Математическая физика, анализ, геометрия
2000, т. 7, № 2, с. 209–218

Структура коциклов групп псевдогомеоморфизмов

В. Кулагин

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
Пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61164, Украина

Статья поступила в редакцию 25 мая 1999 года
Представлена В.Я. Голодцом

Пусть счетная группа Γ эргодически действует псевдогомеоморфизмами на польском совершенном пространстве X. Доказано, что с точностью до множеств первой категории, любые два эргодических коцикла α и β этого действия со значениями в счетной группе G слабо эквивалентны. Этот результат далее использован для доказательства внешней сопряженности счетных групп псевдогомеоморфизмов из нормализатора $N[\Gamma]$ полной группы $[\Gamma]$.

1. Введение

Вопросы изучения коциклов групп автоморфизмов пространства с мерой на протяжении длительного времени привлекали внимание специалистов. Одной из причин является то обстоятельство, что широкий класс групповых действий, в том числе и для групп достаточно сложной структуры, допускает представление в виде образа (в другой терминологии действия Макки) коцикла действия группы $\mathbb{Z}$ степенями одного автоморфизма (см. [4]). Кроме того, в работах [5, 6] получены специальные теоремы единственности для коциклов, которые сводят изоморфизм их действий Макки к так называемому соотношению слабой эивалентности коциклов, что очень важно с точки зрения проблемы классификации (групп) автоморфизмов. Аналогичным образом к вопросу о единственности коциклов сводится и задача о внешней сопряженности групповых действий [3].

В настоящей статье такие объекты, как коциклы, полная группа и ее нормализатор, ставшие уже классическими в измеримой эргодической теории, рассматриваются в рамках так называемой обобщенной топологической динамики. Поводом к изучению этих объектов послужила замечательная работа Д. Сулливана, Б. Вейсса и Дж. Райта [1], где были исследованы счетные группы псевдогомеоморфизмов польского пространства, а также отношения эквивалентностей, ими порождаемые. Авторами было показано, что существует всего один класс траекторной эквивалентности для эргодических действий таких групп, который описывается каноническим действием группы $\mathbb{Z}$. Отметим некоторые особенности обобщенной динамики: роль "множеств меры нуль" здесь играют множества первой категории, а утверждение считается справедливым, если оно выполнено на дополнении к множеству первой категории.

Следующим вопросом, естественно возникающим при изучении топологических динамических систем, является вопрос об устройстве коциклов групп псевдогомеоморфизмов. Особый интерес представляет задача классификации коциклов с точностью до слабой эквивалентности; и в то время как в измеримой эргодической теории аналогичная задача достаточно сложна технически и ее решение потребовало длительных значительных усилий многих авторов (Р. Зиммер, В. Голодец, С. Безуглый, С. Синельщиков), оказывается, что в нашем случае можно получить более простое и ясное описание. В теореме 4.1 доказано, что любые два эргодических коцикла α и β со значениями в произвольной счетной группе G слабо эквивалентны. Этот результат далее использован для доказательства внешней сопряженности счетных подгрупп нормализатора полной группы (см. теорема 5.3). Мы также устанавливаем существование эргодического коцикла α со значениями в произвольной заданной счетной группе G (теорема 3.9). В разделе 2 даны предварительные сведения и результаты.

2. Предварительные сведения

Пусть X — польское совершенное пространство, т.е. полное сепарабельное метрическое пространство без изолированных точек. Далее всюду будем рассматривать только такие пространства. Заметим, что G_δ-подмножество польского пространства также является польским пространством. Говорят, что Θ — псевдогомеоморфизм пространства X, если Θ — борелевская биекция X на X, и $\Theta[A]$ — множество первой категории тогда и только тогда, когда A — множество первой категории.

Пусть R — отношение эквивалентности на X. Для R будем использовать понятие счетного обобщенного отношения эквивалентности, данное в [1]. Если Γ — счетная группа псевдогомеоморфизмов пространства X, то можно рассмотреть отношение эквивалентности R на X, ею порожденное: $R = \{(x, \gamma x) : x \in X, \gamma \in \Gamma\}$. Несложно видеть, что R в этом случае будет счетным обобщенным отношением эквивалентности. Как показано в [1], пренебрегая множествами первой категории, можно свести изучение счетных обобщенных отношений эквивалентностей к изучению счетных групп гомеоморфизмов польского пространства. Поэтому в большинстве случаев будем работать именно с этими обьектами.

