \,)$ ее естественных координат. Касательные векторы многообразия $G(m, n+m)$ также представляются матрицами размером n.

§ 2

Пусть F^n — произвольное C^r-гладкое регулярное подмногообразие евклидова пространства E^{n+m}, $r \geq 2$, $n \geq 2$. Возьмем нормальную плоскость $N_P F^n$ подмногообразия F^n в точке P, перенесем ее параллельно так, чтобы она проходила через начало $O \in E^{n+m}$, и будем рассматривать $N_P F^n$ как подпространство в E^{n+m}. Отображение

$$\mathcal{G} : F^n \to G(m, n+m),$$

ставящее в соответствие точке $P \in F^n$ подпространство $N_P F^n \subset E^{n+m}$, называется *грассмановым отображением* подмногообразия F^n. Образ $\Gamma \subset G(m, n+m)$ подмногообразия F^n при отображении $\mathcal{G}$ называется *грассмановым образом*. В общем случае Γ является C^{r-1}-гладким регулярным n-мерным подмногообразием в $G(m, n+m)$, хотя в некоторых частных случаях регулярность может нарушаться и Γ даже может вырождаться в подмногообразие меньшей размерности $k < n$. В дальнейшем будем обозначать точку в $G(m, n+m)$, соответствующую подпространству $N_P F^n \subset E^{n+m}$, через $P^* = \mathcal{G}(P)$. Аналогично, вектор в касательном пространстве $T_{P^*} G(m, n+m)$, соответствующий касательному вектору $X \in T_P F^n$, будем обозначать через $X^* = d_{\mathcal{G}}(X)$; здесь и далее $d_{\mathcal{G}} : TF^n \to TG(m, n+m)$ обозначает дифференциал отображения $\mathcal{G}$.

С помощью отображения Грассмана можно описывать некоторые внешнегеометрические свойства подмногообразия $F^n \subset E^{n+m}$. В частности, имеет место следующее необходимое условие на грассманов образ.

Теорема 1 [8]. *Пусть $F^n \subset E^{n+m}$ является C^2-гладким регулярным подмногообразием. Тогда:*

1) ранг отображения Грассмана $\mathcal{G} : F^n \to G(m, n+m)$ в точке $P \in F^n$ равен k тогда и только тогда, когда через точку P^* в $G(m, n+m)$ проходит $\Lambda(m, k+m)$, удовлетворяющее

$$d_{\mathcal{G}}(T_P F^n) \subset T_{P^*} \Lambda(m, k+m), \tag{3}$$

и при этом ни одно из $\Lambda(m, k_1+m)$, проходящих через P^*, не удовлетворяет условию (3) при $k_1 < k$;

2) точечная коразмерность подмногообразия $F^n \subset E^{n+m}$ в точке $P \in F^n$ равна l тогда и только тогда, когда через точку P^* в $G(m, n+m)$ проходит $\Lambda(l, n+l)$, удовлетворяющее

$$d_{\mathcal{G}}(T_P F^n) \subset T_{P^*} \Lambda(l, n+l), \tag{4}$$

и при этом ни одно из $\Lambda(l_1, n+l_1)$, проходящих через P^*, не удовлетворяет условию (4) при с $l_1 < l$.

Таким образом, можем оценить точечную коразмерность (размерность первого нормального пространства) подмногообразия $F^n \subset E^{n+m}$ исключительно в терминах грассманова отображения $\mathcal{G}$.

Оказывается, что в терминах отображения Грассмана можно также описывать и сопряженные направления на подмногообразии F^n. Напомним некоторые понятия. Обозначим через $\mathcal{I} : TF^n \times TF^n \to \mathbb{R}$ и $\mathcal{II} : TF^n \times TF^n \to NF^n$ соответственно первую и вторую фундаментальные формы F^n. Векторы $X, Y \in T_P F^n$ называются *сопряженными (относительно второй фундаментальной формы)*, если $\mathcal{II}(X, Y) = 0$. Вектор $X \in T_P F^n$ называется *асимптотическим*, если $\mathcal{II}(X, X) = 0$. Подпространство $\Omega \subset T_P F^n$ называется *асимптотическим*, если оно состоит из асимптотических векторов. *Вектором нормальной кривизны* подмногообразия F^n в точке P в направлении вектора $X \in T_P F^n$ называют вектор $k_{norm}(X) = \mathcal{II}(X, X)/\mathcal{I}(X, X)$, лежащий в нормальном пространстве $N_P F^n$.

Лемма 1. *Пусть $X_1, \ldots, X_n \in T_P F^n$ – линейно независимые взаимно сопряженные векторы. Тогда их образы $X_1^*, \ldots, X_n^* \in T_{P^*} G(m, n+m)$ при отображении $d_{\mathcal{G}}$ являются асимптотическими векторами подмногообразия $G(m, n+m) \subset \mathbb{R}P^{\mathcal{M}}$. При этом:*

1) вектор $X_i^* = 0$ тогда и только тогда, когда X_i является асимптотическим вектором подмногообразия $F^n \subset E^{n+m}$;

2) подпространство в $T_{P^*} G(m, n+m)$, натянутое на X_i^* и X_j^*, является асимптотическим для подмногообразия $G(m, n+m) \subset \mathbb{R}P^{\mathcal{M}}$ тогда и только тогда, когда векторы нормальной кривизны $k_{norm}(X_i)$ и $k_{norm}(X_j)$ подмногообразия $F^n \subset E^{n+m}$ в точке P относительно X_i и X_j коллинеарны.

Доказательство. Обозначим через $E_0^m \subset E^{n+m}$ нормальное пространство $N_P F^n$ и введем декартовы координаты $x^1, \ldots x^{n+m}$ в E^{n+m}, зафиксировав ортонормированный базис векторов $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n+m}$ так, чтобы E_0^m было натянуто на $\vec{e}_{n+1}, \ldots, \vec{e}_{n+m}$. Далее введем сответствующие естественные координаты z_σ^i с центром E_0^m в $G(m, n+m)$. Наконец, зададим координаты $v^1, \ldots, v^n$ в окрестности точки P на F^n. Тогда локально подмногообразие $F^n \subset E^{n+m}$ задается радиус-вектором

$$\vec{x} = \vec{\rho}(v^1, \ldots, v^n) = (\rho^1, \ \ldots, \ \rho^{n+m}),$$

а грассманов образ $\Gamma \subset G(m, n+m)$ — радиус-вектором

$$z = \xi(v^1, \dots, v^n) = \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \dots & \xi_m^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^n & \dots & \xi_m^n \end{pmatrix},$$

где ρ^J и ξ_σ^i суть функции от $v^1, \dots, v^n$.

Относительно введенных координат первая и вторая фундаментальные формы подмногообразия F^n в точке P могут быть записаны в виде

$$\mathcal{I} = g_{ij} dv^i dv^j,$$

$$\mathcal{II} = L_{ij}^\sigma dv^i dv^j \, \vec{e}_{n+\sigma};$$

здесь и далее повторяющийся вверху и внизу индекс обозначает суммирование, причем интервалы изменения индексов условимся считать следующими: $1 \le i, j, p, q, s, t \le n$, $1 \le \sigma, \nu, \tau \le m$, $1 \le I, J \le n+m$.

