Математическая физика, анализ, геометрия
2000, т. 7, № 2, с. 231–249

О полноте системы функций $\left\{z^{\lambda_n}\right\}$ при взвешенно-равномерной аппроксимации на кривых в комплексной плоскости

И.О. Хачатрян

Статья поступила в редакцию 25 августа 1998 года
Представлена В.Я. Голодцом

Даны достаточные условия полноты указанной в заглавии системы в весовых пространствах функций на кривых в комплексной плоскости.

Рукопись публикуемой статьи была найдена в бумагах И.О. Хачатряна (1933–1994) после его кончины. Основной результат (теорема 1) вошел в кандидатскую диссертацию автора, выполненную под руководством Б.Я. Левина и защищенную в Ростовском университете в 1965 году. Однако этот результат не был опубликован при жизни автора и не вошел в посмертный обзор: И.О. Хачатрян, Весовые приближения полиномами и целыми функциями, Математическая физика, анализ, геометрия (1999), т. 6, вып.1–2, с. 130–157.

При подготовке рукописи к печати в нее были внесены лишь минимальные редакционные изменения.

Редакционная коллегия

Пусть E — нигде не плотное неограниченное замкнутое множество плоскости z, и пусть на E задана произвольная измеримая функция (вес) $\varphi(t)$, удовлетворяющая условиям

$$t^n\varphi^{-1}(t) \to 0 \quad \text{при} \quad |t| \to +\infty,\ t \in E,\ n = 0, 1, \dots;\ \varphi(t) \geq 1. \tag{1}$$

Рассмотрим пространство $C_\varphi(E)$ непрерывных на E функций $f(t)$, удовлетворяющих условию

$$f(t)\varphi^{-1}(t) \to 0 \quad \text{при} \quad |t| \to +\infty,\ t \in E,$$

с нормой

$$\|f\| = \sup_{t\in E} \left| f(t)\varphi^{-1}(t) \right| .$$

Предпроложим, что существует непрерывная кривая, соединяющая точку $z = 0$ с бесконечно удаленной и не имеющая отличных от нуля общих точек с множеством E. Тогда очевидно, что функция $z^{\lambda} \in C_{\varphi}(E)$ $(\mathrm{Re}\lambda > 0)$ корректно определена на множестве E и принадлежит пространству $C_{\varphi}(E)$.

По аналогии с классической проблемой С.Н. Бернштейна, изучался вопрос о нахождении условий на множество E и на данную последовательность чисел λ_n, вообще говоря, комплексных, для того, чтобы система $\left\{z^{\lambda_n}\right\}$ была полной в $C_{\varphi}(E)$, т.е. о возможности приближения любой функции из $C_{\varphi}(E)$ полиномами вида $a_0^{(n)} + \sum a_k^{(n)} z^{\lambda_k}$.

Аналогичная задача ставилась также для пространств $L_p(E) = L_p(\varphi, E)$.

Отметим здесь результат М.М. Джрбашяна [1] о полноте системы $\{z^n\}$ в $C_{\varphi}(E)$ и $L_2(E)$ в случае, когда функция $\varphi(t) = \varphi(|t|)$ — нормально возрастающая, а аппроксимация совершается на множестве достаточно общей природы.

Пусть E — неограниченная кривая, состоящая из конечного числа ветвей, удаляющихся в бесконечность, и обладающая свойствами (коротко: свойствами D):

1) она не содержит петель и спрямляема в любой конечной части плоскости;

2) она разбивает плоскость z на конечное число односвязных бесконечных областей $G_k (k = 1, 2, \ldots, m)$, каждая из которых содержит некоторый угол Δ_k с раствором π/α_k $(1/2 \le \alpha_k < +\infty)$;

3) если $\sigma(z)$ — длина дуги связного куска E, отсчитываемая от какой-нибудь точки до его точки z, то вдали от начала координат $\sigma(z)$ есть однозначная функция от $|z|$ и $d\sigma(z) \le M|dz|$, где M — некоторая константа.