Пусть Γ — счетная группа, действующая гомеоморфизмами на пространстве X. Будем называть действие Γ эргодическим, если существует точка $x \in X$, такая что ее орбита Γx плотна в X. Это определение равносильно тому, что любое Γ-инвариантное борелевское множество в X является либо множеством первой категории, либо дополнением к множеству первой категории. Еще несколько эквивалентных определений даны в [1].

Предложение 2.1. *Пусть A_n $(n \in \mathbb{N})$ — счетное семейство борелевских подмножеств пространства X, тогда существует плотное G_δ-множество $Y \subset X$, такое что $A_n|_Y$ открыто в Y для любого $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Множество A_n — борелевское и, следовательно, обладает свойством Бэра, поэтому (см. [2]) $A_n = (G_n \backslash P_n) \cup R_n$, где G_n — открытое множество, а P_n, R_n — множества первой категории. Положим

$$P = (P_1 \cup R_1) \cup (P_2 \cup R_2) \cup \dots$$

и пусть $\widetilde{Y} = X \backslash P$, тогда $A_n \cap \widetilde{Y} = G_n \cap \widetilde{Y}$ для любого n. $\widetilde{Y}$ также обладает свойством Бэра, тогда $\widetilde{Y} = Y \cup S$, где S — множество первой категории, Y — G_δ-множество в X (см.[2]). Очевидно, что Y плотно в X и $A_n|_Y$ открыто в Y для всех n. ■

Из предложения 2.1 видно, что с точностью до множеств первой категории можно считать пространство X вполне несвязным.

3. Коциклы

Пусть Γ — счетная группа, действующая гомеоморфизмами на пространстве X.

Определение 3.1. *Будем говорить, что псевдогомеоморфизм h пространства X принадлежит полной группе $[\Gamma]$, если существуют последовательность открыто-замкнутых, попарно непересекающихся подмножеств K_j $(j = 1, 2, \dots)$ в X и последовательность γ_j $(j = 1, 2, \dots)$ элементов Γ, такие что $\bigcup K_j$ плотно в X, и $hx = \gamma_j x$, для всех $x \in K_j$. Если при этом $\bigcup K_j = X$, то будем называть h сильно-Γ-разложимым над X.*

Используя предложение 2.1 и свойства псевдогомеоморфизмов, несложно доказать следующее

Предложение 3.2.

i) $h \in [\Gamma]$ тогда и только тогда, когда существует плотное Γ-инвариантное G_δ-множество $Y \subset X$, такое что $h|_Y$ — гомеоморфизм Y на Y, и $h|_Y$ сильно-Γ-разложим над Y.

ii) Множество $[\Gamma]$ *является группой псевдогомеоморфизмов.*

Определение 3.3. *Множество* $N[\Gamma] = \{\Theta : \Theta -$ псевдогомеоморфизм X *и* $\Theta[\Gamma]\Theta^{-1} = [\Gamma]\}$ *будем называть нормализатором полной группы* $[\Gamma]$.

Следует отметить, что понятия, введенные в определениях 3.1 и 3.3, являются аналогами уже существующих в метрической теории понятий полной группы и нормализатора полной группы. Следующим шагом является определение коцикла, также хорошо известного объекта в классической динамике. В данном контексте будем рассматривать только орбитальные коциклы, т.е. коциклы, определенные на отношениях эквивалентности.

Пусть R — отношение эквивалентности, порожденное действием группы Γ, т.е. множество $R = \{(x, \gamma x) : x \in X, \gamma \in \Gamma\} \subset X \times X$.

Определение 3.4. *Коциклом для действия* Γ *со значениями в счетной группе* G *называется борелевское отображение* $\phi : R \to G$*, удовлетворяющее условию* $\phi(x,y)\phi(y,z) = \phi(x,z)$ *для всех* $(x,y),(y,z) \in R|_{Y\times Y}$*, где* Y *— некоторое плотное* Γ*-инвариантное* G_δ*-подмножество в* X.

Множество всех коциклов будем обозначать $Z^1(R, G)$.

В качестве простого примера приведем такой: $\phi(x,y) = \sigma(x)\sigma(y)^{-1}$, где $\sigma : X \to G$ — произвольное борелевское отображение.