Для дифференциала $d_{\mathcal{G}}$ грассманова отображения в точке P имеется следующая хорошо известная формула (см. [5]):

$$d_{\mathcal{G}}\Big(\frac{\partial \vec{\rho}}{\partial v^i}\Big) = \frac{\partial \xi}{\partial v^i} = -\begin{pmatrix} c_1^1 & \dots & c_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ c_1^n & \dots & c_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} L_{i1}^1 & \dots & L_{i1}^m \\ \vdots & & \vdots \\ L_{in}^1 & \dots & L_{in}^m \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где константы c_i^j определены разложением

$$\frac{\partial \vec{\rho}}{\partial v^i}(P) \;=\; c_i^j \vec{e}_j.$$

Не уменьшая общности, специализируем выбор локальных координат $v^1, \dots, v^n$ на F^n так, чтобы в точке P имело место $X_i = \dfrac{\partial \vec{\rho}}{\partial v^i}$, $i = \overline{1, n}$. Тогда условие сопряженности векторов $X_1, \dots, X_n$ эквивалентно тому, что $L_{ij}^\sigma = 0$ для любых $\sigma = \overline{1, m}$, $i \ne j = \overline{1, n}$. В этом случае равенство (5) принимает вид

$$d_{\mathcal{G}}(X_i) = X_i^* = \frac{\partial \xi}{\partial v^i}$$

$$= -\begin{pmatrix} c_1^1 & \dots & c_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ c_1^n & \dots & c_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ L_{ii}^1 & \dots & L_{ii}^m \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

В то же время, известен следующий критерий асимптотичности для касательных векторов подмногообразия $G(m, n+m) \subset \mathbb{R}P^{\mathcal{M}}$: ненулевой вектор $T \in T_z G(m, n+m)$ является асимптотическим, если матрица его координат относительно естественных координат z^i_σ в $G(m, n+m)$ имеет ранг 1 (см. [6]). Применяя этот критерий и учитывая (6), получаем, что $X^*_1, \dots, X^*_n \in T_{P^*} G(m, n+m)$ являются асимптотическими векторами подмногообразия $G(m, n+m) \subset \mathbb{R}P^{\mathcal{M}}$.

Кроме того, из (6) легко видеть, что $X^*_i = 0$ тогда и только тогда, когда $L^\sigma_{ii} = 0$ для всех $\sigma = \overline{1, m}$, т.е. когда $\mathcal{II}(X_i, X_i) = 0$, что эквивалентно асимптотичности вектора $X_i \in T_P F^n$.

Для доказательства второй части леммы, применим упомянутый критерий асимптотичности для касательных векторов подмногообразия $G(m, n+m)$ в $\mathbb{R}P^{\mathcal{M}}$ [6]. Тогда не составляет труда показать, что подпространство в $T_z G(m, n+m)$, натянутое на касательные векторы

$$A = \begin{pmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_m \\ \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & \dots & A^n_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B^1_1 & \dots & B^1_m \\ \vdots & & \vdots \\ B^n_1 & \dots & B^n_m \end{pmatrix},$$

является асимптотическим для $G(m, n+m) \subset \mathbb{R}P^{\mathcal{M}}$ тогда и только тогда, когда либо матрица размером $2n \times m$, которая составлена из строк матриц A и B, имеет ранг, не превосходящий 1, либо матрица размером $n \times 2m$, которая составлена из столбцов матриц A и B, имеет ранг, не превосходящий 1. Применяя этот критерий и учитывая (6), получаем, что подпространство в $T_{P^*} G(m, n+m)$, натянутое на X^*_i и X^*_j, является асимптотическим подпространством подмногообразия $G(m, n+m) \subset \mathbb{R}P^{\mathcal{M}}$ тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Rank} \begin{pmatrix} L^1_{ii} & \dots & L^m_{ii} \\ L^1_{jj} & \dots & L^m_{jj} \end{pmatrix} \leq 1. \tag{7}$$

С другой стороны, векторы нормальной кривизны подмногообразия F^n в точке P в направлении X_i и X_j имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} k_{norm}(X_i) &= \frac{L^\sigma_{ii}}{g_{ii}} \, \vec{e}_{n+\sigma}, \\ k_{norm}(X_j) &= \frac{L^\sigma_{jj}}{g_{jj}} \, \vec{e}_{n+\sigma}, \end{aligned} \tag{8}$$

и легко видеть, что $k_{norm}(X_i)$ коллинеарен $k_{norm}(X_j)$ тогда и только тогда, когда имеет место (7), т.е. когда подпространство в $T_{P^*} G(m, n+m)$, натянутое на X^*_i и X^*_j, является асимптотическим, что и требовалось доказать.

Замечание о размерности грассманова образа. В условиях леммы 1, предположим, что k векторов $X_1,\ldots,X_k$ не являются асимптотическими векторами подмногообразия $F^n \subset E^{n+m}$, а оставшиеся $n-k$ векторов $X_{k+1},\ldots,X_n$ асимптотичны. По доказанному, $X^*_{k+1} = \ldots = X^*_n = 0$, а $X^*_1,\ldots,X^*_k \in T_{P^*}G(m,n+m)$ – ненулевые асимптотические векторы подмногообразия $G(m,n+m) \subset \mathbb{R}P^{\mathcal{M}}$. В этом случае легко показать, принимая во внимание (6), что $X^*_1,\ldots,X^*_k$ не только ненулевые, но и линейно независимы, и, значит, "размерность" грассманова образа Γ в точке P^* (ранг отображения Грассмана $\mathcal{G}$ в точке P) равна k. В частности, если ни один из векторов $X_1,\ldots,X_n$ не является асимптотическим, то отображение Грассмана $\mathcal{G}$ не вырождено в точке P.

Отметим, что аналог первой части леммы 1 для случая главных направлений был ранее получен В.Т. Лисицей [11].

Лемма 1 допускает обращение при одном дополнительном условии.

Лемма 2. *Пусть $X_1,\ldots,X_n \in T_PF^n$ — линейно независимые векторы. Предположим, что их образы $X^*_1,\ldots,X^*_n \in T_{P^*}G(m,n+m)$ при отображении $d_{\mathcal{G}}$ являются асимптотическими векторами подмногообразия $G(m,n+m) \subset \mathbb{R}P^{\mathcal{M}}$. Дополнительно предположим, что для любой пары ненулевых асимптотических векторов X^*_i и X^*_j, $i \neq j$, подпространство в $T_{P^*}G(m,n+m)$, натянутое на X^*_i и X^*_j, не является асимптотическим для $G(m,n+m) \subset \mathbb{R}P^{\mathcal{M}}$. Тогда $X_1,\ldots,X_n \in T_PF^n$ взаимно сопряжены.*

Доказательство. Не уменьшая общности будем считать, что введены те же координаты v^i, x^I и z^i_σ соответственно на F^n, E^{n+m} и $G(m,n+m)$, что и при доказательстве леммы 1. Вновь будем использовать формулу (5). Применяя упомянутый ранее критерий асимптотичности касательных векторов $G(m,n+m) \subset \mathbb{R}P^{\mathcal{M}}$, получаем, что в точке P имеет место

$$\operatorname{Rank}\begin{pmatrix} c^1_1 & \ldots & c^1_n \\ \vdots & & \vdots \\ c^n_1 & \ldots & c^n_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & \ldots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & \ldots & g_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} L^1_{i1} & \ldots & L^m_{i1} \\ \vdots & & \vdots \\ L^1_{in} & \ldots & L^m_{in} \end{pmatrix} \leq 1$$

для любого $i = \overline{1,n}$. В силу невырожденности матриц (c^i_j) и (g_{ij}), последнее условие можно записать в виде

$$\operatorname{Rank}\begin{pmatrix} L^1_{i1} & \ldots & L^m_{i1} \\ \vdots & & \vdots \\ L^1_{in} & \ldots & L^m_{in} \end{pmatrix} \leq 1, \quad i = \overline{1,n}. \tag{9}$$