Пусть, далее, функция $\varphi(z) = \varphi(|z|) = \exp p(r)$, определенная на E, является нормально возрастающей, т.е. допускает представление вида

$$\ln \varphi(r) = p(r) = p(1) + \int_1^r \frac{\omega(t)}{t} dt \,, \tag{2}$$

где $\omega(t) \nearrow +\infty$ при $t \nearrow +\infty$.

Результат М.М. Джрбашяна [1] состоит в следующем.

Теорема I. *Если*

$$\int^{+\infty} \frac{p(r)}{r^{1+w}} dr = +\infty, \quad w = \max(\alpha_1, \ldots, \alpha_m), \tag{3}$$

то система $\{z^n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ *полна в* $C_\varphi(E)$ *и* $L_2(E)$.

Вопросам полноты произвольной системы $\{z^{\lambda_n}\}$ посвящен ряд исследований. Отметим некоторые из них.

Первый результат принадлежит В. Фуксу [2], который доказал, что для того, чтобы система $\{z^{\lambda_n}\}$, $\lambda_n > 0$, $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq h > 0$ была полной в $L_2(0, +\infty)$ с весом e^t, необходимо и достаточно, чтобы расходился интеграл $\int^\infty \exp[\lambda(r)] r^{-2} dr$, где

$$\lambda(r) = \begin{cases} \frac{2}{\lambda_1}, & r \leq \lambda_1, \\ 2 \sum\limits_{\lambda_n < r} \frac{1}{\lambda_n}, & r > \lambda_1, \end{cases} \tag{4}$$

— характеристическая функция последовательности $\{\lambda_n\}$.

С. Мандельбройтом [3] (см. также [4]) получено достаточное условие для полноты системы $\{z^{\lambda_n}\}$, $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq h > 0$ в $C_\varphi[0, +\infty[$ в случае, когда $\varphi(t)$ — нормально возрастающая.

Позже П. Малявен [5, с. 220] установил необходимое и достаточное условие:

Теорема II. *Для того чтобы система* $\{z^{\lambda_n}\}$, $|\lambda_k - \lambda_m| \geq h > 0$, $k \neq m$, *была полна в* $C_\varphi[0, +\infty[$, *где* $\varphi(t)$ *— нормально возрастающая функция на* $[0, +\infty[$, *необходимо и достаточно, чтобы расходился интеграл*

$$\int^{+\infty} p\left(b e^{\lambda(r)}\right) r^{-2} dr \tag{5}$$

для любого $b > 0$.

Вопрос о полноте системы $\{z^{\lambda_n}\}$ на кривых в комплексной области изучен в работе [6] М.М. Джрбашяна при предположении, что множество E удовлетворяет условиям D и дополнительному требованию: один из углов Δ_k (скажем Δ_1) имеет вершину в начале координат. Доказано, что если $\varphi(t) = \exp(\mu t^q)$, где $q \geq \max(\alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, то расходимость интеграла

$$\int^{\infty} \exp\left[q\lambda(r)\right] \frac{dr}{r^{2+q(2-1/\alpha_1)}} \tag{6}$$

обеспечивает полноту системы $\left\{z^{\lambda_n}\right\}$ в пространстве $L_2(E)$.

В работе М.М. Джрбашяна и автора [7] рассмотрена взвешенно-квадратическая полнота системы $\left\{z^{\lambda_n}\right\}$, $\lambda_{n+1}-\lambda_n \geq h > 0$, на множестве $E = E(\alpha)$ — совокупности двух лучей $\arg z = \pm\pi/2\alpha$ $(1/2 < \alpha < \infty)$ — в случае, когда функция $\varphi(t) = \varphi(|t|)$ — нормально возрастающая. Полученный результат верен также в случае равномерной аппроксимации. Результат формулируется в терминах функции

$$k_*(r,\alpha) = \inf_{r' \geq r} k(r',\alpha), \quad \text{где } k(x,\alpha) = \lambda(x) - \frac{1}{\alpha}\ln x\,, \tag{7}$$

а $\lambda(r)$ — характеристическая функция последовательности $\{\lambda_n\}$.