З а м е ч а н и е 3.5. Если $\phi \in Z^1(R, G)$, то существует Y — плотное Γ-инвариантное G_δ-множество в X, такое что для всех $\gamma \in \Gamma$ и всех $g \in G$ множество $\{y \in Y : \phi(y, \gamma y) = g\}$ открыто-замкнуто в Y.

Пусть $\alpha \in Z^1(R, G)$. Рассмотрим отображение $\gamma : X \times G \to X \times G$, определенное следующим образом: $\gamma(x, g) = (\gamma x, \alpha(\gamma x, x)g)$. Нетрудно проверить, что это отображение является псевдогомеоморфизмом пространства $X \times G$. Также очевидно, что таким образом получаем действие группы Γ на пространстве $X \times G$ псевдогомеоморфизмами. Это действие будем называть косым произведением и обозначать $\Gamma(\alpha)$. Учитывая замечание 3.5, можно считать, что косое произведение есть действие гомеоморфизмами на $X \times G$.

Определение 3.6. *Коцикл* $\alpha \in Z^1(R, G)$ *называется эргодическим, если действие* $\Gamma(\alpha)$ *на* $X \times G$ *эргодично.*

З а м е ч а н и е 3.7. Очевидно, если коцикл α эргодичен, то действие Γ на X должно быть эргодическим.

Лемма 3.8. *Пусть $\alpha \in Z^1(R, G)$ — эргодический коцикл, тогда существует плотное Γ-инвариантное G_δ-множество $Y \subset X$, такое что для всех $g \in G$ и всех $y \in Y$ орбита точки (y, g) действия $\Gamma(\alpha)$ плотна в $X \times G$.*

Доказательство. Так как $\Gamma(\alpha)$ действует эргодично на $X \times G$, то существует плотное Γ-инвариантное G_δ-множество $A \subset X \times G$, такое что орбита любой точки, принадлежащей A, плотна в $X \times G$. Пусть $G = \{g_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $A_k = \{x \in X : (x, g_k) \in A\}$, $B_k = X \setminus A_k$. Тогда A_k — плотное G_δ-множество в X, $R[B_k] = \bigcup \gamma B_k$ — Γ-инвариантное F_σ-множество первой категории, таким же является и множество $B = \bigcup R[B_k]$. Тогда $Y = X \setminus B$ — искомое плотное Γ-инвариантное G_δ-множество. ∎

Следующая теорема решает вопрос о существовании эргодических коциклов со значениями в данной счетной группе G. Поскольку известно, что все эргодические действия счетных групп траекторно эквивалентны [1], то достаточно провести построение коцикла для какого-нибудь одного действия счетной группы.

Теорема 3.9. *Пусть G — произвольная счетная группа, тогда существует эргодический коцикл действия счетной группы Γ на пространстве X со значениями в группе G.*

Доказательство. На пространстве $Y = \{0, 1\}^G$ группа G естественно действует сдвигами. Пусть $X = Y^{\mathbb{Z}}$. Тогда на X можем рассмотреть два действия:

1) Действие $\mathbb{Z}$ степенями гомеоморфизма $T : (Tx)_i = x_{i+1}$; это действие эргодично.

2) Действие $G : (gx)_i = gx_i$.

Очевидно, эти действия коммутируют. Пусть Γ — группа гомеоморфизмов пространства X, порожденная действиями G и $\mathbb{Z}$ на X. Определим коцикл ϕ для действия Γ следующим образом:

$$\phi(gT^n x, x) = g, \qquad x \in X,\ g \in G.$$

Несложно проверить, что коцикл ϕ действительно является эргодическим. ∎

4. Слабая эквивалентность коциклов

Теорема 4.1. *Пусть Γ — счетная группа, действующая гомеоморфизмами на пространстве X, ϕ и ψ — эргодические коциклы для действия Γ со значениями в счетной группе G. Тогда ϕ и ψ слабо эквивалентны, т.е. существуют $\Theta \in N[\Gamma]$ и плотное Γ-инвариантное G_δ-множество $Y \subset X$, такие что $\Theta|_Y$ — гомеоморфизм Y на Y, и*

$$\phi(y, \gamma y) = \psi(\Theta y, \Theta\gamma y) \qquad \text{для всех } y \in Y \text{ и всех } \gamma \in \Gamma.$$

Можно сразу считать, что для всех $x \in X$ и всех $g \in G$ каждая из орбит $\Gamma(\phi)(x,g)$ и $\Gamma(\psi)(x,g)$ плотна в $X \times G$ и для всех $\gamma \in \Gamma$ множество $\{x \in X : \gamma x = x\}$ открыто-замкнуто в X ([1]). Пусть $\Delta = \{t_0, t_1, \ldots\}$ и $\widetilde{\Delta} = \{\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1, \ldots\}$ — плотные орбиты действия группы Γ на X.