Покажем, что $L^\sigma_{ij} = 0$ для любых $\sigma = \overline{1,m}$, $i \neq j = \overline{1,n}$. Предположим, что существует ненулевое $L_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}}^{\tilde{\sigma}}$, $\tilde{\imath} \neq \tilde{\jmath}$. Тогда

$$\operatorname{Rank}\begin{pmatrix} L_{\tilde{\imath}1}^{1} & \dots & L_{\tilde{\imath}1}^{m} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{\tilde{\imath}n}^{1} & \dots & L_{\tilde{\imath}n}^{m} \end{pmatrix} = 1.$$

Следовательно, все строки матрицы $X_{\tilde{\imath}}^{*}$ коллинеарны ненулевой строке $(L_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}}^{1}, \dots, L_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}}^{m})$. Аналогично, все строки матрицы $X_{\tilde{\jmath}}^{*}$ коллинеарны ненулевой строке $(L_{\tilde{\jmath}\tilde{\imath}}^{1}, \dots, L_{\tilde{\jmath}\tilde{\imath}}^{m})$. Составляя из строк матриц $X_{\tilde{\imath}}^{*}$ и $X_{\tilde{\jmath}}^{*}$ матрицу размером $2n \times m$, получаем, что ее ранг также равен 1 в силу симметричности L_{ij}^{σ} по нижним индексам. Но тогда, как это указывалось при доказательстве леммы 1, подпространство в $T_{P^*}G(m, n+m)$, натянутое на $X_{\tilde{\imath}}^{*}$ и $X_{\tilde{\jmath}}^{*}$, будет асимптотическим для $G(m, n+m) \subset \mathbb{R}P^{\mathcal{M}}$, что противоречит дополнительному предположению леммы 2. Поэтому $L_{ij}^{\sigma} = 0$ для любых $\sigma = \overline{1, m}$, $i \neq j = \overline{1, n}$, а значит, $X_1, \dots, X_n \in T_P F^n$ взаимно сопряжены, что и требовалось доказать.

Таким образом, свойство подмногообразия $F^n \subset E^{n+m}$ иметь в некоторой своей точке P n линейно независимых взаимно сопряженных касательных векторов может быть (в общем случае) охарактеризовано в терминах отображения Грассмана $\mathcal{G} : F^n \to G(m, n+m)$ и плюккерова вложения $G(m, n+m) \hookrightarrow \mathbb{R}P^{\mathcal{M}}$.

З а м е ч а н и е. Дополнительное предположение в лемме 2 существенно, как показывает следующий пример. Возьмем произвольную поверхность F^2, лежащую в аффинной гиперплоскости $\mathcal{E}^3 \subset E^4$. Предположим, что гауссова кривизна F^2 не обращается в нуль. Грассманов образ Γ^2 поверхности $F \subset E^4$ будет лежать в $G(2,4) \subset \mathbb{R}P^5$, при этом легко показать, что для любой точки $P^* \subset \Gamma^2$ подпространство $T_{P^*}\Gamma^2 \subset T_{P^*}G(2,4)$ будет асимптотическим подпространством подмногообразия $G(2,4) \subset \mathbb{R}P^5$. Если взять теперь два произвольных линейно независимых вектора $X, Y \in T_P F$, то их образы $X^*, Y^* \in T_{P^*}G(2,4)$ будут асимптотическими векторами подмногообразия $G(2,4) \subset \mathbb{R}P^5$, однако сами X, Y не обязаны, вообще говоря, быть сопряженными.

§ 3

Результаты предыдущего параграфа имеют точечный характер. Однако можно сформулировать и их "интегральные" аналоги, что будет выглядеть более естественно с точки зрения задачи восстановления, составляющей основной объект исследований в данной статье. Сначала введем в рассмотрение два класса подмногообразий в E^n и в $G(m, n+m)$, ограничившись для удобства C^{∞}-гладкими объектами.

Определение 1. *Регулярное n-мерное подмногообразие $F^n \subset E^{n+m}$, $n, m \geq 2$, назовем $\mathcal{A}$-подмногообразием, если для любой точки $P \in F^n$ существует окрестность $U^n \subset F^n$ и координаты $v^1, \ldots, v^n$ в U^n такие, что:*

C_1) *координатные линии v^i сопряжены (относительно второй фундаментальной формы подмногообразия $F^n \subset E^{n+m}$);*

C_2) *каковы бы ни были $1 \leq i \neq j \leq n$ и точка $Q \in U^n$, векторы нормальной кривизны подмногообразия F^n в точке Q в направлении координатных линий v^i и v^j не коллинеарны.*

Безусловно, класс $\mathcal{A}$-подмногообразий достаточно специален. Во-первых, из C_1 следует, что в каждой точке $P \in F^n$ имеется n линейно независимых сопряженных единичных векторов $X_1, \ldots, X_n \in T_P F^n$, причем несложно показать, что вследствие C_2 эти сопряженные орты определены однозначно с точностью до знака. Во-вторых, предполагается существование C^∞-гладких локальных координат на F^n таких, что в каждой точке P векторы $X_1, \ldots, X_n$ касаются координатных линий (наличие в каждой точке сопряженных направлений еще не гарантирует существование таких координат). Вообще говоря, произвольное подмногообразие $F^n \subset E^{n+m}$ не удовлетворяет C_1, и чем больше значение коразмерности m, тем ограничительнее становится условие C_1. С другой стороны, если $F^n \subset E^{n+m}$ обладает свойством C_1, то тогда в общем случае оно удовлетворяет и C_2. Таким образом, специфика $\mathcal{A}$-подмногообразий обусловлена именно условием C_1. Приведем несколько примеров $\mathcal{A}$-подмногообразий.

Пример 1. Пусть $\gamma_i \subset E_i^2$, $i = \overline{1, \mathcal{N}}$, — кривые с ненулевой кривизной. Тогда произведение $\gamma_1 \times \ldots \times \gamma_{\mathcal{N}} \subset E_1^2 \times \ldots \times E_{\mathcal{N}}^2$ является $\mathcal{A}$-подмногообразием.

Пример 2. Пусть область L_*^n пространства Лобачевского L^n изометрически погружена в E^{2n-1}. Ю.А. Аминовым было доказано, что в L_*^n можно ввести координаты кривизны, т.е. такие координаты, координатные линии которых — линии кривизны $L_*^n \subset E^{2n-1}$. Легко проверить, что $L_*^n \subset E^{2n-1}$ является $\mathcal{A}$-подмногообразием.

Пример 3. Зададим в E^4 поверхность F^2 радиус-вектором

$$\vec{x} = (u - \frac{2}{3}(v^2+2)^{\frac{3}{2}}, v^2, -\frac{u^2}{2} + \frac{v^3}{3}, -\frac{u^2}{2} - \frac{v^3}{3}), \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,$$

относительно декартовых координат x^i в E^4. Прямым подсчетом проверяется, что F^2 является $\mathcal{A}$-подмногообразием. Этот пример интересен тем, что на F^2 нельзя ввести координаты кривизны, а гауссова кривизна F^2 тождественно равна нулю.