Теорема III. *Условия*

$$\int^{\infty} \frac{p(r)}{r^{1+\alpha}}dr = +\infty, \quad \int_1^{\infty} \frac{p\left(be^{k_*(r,\alpha)}\right)}{r^2}dr = +\infty, \quad \forall b \in]0,1]\,, \tag{8}$$

обеспечивают полноту системы $\left\{1, z^{\lambda_n}\right\}$ *в пространстве* $C_\varphi(E(\alpha))$.

Анализ доказательства этой теоремы показывает, что рассуждения проходят также в случае, когда аппроксимация рассматривается на кривых E, удовлетворяющих условиям D и дополнительному требованию D': существует угол в начале координат, не содержащий точек множества E. Раствор этого угла обозначим через π/β. При предположении $\lambda_{n+1}-\lambda_n \geq h > 0$ справедлива

Теорема IV. *Пусть множество E удовлетворяет условиям D и D'. Если интегралы*

$$\int^{\infty} \frac{p(r)}{r^{1+\alpha}}dr, \quad \int^{\infty} \frac{p\left(be^{k_*(r,\beta)}\right)}{r^2}dr, \tag{9}$$

где $\alpha = \max(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$, *расходятся для любого* b $(0 < b < 1)$, *то система* $\left\{1, z^{\lambda_n}\right\}$ *полна в* $C_\varphi(E)$.

А.Ф. Леонтьевым [8] изучена полнота системы $\left\{z^{\lambda_n}\right\}$, где $\{\lambda_n\}$ — монотонная последовательность целых неотрицательных чисел с положительной плотностью, в пространстве $L_2(\varphi,E)$ на множестве E, удовлетворяющем условиям D и следующему дополнительному условию D''. Каждый угол Δ_k $(k=1,\ldots,m)$ имеет раствор $\pi/\alpha_k > 2\pi\sigma$, и одна из областей G_k, например G_1, содержит криволинейный угол P (P и Δ_1 совпадают вдали от начала) с вершиной в начале (начало, вообще, не принадлежит области G_1), который пересекается с каждой окружностью $|z| = r$ $(0 < r < +\infty)$ по дуге длиной $> 2\pi\sigma r$ (это означает, что раствор угла P больше $2\pi\sigma$).

Приведем этот результат полностью.

Теорема V. *Пусть $\{\lambda_n\}$ — монотонная последовательность целых неотрицательных чисел, $\{\mu_n\}$ — ее дополнение относительно $\{n\}$, и пусть*

$$\lim \frac{n}{\mu_n} = \sigma < 1 \quad \left(\lim \frac{n}{\lambda_n} = 1 - \sigma > 0\right). \tag{10}$$

Пусть, далее, множество E удовлетворяет условиям D и дополнительному условию D''. Если при некотором $\varepsilon_0 > 0$

$$\int^{\infty} \frac{p(r)dr}{r^{1+w+\varepsilon_0}} = +\infty, \quad w = \max(\beta_1, \ldots, \beta_m), \ \frac{\pi}{\beta_j} = \frac{\pi}{\alpha_j} - 2\pi\sigma, \ j = 1, \ldots, m, \tag{11}$$

то система $\{z^{\lambda_n}\}$ полна в $L_2(\varphi, E)$.

Чень Се-чан [9, 10] снял ограничение $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq h > 0$, содержащееся в приведенных выше теоремах, и рассмотрел случай, когда λ_n — комплексные числа, не обязательно различные. В его теореме кривая E удовлетворяет, кроме условий D, следующему дополнительному условию D'''. Одна из областей G_k $(k = 1, \ldots, m)$, скажем, G_1, содержит некоторый криволинейный угол P с вершиной в начале. Вдали от начала угол P совпадает с углом Δ_1. Каждая из сторон l_1 и l_2 угла P пересекается с окружностью $|z| = r$; $0 < r < \infty$, только в одной точке. К сторонам l_1 и l_2 можно провести в начале касательные. Угол P имеет раствор $\geq \pi/\alpha_1$, причем $1/\alpha_1 > 2(1 - D_\lambda)$, где D_λ определено ниже в (12).

Приведем его результат.