Лемма 4.2. *В условиях теоремы 4.1 для любого открытого множества $A \subset X$ и любого $g \in G$ существует точка $t_k \in \Delta$, такая что $t_k \in A$ и $\phi(t_0, t_k) = g$.*

Доказательство. Орбита точки (t_0, e) плотна в $X \times G$, следовательно, существует такая $\gamma_k \in \Gamma$: $(\gamma_k t_0, \phi(t_0, \gamma_k t_0)) \in A \times g$, т.е. $\gamma_k t_0 \in A$ и $\phi(t_0, \gamma_k t_0) = g$. ■

В следующей лемме мы используем технику, развитую в [1] для построения действия группы $\bigoplus \mathbb{Z}_2$, которая порождает то же отношение эквивалентности, что и действие группы Γ.

Введем обозначение: $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n$.

Лемма 4.3. *Пусть выполнены условия теоремы 4.1, и пусть $\{S_n\}$ и $\{\widetilde{S}_n\}$ — убывающие последовательности открыто-замкнутых окрестностей точек t_0 и $\widetilde{t}_0$, соответственно, такие что $t_n \notin S_n$ и $\widetilde{t}_n \notin \widetilde{S}_n$, $S_n \subset B(t_0, 1/n)$, $\widetilde{S}_n \subset B(\widetilde{t}_0, 1/n)$, где $B(x,r)$ обозначает шар радиуса r с центром в точке x.*

Тогда следующие утверждения выполнены одновременно:

(1) Существуют две убывающие последовательности Γ-инвариантных G_δ-множеств $\{T_n\}$ и $\{\widetilde{T}_n\}$, такие что $\Delta \subset T_n$, $\widetilde{\Delta} \subset \widetilde{T}_n$ для всех n.

(2) Существуют последовательности $\{h_n\}$, $\{\widetilde{h}_n\}$, где каждый h_n, $\widetilde{h}_n$ — гомеоморфизмы соответственно T_n на T_n, $\widetilde{T}_n$ на $\widetilde{T}_n$; $h_n = h_n^{-1}$, $\widetilde{h}_n = \widetilde{h}_n^{-1}$; для $1 \le k \le n$ элементы каждого из семейств $\{h_k|_{T_n}\}$ и $\{\widetilde{h}_k|_{\widetilde{T}_n}\}$ взаимно коммутируют; каждый h_n, $\widetilde{h}_n$ — сильно-Γ-разложим над T_n и над $\widetilde{T}_n$, соответственно.

(3) Для каждого n существуют два семейства $\{K^n(\underline{\alpha})\}$ и $\{\widetilde{K}^n(\underline{\alpha})\}$, $\underline{\alpha} \in \{0,1\}^n$, каждое из которых состоит из попарно непересекающихся открыто-замкнутых множеств, причем объединение множеств из каждого семейства есть T_n и $\widetilde{T}_n$, соответственно.

(4) $K^n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cap T_{n+1} = K^{n+1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0) \cap K^{n+1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 1)$,
$\widetilde{K}^n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cap \widetilde{T}_{n+1} = \widetilde{K}^{n+1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0) \cap \widetilde{K}^{n+1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 1)$.

(5) $K^n(\underline{0}) \subset S_n \cap T_n$, $t_0 \in K^n(\underline{0})$ для всех n,
$\widetilde{K}^n(\underline{0}) \subset \widetilde{S}_n \cap \widetilde{T}_n$, $\widetilde{t}_0 \in \widetilde{K}^n(\underline{0})$ для всех n.