П р и м е р 4. Зададим в E^4 поверхность F^2 радиус-вектором

$$\vec{x} = (u, v - u\mathrm{ctg}\alpha, -\frac{u^2}{2}, -\frac{v^2}{2}\sin\alpha), \quad (u,v) \in R \times R,$$

относительно декартовых координат x^i в E^4, где $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ — параметр. Так определенное F^2 является $\mathcal{A}$-подмногообразием. Как и в примере 3, на F^2 нельзя ввести координаты кривизны, а гауссова кривизна F^2 знакопеременна.

Естественно предположить, что классу $\mathcal{A}$-подмногообразий в E^{n+m} соответствует некоторый класс подмногообразий в $G(m, n+m)$.

Определение 2. *Регулярное n-мерное подмногообразие Γ^n в $G(m,n+m)$, $n, m \geq 2$, назовем $\mathcal{A}^*$-подмногообразием, если:*

1^*. *Какова бы ни была точка $P^* \in \Gamma^n$, никакое $\Lambda(m, k+m)$, $k < n$, в $G(m,n+m)$, проходящее через точку P^*, не удовлетворяет условию $T_{P^*}\Gamma \subset T_{P^*}\Lambda(m,k+m)$.*

2^*. *Для любой точки $P^* \in \Gamma^n$ существует окрестность $V^n \subset \Gamma^n$ и координаты $v^1, \ldots, v^n$ в V^n такие, что:*

C_1^*) *координатные линии v^i на Γ^n являются асимптотическими линиями подмногообразия $G(m,n+m) \subset \mathbb{R}P^{\mathcal{M}}$;*

C_2^*) *каковы бы ни были $1 \leq i \neq j \leq n$ и точка $Q^* \in V^n$, подпространство в $T_{Q^*}\Gamma^n$, натянутое на касательные векторы координатных линий v^i и v^j в точке Q^*, не является асимптотическим подпространством подмногообразия $G(m,n+m) \subset \mathbb{R}P^{\mathcal{M}}$.*

Условие 1^* в данном определении является общим необходимым условием на грассманов образ вследствие теоремы 1. Напротив, свойство C_1^* накладывает на Γ^n существенные ограничения. Действительно, асимптотические направления подмногообразия $G(m,n+m) \subset \mathbb{R}P^{\mathcal{M}}$ образуют в nm-мерном касательном пространстве $T_zG(m,n+m)$ $(n+m-1)$-мерный конус, поэтому чем больше n и m, тем ограничительнее C_1^*. С другой стороны, если какое-то $\Gamma^n \subset G(m,n+m)$ удовлетворяет C_1^*, то в общем случае оно будет удовлетворять и C_2^*. Поэтому, именно свойство C_1^* обуславливает специальность $\mathcal{A}^*$-подмногообразий.

Леммы 1 и 2 вместе с теоремой 1 приводят к следующему утверждению, объясняющему связь $\mathcal{A}$-подмногообразий $F^n \subset E^{n+m}$ и $\mathcal{A}^*$-подмногообразий $\Gamma^n \subset G(m,n+m)$.

Теорема 2. *Регулярное C^∞-гладкое подмногообразие $F^n \subset E^{n+m}$, n, $m \geq 2$, является $\mathcal{A}$–подмногообразием тогда и только тогда, когда его грассманов образ $\Gamma \subset G(m,n+m)$ является $\mathcal{A}^*$–подмногообразием.*

Оказывается, что грассмановыми образами $\mathcal{A}$-подмногообразий исчерпывается все множество $\mathcal{A}^*$-подмногообразий. А именно, имеет место следующее утверждение, усиливающее теорему 2 и составляющее основной результат статьи.

Теорема 3. *Пусть задано $\mathcal{A}^*$-подмногообразие $\Gamma^n \subset G(m, n+m)$. Какова бы ни была точка $P^* \in \Gamma^n$, у нее существует окрестность $W^n \subset \Gamma^n$, являющаяся грассмановым образом некоторого $\mathcal{A}$-подмногообразия $F^n \subset E^{n+m}$.*

Необходимо отметить, что размерность nm многообразия Грассмана $G(m, n+m)$ превосходит размерность $n+m$ пространства E^{n+m}, когда либо $n \geq 2$, $m > 2$, либо $n > 2$, $m \geq 2$. Поэтому в этих случаях существуют регулярные n-мерные подмногообразия в $G(m, n+m)$, которые не могут быть (даже локально) грассмановыми образами регулярных подмногообразий в E^{n+m}. Тем удивительнее выглядит тот факт, что произвольно взятое $\mathcal{A}^*$-подмногообразие в $G(m, n+m)$ будет (в малом) грассмановым образом. При этом достаточной является именно совокупность условий 1^* и 2^* из определения 2, тогда как по отдельности они ни в коей мере не достаточны: можно привести массу примеров подмногообразий в $G(m, n+m)$, обладающих либо свойством 1^*, либо C_1^*, либо C_2^*, но не являющихся грассмановыми образами.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. Итак, пусть задано произвольное $\mathcal{A}^*$-подмногообразие $\Gamma^n \subset G(m, n+m)$, $n, m \geq 2$. Зафиксируем произвольную точку $P^* \in \Gamma^n$. Обозначим через $E_0^m \subset E^{n+m}$ подпространство, соответствующее точке P^*. Введем декартовы координаты $x^1, \dots, x^{n+m}$ в E^{n+m}, выбрав ортонормированный базис $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n+m}$ так, чтобы E_0^m было натянуто на $\vec{e}_{n+1}, \dots, \vec{e}_{n+m}$. Введем соответствующие естественные координаты z_σ^i с центром E_0^m в $G(m, n+m)$. По определению, в достаточно малой окрестности V^n точки P^* на Γ^n существуют координаты $v^1, \dots, v^n$ такие, что имеет место C_1^* и C_2^*. Обозначим через $v_0 = (v_0^1, \dots, v_0^n)$ координаты точки P^*, а через $\tilde{V}^n$ — окрестность точки v_0 в координатном пространстве, соответствующую окрестности $V^n \subset \Gamma^n$. Тогда $\Gamma^n \subset G(m, n+m)$ задается локально радиус-вектором

$$z = \xi(v^1, \dots, v^n) = \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \dots & \xi_m^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^n & \dots & \xi_m^n \end{pmatrix},$$

где $\xi_\sigma^i(v^1, \dots, v^n)$ суть C^∞-гладкие функции.

Так как координатные линии v^i на Γ^n являются асимптотическими кривыми подмногообразия $G(m, n+m) \subset \mathbb{R}P^{\mathcal{M}}$, то, используя критерий асимптотичности векторов из $T_z G(m, n+m)$ (см. [6]), получаем

$$\operatorname{Rank} \frac{\partial}{\partial v^i} \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \dots & \xi_m^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^n & \dots & \xi_m^n \end{pmatrix} \equiv 1, \qquad i = \overline{1,n}.$$

Следовательно, существуют C^∞-гладкие функции

$a_{i1}(v^1, \dots, v^n), \dots, a_{im}(v^1, \dots, v^n), A_i^1(v^1, \dots, v^n), \dots, A_i^n(v^1, \dots, v^n), 1 \le i \le n,$

такие, что

$$\frac{\partial}{\partial v^i} \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \dots & \xi_m^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^n & \dots & \xi_m^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} A_i^1 & \dots & a_{im} A_i^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} A_i^n & \dots & a_{im} A_i^n \end{pmatrix}, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{10}$$