Теорема VI. *Пусть $\{\lambda_n\}$ — произвольная последовательность комплексных чисел с условиями*

$$\mathrm{Re}\lambda_n > 0, \quad |\mathrm{Im}\lambda_n| \leq C, \quad \lim \frac{n}{|\lambda_n|} = D_\lambda. \tag{12}$$

Пусть последовательность $\{\tau_n\}$ составлена из неповторяющихся элементов последовательности $\{\lambda_n\}$, и пусть число m_n обозначает кратность числа τ_n в последовательности $\{\lambda_n\}$. Пусть кривая E удовлетворяет требованиям D и дополнительному условию D'''. Если при некотором $\varepsilon_0 > 0$

$$\int^{\infty} \frac{p(r)}{r^{1+w}} dr = \infty, \quad w = \max\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \frac{1}{1/\alpha_1 - 2(1 - D_\lambda)} + \varepsilon_0\right), \tag{13}$$

то система $\{z^{\tau_n} \ln^j z\}$ $(n = 0, 1, \ldots; \ \tau_0 = 0; \ j = 0, 1, \ldots, m_n - 1)$ полна в пространстве $L_2(\varphi, E)$.

К этому кругу вопросов примыкает теорема Винера–Пэли о полноте системы $\{\mathrm{e}^{-\pi|x|/2}\mathrm{e}^{i\sigma_n x}\}$ в $L_2(-\infty, +\infty)$ [11, с. 296].

Теорема VII. *Пусть* $\{\sigma_n\}$ *— последовательность отличных друг от друга комплексных чисел, удовлетворяющих условию* $|\mathrm{Im}\sigma_k| < \pi/2$, $k = 1, \ldots, m$. *Тогда для полноты системы* $\{\exp(-\pi|x|/2 + i\sigma_k x)\}$ *в* $L_2(-\infty, +\infty)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum \frac{\cos \mathrm{Im}\sigma_n}{\mathrm{chRe}\sigma_n} = +\infty. \tag{14}$$

В приводимой ниже теореме рассматривается задача о полноте системы $\left\{z^{\lambda_n}\right\}$, где $\{\lambda_n\}$ — произвольная последовательность комплексных чисел из правой полуплоскости. Чтобы сформулировать теорему, введем следующие обозначения [12].

Пусть $\nu(t)$ обозначает число чисел λ_n, заключенных в круге $|z-t/2| = t/2$, а $N(R) = \int^R t^{-2}\nu(t)\,dt$, $d_\lambda = \overline{\lim}(N(R)/\ln R)$.

Теорема 1. *Пусть* E *— кривая, удовлетворяющая условиям* D *и* D'. *Если* $1/\beta > 2(1-d_\lambda)$ *и при некотором* $\varepsilon_0 > 0$

$$\int^{\infty} \frac{p(t)}{t^{1+\gamma}}dt = +\infty, \quad \gamma = \max\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \frac{1}{1/\beta - 2(1-d_\lambda)} + \varepsilon_0\right), \tag{15}$$

то система $\left\{1, z^{\lambda_n}\right\}$ $(\mathrm{Re}\lambda > 0)$ *полна в* $C_\varphi(E)$.

Доказательству теоремы предпошлем несколько замечаний и одну лемму.

1. Так как полнота системы $\left\{z^{\lambda_n}\right\}$ инвариантна относительно поворота плоскости около начала координат, то без ограничения общности можно предположить, что угол с раствором π/β, о котором идет речь в условии D', симметричен относительно отрицательной полуоси, т.е.

$$|\arg z| \le \pi\left(1 - \frac{1}{2\beta}\right), \quad \text{при } z \in E. \tag{16}$$

2. Можно предположить, что функция $\omega(t)$ в представлении (2) строго монотонна. В противном случае мы рассмотрели бы функцию $\omega(t) - 1/(t+1)$. Тогда существует обратная функция, которую обозначим через ω^{-1}.