(6) Для $\underline{\alpha} \in \{0,1\}^n$ гомеоморфизмы $h_1{}^{\alpha_1} h_2{}^{\alpha_2} \ldots h_n{}^{\alpha_n}$, $\widetilde{h}_1^{\alpha_1} \widetilde{h}_2^{\alpha_2} \ldots \widetilde{h}_n^{\alpha_n}$, действуя на T_n и $\widetilde{T}_n$, соответственно, переставляют $K^n(\underline{0})$ и $K^n(\underline{\alpha})$, $\widetilde{K}^n(\underline{0})$ и $\widetilde{K}^n(\underline{\alpha})$, соответственно.

(7) Для $\underline{\alpha} \in \{0,1\}^n$ $\qquad \phi(t_0, {h_1}^{\alpha_1} \dots {h_n}^{\alpha_n}(t_0) = \psi(\widetilde{t}_0, \widetilde{h}_1^{\alpha_1} \dots \widetilde{h}_n^{\alpha_n}(\widetilde{t}_0))$.

(8) Для всех n

$$\{t_0, \dots, t_n\} \subset \left\{ {h_1}^{\alpha_1} \dots {h_{2n}}^{\alpha_{2n}}(t_0) : \underline{\alpha} \in \{0,1\}^{2n} \right\},$$

$$\{\widetilde{t}_0, \dots, \widetilde{t}_n\} \subset \left\{ \widetilde{h}_1^{\alpha_1} \dots \widetilde{h}_{2n}^{\alpha_{2n}}(\widetilde{t}_0) : \underline{\alpha} \in \{0,1\}^{2n} \right\}.$$

Доказательство. Проведем построение индуктивно. Пусть $A = S_1$, $B = X \setminus S_1$. Тогда $t_0 \in A$, $t_1 \in B$, и, применяя лемму 1.6 из [1], получаем, что существуют T_1 — плотное G_δ-подмножество в X, содержащее Δ, и h_1 — гомеоморфизм T_1, причем h_1 — сильно-Г-разложим над T_1, переставляет $A \cap T_1$ и $B \cap T_1$, $h_1 t_0 = t_1$ и $h_1 = {h_1}^{-1}$.

Принимая во внимание лемму 4.2, при построении h_1 можно добиться равенства $\phi(t, h_1(t)) = \phi(t_0, t_1)$ для всех $t \in A \cap T_1$. Положим $K^1(0) = A \cap T_1$, $K^1(1) = B \cap T_1$. Пусть $\phi(t_0, t_1) = g_1$. Из леммы 4.2 следует что существует точка $\widetilde{t}_k \in \widetilde{\Delta}$, такая что $\psi(\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_k) = g_1$ $(k \geq 1)$. Рассмотрим $\widetilde{A} = \widetilde{S}_1$, $\widetilde{B} = X \setminus \widetilde{S}_1$ и аналогично вышеописанному построим $\widetilde{K}_1(0)$, $\widetilde{K}_1(1)$, $\widetilde{T}_1$, $\widetilde{h}_1$.