Аналогично, условие C_2^* в естественных координатах z_σ^i записывается следующим образом:

$$\operatorname{Rank} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \xi_1^1}{\partial v^i} & \dots & \dfrac{\partial \xi_m^1}{\partial v^i} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \xi_1^n}{\partial v^i} & \dots & \dfrac{\partial \xi_m^n}{\partial v^i} \\ \dfrac{\partial \xi_1^1}{\partial v^j} & \dots & \dfrac{\partial \xi_m^1}{\partial v^j} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \xi_1^n}{\partial v^j} & \dots & \dfrac{\partial \xi_m^n}{\partial v^j} \end{pmatrix} > 1, \qquad 1 \le i \ne j \le n, \tag{11.1}$$

и

$$\operatorname{Rank} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \xi_1^1}{\partial v^i} & \dots & \dfrac{\partial \xi_m^1}{\partial v^i} & \dfrac{\partial \xi_1^1}{\partial v^j} & \dots & \dfrac{\partial \xi_m^1}{\partial v^j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \xi_1^n}{\partial v^i} & \dots & \dfrac{\partial \xi_m^n}{\partial v^i} & \dfrac{\partial \xi_1^n}{\partial v^j} & \dots & \dfrac{\partial \xi_m^n}{\partial v^j} \end{pmatrix} > 1, \qquad 1 \le i \ne j \le n. \tag{11.2}$$

Вследствие (10), условие (11) принимает следующий вид:

$$\operatorname{Rank} \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{im} \\ a_{j1} & \dots & a_{jm} \end{pmatrix} \equiv 2, \qquad 1 \le i \ne j \le n, \tag{12.1}$$

и

$$\mathrm{Rank}\begin{pmatrix} A_i^1 & A_j^1 \\ \vdots & \vdots \\ A_i^n & A_j^n \end{pmatrix} \equiv 2, \qquad 1 \le i \ne j \le n. \tag{12.2}$$

Кроме C_1^* и C_2^*, подмногообразие Γ^n обладает еще тем свойством, что какова бы ни была точка $Q^* \in \Gamma^n$, никакое $\Lambda(m, k+m)$ в $G(m, n+m)$, проходящее через Q^*, не удовлетворяет условию $T_{Q^*}\Gamma^n \subset T_{Q^*}\Lambda(m, k+m)$ при $k < n$. В терминах естественных координат z_σ^i это условие может быть записано как (см. [8])

$$\mathrm{Rank}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \xi_1^1}{\partial v^1} & \dots & \dfrac{\partial \xi_m^1}{\partial v^1} & \dots\dots & \dfrac{\partial \xi_1^1}{\partial v^n} & \dots & \dfrac{\partial \xi_m^1}{\partial v^n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \xi_1^n}{\partial v^1} & \dots & \dfrac{\partial \xi_m^n}{\partial v^1} & \dots\dots & \dfrac{\partial \xi_1^n}{\partial v^n} & \dots & \dfrac{\partial \xi_m^n}{\partial v^n} \end{pmatrix} \equiv n. \tag{13}$$

С учетом (10), равенство (13) принимает следующий вид:

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} A_1^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^n & \dots & A_n^n \end{pmatrix} \ne 0. \tag{14}$$

Ввиду того, что имеет место (14), выполнено также и равенство (12.2).

Таким образом, *производные радиус-вектора $z = \xi(v^1, \dots, v^n)$ $\mathcal{A}^*$-подмногообразия $\Gamma^n \subset G(m, n+m)$ имеют вид (10), где функции A_j^i и $a_{i\sigma}$ удовлетворяют (12.1) и (14).* (Верно и обратное, т.е. *если производные радиус-вектора произвольного n-мерного подмногообразия в $G(m, n+m)$ представляются в форме (10), где A_j^i и $a_{i\sigma}$ удовлетворяют (12.1) и (14), то это подмногообразие является $\mathcal{A}^*$-подмногообразием.*)

Ввиду того, что матричнозначная функция $\xi \in C^\infty(\tilde{V}^n)$, функции $a_{i\sigma}$ и A_j^p имеют некоторые дополнительные свойства. Вследствие (14) производные функций A_j^p могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial A_i^p}{\partial v^j} = \sum_{s=1}^{n} \theta_{ji}^s A_s^p, \qquad 1 \le i, j, p \le n, \tag{15}$$

где θ_{ji}^s — некоторые C^∞-гладкие функции. Дифференцируя (10) и приравнивая соответствующие вторые смешанные производные функций ξ_σ^i, получаем

$$\frac{\partial a_{i\sigma}}{\partial v^j} A_i^p + a_{i\sigma}\frac{\partial A_i^p}{\partial v^j} = \frac{\partial a_{j\sigma}}{\partial v^i} A_j^p + a_{j\sigma}\frac{\partial A_j^p}{\partial v^i}, \quad 1 \le i, j, p \le n, \quad 1 \le \sigma \le m. \tag{16}$$

Подставляя (15) в (16), имеем

$$A_i^p\cdot\left(\frac{\partial a_{i\sigma}}{\partial v^j}+a_{i\sigma}\theta_{ji}^i-a_{j\sigma}\theta_{ij}^i\right)-A_j^p\cdot\left(\frac{\partial a_{j\sigma}}{\partial v^i}+a_{j\sigma}\theta_{ij}^j-a_{i\sigma}\theta_{ji}^j\right)$$

$$+\sum_{s=1,s\neq i,j}^{n}A_s^p\cdot\left(a_{i\sigma}\theta_{ji}^s-a_{j\sigma}\theta_{ij}^s\right)\;=\;0,\quad 1\le i,j,p\le n,\quad 1\le\sigma\le m.\qquad(17)$$

Из (14) следует, что (17) эквивалентно следующему условию:

$$\frac{\partial a_{i\sigma}}{\partial v^j}\;=\;-a_{i\sigma}\theta_{ji}^i+a_{j\sigma}\theta_{ij}^i,\qquad 1\le i\neq j\le n,\quad 1\le\sigma\le m;\qquad(18.1)$$

$$a_{i\sigma}\theta_{ji}^s=a_{j\sigma}\theta_{ij}^s,\qquad 1\le i\neq j\neq s\le n,\quad 1\le\sigma\le m.\qquad(18.2)$$

Легко видеть, что (18.2) вместе с (12.1) приводит к $\theta_{ij}^s=0$, $s\neq i\neq j$. Таким образом,

$$\frac{\partial A_i^p}{\partial v^j}\;=\;\theta_{ji}^jA_j^p+\theta_{ji}^iA_i^p,\quad 1\le i,j,p\le n,\quad i\neq j.\qquad(19)$$

Определим новые функции $B_j^i\in C^\infty(\tilde V^n)$ равенствами

$$B_i^p=(-1)^{p+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix}A_1^1&\dots&A_1^{p-1}&A_1^{p+1}&\dots&A_1^n\\A_{i-1}^1&\dots&A_{i-1}^{p-1}&A_{i-1}^{p+1}&\dots&A_{i-1}^n\\A_{i+1}^1&\dots&A_{i+1}^{p-1}&A_{i+1}^{p+1}&\dots&A_{i+1}^n\\A_n^1&\dots&A_n^{p-1}&A_n^{p+1}&\dots&A_n^n\end{pmatrix},\quad p,i=\overline{1,n}.\qquad(20)$$

Легко проверить, что

$$\sum_p B_i^pA_j^p=0,\quad i\neq j.\qquad(21)$$

Функции B_i^p наследуют свойства функций A_i^p. Во первых, (14) эквивалентно условию

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix}B_1^1&\dots&B_n^1\\\vdots&&\vdots\\B_1^n&\dots&B_n^n\end{pmatrix}\neq 0.\qquad(22)$$