3. Из условия (15) теоремы следует, что

$$\int_1^{\infty} \frac{\omega(t)}{t^{1+\gamma}}dt = +\infty\,. \tag{17}$$

В самом деле, обозначая

$$h(x) = \int_1^x \frac{p(t)}{t^{1+\gamma}}dt = \int_1^x \left[p(1) + \int_1^t \frac{\omega(u)}{u}du\right]\frac{dt}{t^{1+\gamma}}, \tag{18}$$

можем написать, что

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{\gamma}\left[p(1) + \int_1^t \frac{\omega(u)}{u}du\right](-t^{-\gamma})\Big|_1^x + \frac{1}{\gamma}\int_1^x t^{-\gamma}\frac{\omega(t)}{t}dt \\ &= \frac{1}{\gamma}\int_1^x \frac{\omega(t)}{t^{1+\gamma}}dt - \frac{1}{\gamma x^\gamma}\int_1^x \frac{\omega(u)}{u}du - \frac{p(1)}{\gamma x^\gamma} + \frac{p(1)}{\gamma} \end{aligned} \tag{19}$$

или

$$\begin{aligned} \gamma h(x) &= \int_1^x \frac{\omega(t)}{t^{1+\gamma}}dt + p(1) - \frac{1}{x^\gamma}\left[p(1) + \int_1^x \frac{\omega(u)}{u}du\right] \\ &= \int_1^x \frac{\omega(t)}{t^{1+\gamma}}dt + p(1) - \frac{p(x)}{x^\gamma}. \end{aligned} \tag{20}$$

Отсюда, так как $h(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, следует (17).

Лемма 1. *Пусть $f(\lambda)$ — голоморфная функция в замкнутой полосе $a \le \mathrm{Re}\lambda \le b$, и в этой полосе*

$$\ln|f(\lambda)| \le k(\sigma) + C_1|\tau|, \quad \lambda = \sigma + i\tau, \tag{21}$$

где функция $k(\sigma)$ ограничена в интервале $a \le \sigma \le b$ и

$$k(a) \le C_2, \quad k(b) \le C_2\,. \tag{22}$$

Тогда для данного $\varepsilon > 0$

$$\ln|f(\lambda)| \le C_2 + (C_1 + \varepsilon)|\tau|, \quad |\tau| \ge |\tau_0|, \quad a \le \sigma \le b. \tag{23}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С помощью преобразования $z = \exp[i\pi(\lambda - a)/(b-a)]$ отобразим полосу $a \le \sigma \le b$ плоскости λ на верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}z \ge 0$ плоскости z.

Обозначим

$$\mathcal{F}(z) = f\left(i\frac{a-b}{\pi}\ln z + a\right) = f(\lambda). \tag{24}$$

Тогда функция $\mathcal{F}(z)$ будет голоморфна в полуплоскости $\mathrm{Im}z > 0$ и согласно (21) и (22)

$$\ln|\mathcal{F}(z)| \leq k\left(a - \frac{a-b}{\pi}\varphi\right) + C_1\left|\frac{a-b}{\pi}\ln|z|\right|, \tag{25}$$

$$\ln|\mathcal{F}(x)| \leq C_2 + \left|\frac{a-b}{\pi}\ln|x|\right|. \tag{26}$$

Так как функция $k_1(\varphi) = k(a-(a-b)\varphi/\pi)$ ограничена в интервале $0 \leq \varphi \leq \pi$, то $\mathcal{F}(z)$ имеет конечную степень в верхней полуплоскости и, следовательно [12], учитывая (26), будем иметь

$$\begin{aligned} \ln|\mathcal{F}(z)| &\leq \frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln|\mathcal{F}(t)|dt}{(t-x)^2+y^2} \leq \frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{C_2 + C_1\left|\frac{a-b}{\pi}\ln|t|\right|}{(t-x)^2+y^2}dt \\ &= C_2 + C_1\frac{b-a}{\pi}\cdot\frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left|\ln|t|\right|dt}{(t-x)^2+y^2} \\ &\leq C_2 + C_1\frac{b-a}{\pi}I(z), \end{aligned} \tag{27}$$

где

$$I(z) = \frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left|\ln|t|\right|}{(t-x)^2+y^2}dt. \tag{28}$$