Предположим, что построены $(T_1, \dots, T_n)$, $(\widetilde{T}_1, \dots, \widetilde{T}_n)$, $(h_1, \dots, h_n)$, $(\widetilde{h}_1, \dots, \widetilde{h}_n)$ и семейства $\{K^k(\underline{\alpha}) : \underline{\alpha} \in \{0,1\}^k\}$, $\{\widetilde{K}^k(\underline{\alpha}) : \underline{\alpha} \in \{0,1\}^k\}$, $k = \overline{1,n}$, удовлетворяющие утверждениям леммы. Перейдем к $(n+1)$-му шагу. Предположим, что n нечетно. Пусть $\widetilde{t}_m$ — элемент орбиты $\widetilde{\Delta}$ с минимальным номером m, таким что $\widetilde{t}_m \notin \{\widetilde{h}_1^{\alpha_1} \dots \widetilde{h}_n^{\alpha_n}(\widetilde{t}_0) : \underline{\alpha} \in \{0,1\}^n\}$. $\widetilde{t}_m \in \widetilde{K}_n(\underline{\beta})$, для некоторого $\underline{\beta} \in \{0,1\}^n$. Пусть $\widetilde{c} = \widetilde{h}_1^{\beta_1} \dots \widetilde{h}_n^{\beta_n}(\widetilde{t}_m) \in \widetilde{K}^n(\underline{0})$. Аналогично способу, описанному в [1], построим $\widetilde{T}_{n+1}$, $\widetilde{h}_{n+1}$, $\{\widetilde{K}^{n+1}(\underline{\alpha}) : \underline{\alpha} \in \{0,1\}^{n+1}\}$, причем так, чтобы $\widetilde{h}_{n+1}\widetilde{t}_0 = \widetilde{c}$. Принимая во внимание лемму 4.2, при построении h_{n+1} можно добиться того, чтобы $\psi(t, \widetilde{h}_{n+1}(t)) = \psi(\widetilde{t}_0, \widetilde{h}_{n+1}(\widetilde{t}_0))$ для всех $t \in \widetilde{K}^{n+1}(\underline{0})$. Пусть $\psi(\widetilde{t}_0, \widetilde{h}_{n+1}(\widetilde{t}_0)) = g_m$. Из леммы 4.2 следует, что существует точка $t_j \in \Delta$, такая что $\phi(t_0, t_j) = g_m$, $t_j \in K^n(\underline{0})$, $t_j \notin \{{h_1}^{\alpha_1} \dots {h_n}^{\alpha_n}(t_0) : \underline{\alpha} \in \{0,1\}^n\}$. Аналогично вышеописанному построим T_{n+1}, h_{n+1}, $\{K^{n+1}(\underline{\alpha}) : \underline{\alpha} \in \{0,1\}^{n+1}\}$, причем так, чтобы $h_{n+1} t_0 = t_j$ и $\phi(t, h_{n+1} t) = g_m$ для всех $t \in K_n(\underline{0})$. Из построения и свойств коциклов видно, что $\phi(t_0, {h_1}^{\alpha_1} \dots {h_{n+1}}^{\alpha_{n+1}}(t_0)) = \psi(\widetilde{t}_0, \widetilde{h}_1^{\alpha_1} \dots \widetilde{h}_{n+1}^{\alpha_{n+1}}(t_0))$ для всех $\underline{\alpha} \in \{0,1\}^{n+1}$. Если n — четно, то построение делается подобным образом, только начиная с выбора $t_m \in \Delta$, где m — минимальный номер, такой что $t_m \notin \{h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}(t_0) : \underline{\alpha} \in \{0,1\}^n\}$. Таким образом, $(n+1)$-й шаг завершен, и тем самым доказана лемма. ∎

Вернемся к **доказательству** теоремы. Положим $T = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} T_n$, $\widetilde{T} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \widetilde{T}_n$. T и $\widetilde{T}$ — плотные Г-инвариантные G_δ-подмножества в X, и можно считать, что в лемме 4.3 все $T_n = T$, все $\widetilde{T}_n = \widetilde{T}$. Пусть Θ_1 — гомеоморфизм Δ на

$\bigoplus\limits_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}_2$ — плотное подмножество в канторовом множестве $\prod\limits_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}_2$ следующего вида:

$$\Theta_1(h_1^{\alpha_1}\dots h_m^{\alpha_m}(t_0)) = \alpha_1,\dots,\alpha_m,0,0,\dots, \qquad \underline{\alpha}\in\{0,1\}^m$$

(см. теорема 1.8 в [1]); Θ_2 — гомеоморфизм $\bigoplus\limits_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}_2$ на $\widetilde{\Delta}$:

$$\Theta_2(\alpha_1,\dots,\alpha_m,0,0,\dots) = \widetilde{h}_1^{\alpha_1}\dots\widetilde{h}_m^{\alpha_m}(\widetilde{t}_0), \qquad \underline{\alpha}\in\{0,1\}^m\,.$$