Во вторых, используя (19), можно показать, что имеет место

$$\frac{\partial B_i^p}{\partial v^j}\;=\;\omega_{ji}^jB_j^p+\omega_{ji}^iB_i^p,\quad 1\le i,j,p\le n,\ i\neq j.\qquad(23)$$

Функции B_i^p являются C^∞-гладкими. Дифференцируя (23) и используя (22), получаем, что ω_{ij}^i и ω_{ji}^i удовлетворяют равенствам

$$\frac{\partial\omega_{ij}^j}{\partial v^k}-\frac{\partial\omega_{kj}^j}{\partial v^i}=0,\qquad i\neq j\neq k;\qquad(24.1)$$

$$\frac{\partial \omega_{ij}^i}{\partial v^k} = -\omega_{ij}^i\omega_{ki}^i + \omega_{ik}^i\omega_{kj}^k + \omega_{ij}^i\omega_{kj}^j, \qquad i \neq j \neq k. \tag{24.2}$$

Теперь попытаемся найти регулярное C^∞-гладкое подмногообразие в E^{n+m}, чей грассманов образ совпадал бы с V^n. Для этого воспользуемся методом Ю.А. Аминова [2, 4] и рассмотрим следующую систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial v^i}(\rho^{n+1},\dots,\rho^{n+m}) \;=\; -\frac{\partial}{\partial v^i}(\rho^1,\dots,\rho^n)\;\cdot\;\begin{pmatrix}\xi_1^1 & \dots & \xi_m^1\\ \vdots & & \vdots\\ \xi_1^n & \dots & \xi_m^n\end{pmatrix}, \quad i=\overline{1,n}, \tag{25}$$

для неизвестных функций $\rho^1(v^1,\dots,v^n),\dots,\rho^{n+m}(v^1,\dots,v^n)$. Учитывая (1), легко видеть, что грассманов образ подмногообразия $F^n\subset E^{n+m}$ с радиус-вектором

$$\vec{x} = \vec{\rho}(v^1,\dots,v^n) = (\rho^1,\dots,\rho^{n+m})$$

совпадает с V^n тогда и только тогда, когда набор функций ρ^1, …, ρ^{n+m} является решением системы (25). При этом F^n будет C^∞-гладким и регулярным тогда и только тогда, когда функции ρ^1, …, ρ^{n+m} C^∞-гладки и удовлетворяют условию

$$\operatorname{Rank}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\rho^1}{\partial v^1} & \dots & \dfrac{\partial\rho^{n+m}}{\partial v^1}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial\rho^1}{\partial v^n} & \dots & \dfrac{\partial\rho^{n+m}}{\partial v^n}\end{pmatrix} \equiv n. \tag{26}$$

Вследствие (25) выполнение равенства (26) эквивалентно тому, что

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\rho^1}{\partial v^1} & \dots & \dfrac{\partial\rho^{n}}{\partial v^1}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial\rho^1}{\partial v^n} & \dots & \dfrac{\partial\rho^{n}}{\partial v^n}\end{pmatrix} \neq 0. \tag{27}$$

Условием совместности системы (25) является система уравнений

$$\frac{\partial}{\partial v^i}(\rho^1,\dots,\rho^n)\;\cdot\;\frac{\partial}{\partial v^j}\begin{pmatrix}\xi_1^1 & \dots & \xi_m^1\\ \vdots & & \vdots\\ \xi_1^n & \dots & \xi_m^n\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial}{\partial v^j}(\rho^1,\dots,\rho^n)\;\cdot\;\frac{\partial}{\partial v^i}\begin{pmatrix}\xi_1^1 & \dots & \xi_m^1\\ \vdots & & \vdots\\ \xi_1^n & \dots & \xi_m^n\end{pmatrix}, \quad i\neq j=\overline{1,n}. \tag{28}$$

Более точно, если существует C^∞-гладкое решение $\rho^1,\dots,\rho^{n+m}$ системы (25), то набор функций $\rho^1,\dots,\rho^n$ является C^∞-гладким решением системы (28). Обратно, если существует C^∞-гладкое решение $\rho^1,\dots,\rho^n$ системы (28), то подставив его в (25), получим совместную систему дифференциальных уравнений относительно $\rho^{n+1},\dots,\rho^{n+m}$, для построения C^∞-гладкого решения которой достаточно задать начальные значения искомых функций. Таким образом, задача нахождения C^∞-гладкого регулярного подмногообразия $F^n\subset E^{n+m}$, для которого $V^n\subset G(m,n+m)$ было бы грассмановым образом, сводится к отысканию C^∞-гладкого решения $\rho^1,\dots,\rho^n$ системы (28), удовлетворяющего условию регулярности (27) всюду в $\tilde V^n$.

Учитывая вид (10) касательных векторов $\partial_{v^i}\xi$ подмногообразия Γ^n, систему (28) можно переписать следующим образом:

$$a_{i\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial v^j}\,(\,\rho^1,\quad\dots\quad\rho^n\,)\begin{pmatrix}A_i^1\\ \vdots\\ A_i^n\end{pmatrix}=a_{j\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial v^i}\,(\,\rho^1,\quad\dots\quad\rho^n\,)\begin{pmatrix}A_j^1\\ \vdots\\ A_j^n\end{pmatrix},\qquad(29)$$
$$1\le i\ne j\le n,\quad 1\le\sigma\le m.$$

Принимая во внимание (12.1), получаем, что, в свою очередь, (29) эквивалентно системе

$$\frac{\partial}{\partial v^i}\,(\,\rho^1,\quad\dots\quad\rho^n\,)\begin{pmatrix}A_j^1\\ \vdots\\ A_j^n\end{pmatrix}\;=\;0,\quad 1\le i\ne j\le n.\qquad(30)$$

Вследствие (21) система (30) как система алгебраических уравнений относительно производных $\dfrac{\partial\rho^p}{\partial v^i}$ может быть разрешена в виде

$$\frac{\partial}{\partial v^i}\,(\,\rho^1,\quad\dots\quad\rho^n\,)\;=\;\lambda_i\cdot(\,B_i^1,\quad\dots\quad B_i^n\,),\quad i=\overline{1,n}.\qquad(31)$$

Точнее, если существует C^∞-гладкое решение $\rho^1,\dots,\rho^n$ системы (30), то существуют C^∞-гладкие функции $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ такие, что имеет место (31).

Дифференцируя (31), приравнивая вторые смешанные производные функций ρ^p и учитывая (22) и (23), получаем, что функции $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ должны удовлетворять условию

$$\frac{\partial\lambda^i}{\partial v^j}\;=\;-\omega_{ji}^i\lambda^i+\omega_{ij}^i\lambda^j,\quad 1\le i\ne j\le n.\qquad(32)$$

Обратно, если найдем решение $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ системы дифференциальных уравнений (32), то, подставив его в (31), получим совместную систему дифференциальных уравнений относительно $\rho^1,\dots,\rho^m$, для построения C^∞-гладкого решения которой достаточно задать начальные значения искомых функций. Отметим, что вследствие (22) условие (27) эквивалентно тому, что ни одна из функций $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ не обращается в нуль.

Таким образом, задача свелась к нахождению не обращающегося в нуль C^∞-гладкого решения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ системы (32).