Функция $I(z)$ гармонична в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}z > 0$ и непрерывна в замкнутой полуплоскости $\mathrm{Im}z \geq 0$ за исключением точек $z = 0$ и $z = \infty$. Легко видеть, что для $I(z)$ справедлива оценка

$$I(z) = \left|\ln|z|\right| + O(1) \quad \text{при } |z| \to 0, \infty, \tag{29}$$

что в свою очередь дает

$$\begin{aligned} \ln|\mathcal{F}(z)| &\leq C_2 + C_1\frac{b-a}{\pi}\left(\left|\ln|z|\right| + O(1)\right) \\ &\leq C_2 + (C_1+\varepsilon)\frac{b-a}{\pi}\left|\ln|z|\right|, \quad |z| \to 0, \infty. \end{aligned} \tag{30}$$

Из (30), переходя к переменной λ, получим оценку (26). Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы.

В силу теоремы об общем виде линейного функционала в $C_\varphi(E)$ и теоремы Хана–Банаха, достаточно доказать, что из равенства нулю моментов

$$\int\limits_E \exp\left(-p(r)\right)z^{\lambda_n}d\mu(z) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, \ |z| = r, \ \lambda_0 = 0, \tag{31}$$

для некоторой функции $\mu(z)$, $z \in E$, с ограниченной вариацией на E следует $\mu(z) \equiv \mathrm{const}$. С этой целью рассмотрим функцию

$$w(\lambda) = \int\limits_E \exp\Big(-p(r)\Big) z^\lambda d\mu(z). \qquad (32)$$

Она голоморфна в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda > 0$ и

$$w(\lambda_n) = 0. \qquad (33)$$

Оценим $w(\lambda)$. Из (32) и (16) имеем

$$\begin{aligned} \Big|w(\lambda)\Big| &\leq \exp\left\{\max_{z\in E} \mathrm{Re}\left[(\sigma + i\tau)\ln(re^{i\varphi}) - p(r)\right]\right\} \int\limits_E \Big|d\mu(z)\Big| \\ &\leq C\exp\left[\left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)\pi|\tau| + \max_{r>0}\Big(\sigma\ln r - p(r)\Big)\right], \\ \lambda &= \sigma + i\tau,\ z = re^{i\varphi}. \end{aligned} \qquad (34)$$

Легко видеть, что максимум выражения $\sigma \ln r - p(r)$ достигается при $\sigma = \omega(r)$, т.е. при $r = \omega^{-1}(\sigma)$. Таким образом, из (34) имеем оценку

$$\Big|w(\lambda)\Big| \leq C\exp\left\{\pi\left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)|\tau| + \sigma\ln\omega^{-1}(\sigma) - p(\omega^{-1}(\sigma))\right\}. \qquad (35)$$

Из (17) следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует стремящаяся к бесконечности последовательность $\{t_n\}$, такая, что

$$\frac{\omega(t_n)}{t_n^\gamma} > \frac{1}{\ln^{1+\varepsilon} t_n}, \qquad (36)$$

или

$$t_n^\gamma < \omega(t_n)\ln^{1+\varepsilon} t_n. \qquad (37)$$

Отсюда следует, что

$$\ln t_n < \frac{1}{\gamma}\ln\omega(t_n) + \frac{1+\varepsilon}{\gamma}\ln\ln t_n \qquad (38)$$

или

$$\ln^{1+\varepsilon} t_n < \frac{1}{\gamma^{1+\varepsilon}}\ln^{1+\varepsilon}\omega(t_n)\left[1 + \frac{(1+\varepsilon)\ln\ln t_n}{\ln\omega(t_n)}\right]^{1+\varepsilon}. \qquad (39)$$

Следовательно,

$$\ln^{1+\varepsilon} t_n < \frac{1}{\gamma^{1+\varepsilon}}\ln^{1+\varepsilon}\omega(t_n)\left[1 + o(1)\right], \quad n \to +\infty. \qquad (40)$$

Из (37) будем иметь

$$t_n^\gamma < \frac{1}{\gamma^{1+\varepsilon}}\,[1+o(1)]\,\omega(t_n)\ln^{1+\varepsilon}\omega(t_n). \tag{41}$$