Таким образом, определен гомеоморфизм $\Theta = \Theta_1\Theta_2$, отображающий Δ на $\widetilde{\Delta}$, причем, как легко видеть, $\phi(t_0, h_1^{\alpha_1}\dots h_m^{\alpha_m}(t_0)) = \psi(\widetilde{t}_0, \Theta h_1^{\alpha_1}\dots h_m^{\alpha_m}(\widetilde{t}_0))$ для всех $\underline{\alpha}\in\{0,1\}^m$ и всех m. По теореме Лаврентьева [2] существуют Y_1, Y_2 — G_δ-подмножества в X, $Y_1\supset\Delta$, $Y_2\supset\widetilde{\Delta}$, и продолжение Θ до гомеоморфизма Y_1 на Y_2, для которого оставляем обозначение Θ. Теперь заметим, что можно было выбрать $\Delta = \widetilde{\Delta}$, $t_0 = \widetilde{t}_0$, тогда, положив $Y = Y_1\cap Y_2$, получаем гомеоморфизм $\Theta : Y\to Y$. Очевидно, можно считать множество Y Γ-инвариантным, h_k-, $\widetilde{h}_k$-инвариантным для всех k. Гомеоморфизм $\Theta h_1^{\alpha_1}\dots h_n^{\alpha_n}\Theta^{-1}$ совпадает с $\widetilde{h}_1^{\alpha_1}\dots\widetilde{h}_n^{\alpha_n}$ на плотном подмножестве в Y, следовательно, $\Theta h_1^{\alpha_1}\dots h_n^{\alpha_n}\Theta^{-1}y = \widetilde{h}_1^{\alpha_1}\dots\widetilde{h}_n^{\alpha_n}y$ для всех $y\in Y$. Аналогично способу, описанному в [1, теорема 1.8], устанавливается, что действия групп $\{\Theta\gamma\Theta^{-1}\}_{\gamma\in\Gamma}$ и Γ сильно эквивалентны на Y, поэтому $\Theta r\Theta^{-1}\in[\Gamma]$ для любого $r\in[\Gamma]$, т.е. $\Theta\in N[\Gamma]$.

Рассмотрим коцикл ϕ_1, заданный на $R|_Y : \phi_1(x,y) = \psi(\Theta x,\Theta y)$, $(x,y)\in R|_Y$. Тогда равенство $\phi_1(x,y) = \psi(\Theta x,\Theta y) = \phi(h_1^{\alpha_1}\dots h_n^{\alpha_n}(t_0), h_1^{\beta_1}\dots h_m^{\beta_m}(t_0))$ $= \phi(x,y)$ выполнено для всех $(x,y)\in\Delta$. Отсюда, вспомнив замечание 3.5, легко получить, что $\phi = \phi_1$, т.е. $\psi(\Theta x,\Theta y) = \phi(x,y)$ для всех $(x,y)\in R|_Y$. ■

5. Внешняя сопряженность

Пусть Γ — счетная группа гомеоморфизмов пространства X. Следующая лемма говорит о том, что в случае, когда Γ эргодична, элементы нормализатора $N[\Gamma]$ могут быть либо чисто внутренними, либо чисто внешними.

Лемма 5.1. *Если действие Γ эргодично и $\tau\in N[\Gamma]$, то множество $A = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}\{x\in X : \tau x = \gamma x\}$ есть либо множество первой категории, либо дополнение к множеству первой категории.*

Определение 5.2. *Пусть π_1, π_2 — действия счетной группы G гомеоморфизмами на пространстве X, такие что $\pi_1(g),\pi_2(g)\in N[\Gamma]$ для всех $g\in G$. Действия π_1 и π_2 называются внешне сопряженными, если существуют Y — плотное Γ-инвариантное G_δ-подмножество в X и Θ — гомеоморфизм Y, такие что*

$$\pi_1(g)y = \Theta^{-1}\pi_2(g)\tau\Theta y\,,$$

где $\Theta \in N[\Gamma]$, $\tau = \tau(g) \in [\Gamma]$ *для всех* $g \in G$ *и всех* $y \in Y$.

Теорема 5.3. *Пусть* Γ *— эргодическая группа гомеоморфизмов пространства* X. *Действия* π_1, π_2 *внешне сопряжены тогда и только тогда, когда*

$$\{g \in G : \pi_1(g) \in [\Gamma]\} = \{g \in G : \pi_2(g) \in [\Gamma]\}.$$

Доказательство. Необходимость очевидна, докажем достаточность. Пусть H_i — группа гомеоморфизмов, порожденная группами $\pi_i(G)$ и Γ, $i = 1, 2$. R_1 — отношение эквивалентности, порожденное группой H_1. Так как группы H_1 и H_2 эргодические, то по теореме 1.8 ([1]) существуют X_1 — плотное G_δ-подмножество в X и Q — гомеоморфизм X_1, такие что $[H_1] = Q[H_2]Q^{-1}$. Рассмотрим $G_0 = \{g \in G : \pi_1(g) \in [\Gamma]\} = \{g \in G : \pi_2(g) \in [\Gamma]\}$, тогда G_0 — нормальная подгруппа в G. Пусть $p : G \to G/G_0$ – естественная проекция. Определим коциклы ϕ и ψ на $R_1|_{X_1 \times X_1}$ со значениями в G/G_0 следующим образом:

$$\phi(\pi_1(g)\gamma x, x) = p(g),$$

$$\psi(Q\pi_2(g)\gamma Q^{-1}x, x) = p(g), \qquad g \in G, \gamma \in \Gamma, x \in X_1.$$

Определения корректны в силу леммы 5.1.