Система (32) является системой Дарбу (см. в [10] о методах решения таких систем). Оказывается, что она является совместной благодаря выполнению условий (24.1)–(24.2). Если задать

$$\lambda^1(v^1, v_0^2 \dots, v_0^n) = \lambda_0^1(v^1) \ , \ \dots \ , \ \lambda^n(v_0^1, \dots, v_0^{n-1}, v^n) = \lambda_0^n(v^n)$$

(функции $\lambda_0^1(v^1), \dots, \lambda_0^n(v^n)$ C^∞-гладки), то тогда существует единственное C^∞-гладкое решение $\lambda^1(v^1, \dots, v^n)$, …, $\lambda^n(v^1, \dots, v^n)$ системы (32). Подставим найденные $\lambda^1, \dots, \lambda^n$ в (31), зададим начальные значения

$$\rho^1(v_0) = \rho_0^1, \quad \dots \quad , \rho^n(v_0) = \rho_0^n$$

и определим $\rho^1, \dots, \rho^n$. Так построенный набор функций $\rho^1(v^1, \dots, v^n)$, …, $\rho^n(v^1, \dots, v^n)$ будет C^∞-гладким решением системы (30), а значит, и системы (29), и, в конце концов, системы (28).

Отметим, что если начальные значения $\lambda_0^i(v^i)$ не обращаются в нуль в точке v_0, то найденные функции $\rho^1(v^1, \dots, v^n)$, …, $\rho^n(v^1, \dots, v^n)$ удовлетворяют (27) в точке v_0, а следовательно, и в некоторой достаточно малой окрестности $\tilde{V}^n$ точки v_0.

Подставим $\rho^1(v^1, \dots, v^n), \dots, \rho^n(v^1, \dots, v^n)$ в (25) и зададим начальные значения

$$\rho^{n+1}(v_0) = \rho_0^1 \ , \ \dots \ , \rho^{n+m}(v_0) = \rho_0^{n+m}.$$

Тогда существует единственное C^∞-гладкое решение $\rho^{n+1}(v^1, \dots, v^n)$, …, $\rho^{n+m}(v^1, \dots, v^n)$ системы (25). Так построенные функции ρ^1, …, ρ^{n+m} удовлетворяют (25)–(26), а значит, радиус-вектор $\vec{x} = \vec{\rho}(v^1, \dots, v^n)$ задает C^∞-гладкое регулярное подмногообразие $F^n \subset E^{n+m}$, чей грассманов образ совпадает с $V^n \subset G(m, n+m)$. По теореме 2 F является $\mathcal{A}$-подмногообразием. Теорема 3 доказана.

Утверждения, аналогичные теоремам 2 и 3, могут быть доказаны и в случае тангенциально-вырожденных $\mathcal{A}$-подмногообразий $F^n \subset E^{n+m}$ с вырожденными грассмановыми образами.

§ 4

Как отмечалось выше, частным случаем $\mathcal{A}$-подмногообразий в E^{n+m} являются подмногообразия, на которых можно локально ввести ортогональные координаты кривизны. Напомним, что ненулевой вектор Y в $T_P F^n$ называется *главным направлением* подмногообразия $F^n \subset E^{n+m}$, если для любого нормального поля $\aleph$ на F^n имеет место

$$\nabla_X \aleph = \lambda X + \tilde{\aleph},$$

где $\lambda : NF^n \to I\!R$ — некоторая функция, вектор $\tilde{\aleph}$ лежит в нормальном пространстве N_PF^n, ∇_X — производная в E^{n+m} в направлении X. Кривая $\gamma \subset F^n$ называется *линией кривизны*, если в каждой своей точке она касается главного направления подмногообразия f; соответственно, локальные координаты $v^1, \dots, v^n$ на F^n называются *координатами кривизны*, если координатные линии v^i являются линиями кривизны.

Заметим, что существование локальных координат кривизны на подмногообразии F^n (достаточное, но вообще говоря не необходимое условие для существования в каждой точке $P \in F^n$ n линейно независимых главных направлений в T_PF^n) представляет собой достаточно сильное требование. Например, F^n должно иметь плоскую нормальную связность.

Хорошо известно, что линейно независимые ортогональные векторы $X_1, \dots, X_n$ в T_PF^n являются главными направлениями тогда и только тогда, когда они взаимно сопряжены. В частности, если линейно независимые взаимно сопряженные векторы $X_1, \dots, X_n \in T_PF^n$ ортогональны друг другу, то тогда они являются главными направлениями.

Может ли то свойство, что подмногообразия $F^n \subset E^{n+m}$ имеют в некоторой своей точке P n линейно независимых главных направлений, быть выражено в терминах отображения Грассмана $\mathcal{G} : F^n \to G(m, n+m)$ (как это было сделано для взаимно сопряженных направлений в леммах 1 и 2)?

Лемма 3. *Пусть $X_1, \dots, X_n \in T_PF^n$ — линейно независимые ортогональные главные направления. Тогда их образы $X_1^*, \dots, X_n^* \in T_{P^*}G(m, n+m)$ при отображении $d_{\mathcal{G}}$ являются ортогональными асимптотическими векторами подмногообразия $G(m, n+m) \subset I\!RP^{\mathcal{M}}$. При этом:*

1) вектор $X_i^* = 0$ тогда и только тогда, когда X_i является асимптотическим вектором подмногообразия $F^n \subset E^{n+m}$;

2) подпространство в $T_{P^*}G(m, n+m)$, натянутое на X_i^* и X_j^*, является асимптотическим для подмногообразия $G(m, n+m) \subset I\!RP^{\mathcal{M}}$ тогда и только тогда, когда векторы нормальной кривизны $k_{norm}(X_i)$ и $k_{norm}(X_j)$ подмногообразия $F^n \subset E^{n+m}$ в точке P в направлении X_i и X_j коллинеарны.

Доказательство. Принимая во внимание лемму 1, необходимо только доказать, что из ортогональности векторов $X_1, \dots, X_n \in T_PF^n$ следует ортогональность векторов $X_1^*, \dots, X_n^* \in T_{P^*}G(m, n+m)$. Не уменьшая общности будем считать, что на F^n, E^{n+m} и $G(m, n+m)$ введены те же координаты v^i, x^I и z_σ^i соответственно, что и при доказательстве леммы 1. Тогда $F^n \subset E^{n+m}$ задается локально радиус-вектором $\vec{x} = \vec{\rho}(v^1, \dots, v^n)$, его грассманов образ $\Gamma^n \subset G(m, n+m)$ – радиус-вектором $z = \xi(v^1, \dots, v^n)$, причем $X_i = \dfrac{\partial \vec{\rho}}{\partial v^i}(P)$. Так как $X_1, \dots, X_n \in T_PF^n$ взаимно сопряжены, то имеет место формула (6), которой мы и воспользуемся.