Лемма 5.4. *Пусть* $h \in [H_1]$ *и* $\psi(hx, x) = p(g)$ *для всех* $x \in X_1$, *тогда существует* $\omega \in [\Gamma]$, *такой что* $hx = Q\pi_2(g)\omega Q^{-1}x$ *для всех* $x \in X_2$, *где* X_2 *— плотное* G_δ*-подмножество в* X_1.

Доказательство непосредственно следует из определений и леммы 5.1. ■

Несложно проверить, что ϕ, ψ — эргодические коциклы. По теореме 4.1 существуют Y — плотное G_δ-подмножество в X_1 и F — гомеоморфизм Y, такие что $\phi(x, y) = \psi(Fx, Fy)$ для всех $(x, y) \in R_1|_{Y \times Y}$. Тогда для любого $\widetilde{\gamma} \in [\Gamma]$ и всех $y \in Y$ $\psi(F\widetilde{\gamma}F^{-1}y, y) = p(e)$, где e — единица группы G. Поэтому $F\widetilde{\gamma}F^{-1}y = Q\omega Q^{-1}y$ ($\omega \in [\Gamma]$). Применяя те же рассуждения, что и в лемме 5.4, но к коциклу ϕ, получим $Q^{-1}F \in N[\Gamma]$. Также для всех $y \in Y$ выполнено $\psi(F\pi_1(g)F^{-1}y, y) = p(g)$, поэтому $F\pi_1 F^{-1}y = Q\pi_2(g)\tau Q^{-1}y$, $\tau \in [\Gamma]$. Положив $\Theta = Q^{-1}F$, получаем $\pi_1(g)y = \Theta^{-1}\pi_2(g)\tau\Theta y \quad (\tau = \tau(g))$. ■

Список литературы

[1] *D. Sullivan, B. Weiss, and J.D.M. Wright*, Generic dynamics and monotone complete C^*-algebras. — Trans. Amer. Math. Soc. (1986), v. 295, p. 795–809.

[2] *К. Куратовский*, Топология. Т. 1. Мир, Москва (1966).

[3] *С.И. Безуглый, В.Я. Голодец,* Внешняя сопряженность действий счетных аменабельных групп на пространстве с мерой. — Изв. АН СССР. Сер. мат.(1986), т. 50, № 4, с. 643–660.

[4] *G. Mackey,* Ergodic theory and virtual groups. — Math. Ann. (1966), v. 166, p. 187–207.

[5] *V.Ya. Golodets and S.D. Sinelshchikov,* Classification and structure of cocycles of amenable ergodic equivalence relations. — J. Funct. Anal. (1994), v. 121, p. 455–485.

[6] *V.Ya. Golodets and S.D. Sinelshchikov,* Outer conjugacy for actions amenable groups. — Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ. (1987), v. 23, p. 737–769.

The structure of cocycles of pseudo-homeomorphism groups

V. Kulagin

Let Γ be a countable group acting ergodically as pseudo-homeomorphisms on a perfect Polish space X. It is proved that, modulo a meagre subset of X, any two ergodic cocycles α and β of this action with values in a countable group G are weakly equivalent. This result further applied to prove the outer conjugacy of a countable groups of pseudo-homeomorphisms from the normalizer $N[\Gamma]$ of a full group $[\Gamma]$.

Структура коциклів груп псевдогомеоморфізмів

В. Кулагін

Нехай зчисленна група Γ ергодично діє псевдогомеоморфізмами на польскому досконалому просторі X. Доведено, що з точністю до множин першої категорії деякі два ергодичних коцикла α та β цієї дії зі значеннями в зчисленній групі G слабко еквівалентні. Цей результат далі використовано для доведення зовнішньої спряженості зчисленних груп псевдогомеоморфізмів з нормалізатора $N[\Gamma]$ повної групи $[\Gamma]$.