Координаты z^i_σ точки $\mathcal{G}(P) = P^*$ в $G(m, n{+}m)$ равны нулю. В этом случае скалярное произведение $\langle A, B\rangle_G$ касательных векторов $A, B \in T_{P^*}G(m, n{+}m)$ может быть вычислено по формуле

$$\langle A, B\rangle_G = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_m \\ \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & \dots & A^n_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B^1_1 & \dots & B^1_m \\ \vdots & & \vdots \\ B^n_1 & \dots & B^n_m \end{pmatrix}^t \right),$$

где Tr обозначает след матрицы, t — транспонирование. Тогда, применяя (6), получаем

$$\langle X^*_i, X^*_j\rangle_G \;=\; g^{ip}\,(\sum_s c^s_p c^s_q)\, g^{qj}\,(\sum_\sigma L^\sigma_{ii} L^\sigma_{jj}). \tag{33}$$

С другой стороны, вычисляя скалярное произведение $g_{ij} = \langle X_i, X_j\rangle_F$ векторов X_i и X_j в $T_P F^n$, получаем

$$g_{ij} = \sum_k c^k_i c^k_j. \tag{34}$$

Вследствие (34), (33) принимает вид

$$\langle X^*_i, X^*_j\rangle_G \;=\; g^{ij} \sum_\sigma L^\sigma_{ii} L^\sigma_{jj}. \tag{35}$$

Так как $X_1, \dots, X_n \in T_P F^n$ взаимно ортогональны, все g_{ij} равны нулю при $i \neq j$. Тогда все g^{ij}, $i \neq j$, также равны нулю, ввиду чего из (35) следует

$$\langle X^*_i, X^*_j\rangle_G \;=\; 0, \quad 1 \le i \neq j \le n,$$

т.е. $X^*_1, \dots, X^*_n \in T_{P^*}G(m, n+m)$ взаимно ортогональны, что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Пусть $X_1, \dots, X_n \in T_P F^n$ — линейно независимые векторы. Предположим, что их образы $X^*_1, \dots, X^*_n \in T_{P^*}G(m, n+m)$ при отображении $d_{\mathcal{G}}$ являются ортогональными асимптотическими векторами подмногообразия $G(m, n+m) \subset \mathbb{R}P^{\mathcal{M}}$. Дополнительно предположим, что для любой пары ненулевых асимптотических векторов X^*_i и X^*_j, $i \neq j$, подпространство в $T_{P^*}G(m, n{+}m)$, натянутое на X^*_i и X^*_j, не является асимптотическим для $G(m, n+m) \subset \mathbb{R}P^{\mathcal{M}}$. Если секционная кривизна F^n в точке P не обращается в нуль ни для какой двумерной площадки из $T_P F^n$, то тогда $X_1, \dots, X_n \in T_P F^n$ — ортогональные главные направления.*

Доказательство. По доказанному в лемме 2, векторы $X_1, \dots, X_n$ в $T_P F^n$ взаимно сопряжены. Докажем, что они ортогональны друг другу. Не уменьшая общности будем считать, что на F^n, E^{n+m} и $G(m, n+m)$ введены те же координаты v^i, x^I и z^i_σ, что и при доказательстве леммы 1. Тогда

$F^n \subset E^{n+m}$ задается локально радиус-вектором $\vec{x} = \vec{\rho}(v^1, \dots, v^n)$, его грассманов образ $\Gamma \subset G(m, n+m)$ — радиус-вектором $z = \xi(v^1, \dots, v^n)$, причем $X_i = \dfrac{\partial\vec{\rho}}{\partial v^i}(P)$. При доказательстве леммы 3 было показано, что для скалярного произведения $\langle X_i^*, X_j^* \rangle$ векторов X_i^* и X_j^* в $T_{P^*}G(m, n+m)$ имеет место формула (35). Так как $X_1^*, \dots, X_n^*$ ортогональны друг другу, из (35) получаем

$$g^{ij} \sum_{\sigma} L^{\sigma}_{ii} L^{\sigma}_{jj} \,=\, 0, \quad 1 \le i \ne j \le n. \tag{36}$$

В то же время, вычисляя с помощью формулы Гаусса секционную кривизну F^n вдоль двумерных координатных площадок в точке P, имеем

$$K(X_i, X_j) = K(\frac{\partial\vec{\rho}}{\partial v^i}, \frac{\partial\vec{\rho}}{\partial v^i}) = \frac{\sum_\sigma L^{\sigma}_{ii} L^{\sigma}_{jj} - (L^{\sigma}_{ij})^2}{g_{ii}g_{jj} - (g_{ij})^2} = \frac{\sum_\sigma L^{\sigma}_{ii} L^{\sigma}_{jj}}{g_{ii}g_{jj} - (g_{ij})^2}\,,$$

где последне равенство выполнено вследствие сопряженности векторов X_i и X_j $(L^{\sigma}_{ij} = 0)$. Так как секционная кривизна F^n в точке P не обращается в нуль, то

$$\sum_{\sigma} L^{\sigma}_{ii} L^{\sigma}_{jj} \,\ne\, 0, \tag{37}$$

каковы бы ни были $1 \le i \ne j \le n$. Но тогда из (36) следует, что все $g_{ij} = 0$ при $i \ne j$, а значит, $X_1, \dots, X_n \in T_P F^n$ ортогональны друг другу, что и требовалось доказать.

Отметим, что лемма 4 дает достаточное условие для существования n линейно независимых главных направлений F^n при дополнительном предположении о знакопостоянстве секционной кривизны F^n. Достаточное условие в терминах только лишь грассманова отображения (аналогичное лемме 2 для сопряженных направлений) также существует, однако оно здесь не приводится ввиду слишком обьемной формулировки.

Список литературы

[1] *Ю.А. Аминов*, О грассмановом образе двумерной поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве. — Укр. геом. сб. (1980), вып. 23, с. 3–16.

[2] *Ю.А. Аминов*, Определение поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве по ее грассманову образу. — Мат. сб. (1982), т. 117, № 2, с. 147–160.

[3] *Ю.А. Аминов, Т.С.Тарасова*, Определение поверхности в E^4 по заданному вырожденному грассманову образу. — Укр. геом. сб. (1983), т. 26, с. 6–13.

[4] *Ю.А. Аминов*, Восстановление двумерной поверхности в n-мерном евклидовом пространстве по ее грассманову образу. — Мат. заметки (1984), т. 36, №. 2, с. 223–228.

[5] *А.А. Борисенко, Ю.А. Николаевский*, Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий. — Успехи мат. наук (1991), т. 46, №. 2, с. 41–83.

[6] *В.А. Горькавый*, Восстановление подмногообразия евклидова пространства по вырожденному в линию грассманову образу. — Мат. заметки (1996), т. 59, №. 5, с. 681–691.

[7] *В.А. Горькавый*, Восстановление трехмерного подмногообразия пятимерного евклидова пространства по вырожденному двумерному грассманову образу. — Мат. физ., анализ, геом. (1995), т. 2, №. 1, с. 25–41.

[8] *В.А. Горькавый*, Теоремы редукции в задаче восстановления подмногообразий евклидова пространства по заданному грассманову образу. — Мат. физ., анализ, геом. (1997), т. 4, №. 3, с. 309–333.

[9] *В.А. Горькавый*, Восстановление трехмерных подмногообразий евклидова пространства с большой коразмерностью по грассманову образу. — Мат. заметки (1997), т. 62, №. 5, с. 694–699.

[10] *G.Darboux*, Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes. Gaulthier–Villars, Paris (1898).

[11] *В.Т. Лисица*, Грассманов образ поверхностей F^l в E^{l+p} с плоской нормальной связностью. — Тез. докл. Междунар. конф. по геометрии "в целом". Черкассы (1995), с. 47–48.

[12] *В.В. Рыжков*, Сопряженные системы на многомерных поверхностях. — Тр. Моск. мат. о-ва (1958), т. 7, с. 179–227.

Reconstruction of particular submanifolds of Euclidean space from a given Grassmann image

V.O. Gorkavyy

Necessary and sufficient conditions are proved for a given submanifold of Grassmannian to be the Grassmann image of a submanifold in Euclidean space carrying a congugate coordinates net.

Відновлення спеціальних підмноговидів евклідового простору за заданим грасмановим образом

В.О. Горькавий

Доведено необхідні та достатні умови для того, щоб заданий підмноговид грасманового многовиду був грасмановим образом деякого підмноговиду евклідового простору, що несе сітку спряжених координат.