Подставляя $t_n = \omega^{-1}(\sigma_n)$, получим

$$\omega^{-1}(\sigma_n) < \sigma_n^{1/\gamma}\ln^{(1+\varepsilon)/\gamma}\sigma_n\,(1+o(1))\,\gamma^{-1/\gamma}. \tag{42}$$

Из (35) и (42) следует, что на прямых $\sigma = \sigma_n$

$$\begin{aligned}\Big|w(\sigma_n+i\tau)\Big| &< C\exp\Big\{\pi\left(1-\frac{1}{2\beta}\right)|\tau| + \frac{\sigma_n}{\gamma}\ln\sigma_n \\ &+ \frac{1+\varepsilon}{\gamma}\sigma_n\ln\ln\sigma_n - p(\omega^{-1}(\sigma_n))\Big\}.\end{aligned} \tag{43}$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(\lambda) = w(\lambda)\cdot\exp\left[-\frac{1}{\gamma}\lambda\ln\lambda - \lambda\ln\ln^{(1+\varepsilon)/\lambda}(i\lambda)\right]. \tag{44}$$

Она голоморфна в правой полуплоскости и при $\mathrm{Re}\lambda > 0$

$$\begin{aligned}\ln|\psi(\lambda)| &= \ln|w(\lambda)| - \mathrm{Re}\frac{\lambda\ln\lambda}{\gamma} - \mathrm{Re}\lambda\ln\ln^{(1+\varepsilon)/\lambda}(i\lambda) \\ &\le C + \pi\left(1-\frac{1}{2\beta}\right)|\tau| + \sigma\ln\omega^{-1}(\sigma) - p(\omega^{-1}(\sigma)) - \frac{1}{\gamma}\sigma\ln|\lambda| \\ &+ \frac{\pi}{2\gamma}|\tau| - \frac{1+\varepsilon}{\gamma}\sigma\left[\ln\ln|\lambda| + \frac{1}{2}\left(1+\frac{\delta^2}{\ln^2|\lambda|}\right)\right] + \\ &+ \frac{1+\varepsilon}{\gamma}\mathrm{arctg}\frac{\delta}{\ln|\lambda|}\cdot|\tau|, \quad \delta = \arg(i\lambda),\ 0\le\delta\le\pi.\end{aligned} \tag{45}$$

На последовательности вертикальных прямых $\sigma = \sigma_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ имеем

$$\ln\Big|\psi(\sigma_n+i\tau)\Big| \le C + \left[\pi\left(1-\frac{1}{2\beta}+\frac{1}{2\gamma}\right)+o(1)\right]|\tau|, \tag{46}$$

где $o(1)$ — величина, стремящаяся к нулю при $|\tau|\to+\infty$, причем равномерно при $\sigma\ge 1$, а C не зависит от n.

Из (45) и (46) следует, что $\psi(\lambda)$ в полосе $\sigma_n \le \sigma \le \sigma_{n+1}$ удовлетворяет оценке

$$\ln\Big|\psi(\sigma+i\tau)\Big| \le \pi\left(1-\frac{1}{2\beta}+\frac{1}{2\gamma}+\varepsilon_1\right)|\tau| + k(\sigma), \tag{47}$$

где $k(\sigma)$ ограничена на отрезке $[\sigma_n, \sigma_{n+1}]$ и $k(\sigma_n) \le C_0$, $k(\sigma_{n+1}) \le C_0$, где C_0 не зависит от n. Следовательно, по доказанной лемме

$$\ln\Big|\psi(\sigma + i\tau)\Big| \le C_0 + \pi\left(1 - \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{2\gamma} + \varepsilon_1\right)|\tau|, \quad |\tau| > |\tau_0|, \tag{48}$$

в полосе (σ_n, σ_{n+1}). Так как правая часть этого неравенства не зависит от n, то оно верно во всей правой полуплоскости, т.е.

$$\ln\Big|\psi(\sigma + i\tau)\Big| \le C_0 + \Delta|\tau|, \quad \sigma \ge 1, \tag{49}$$

где $\Delta > \pi\left(1 - 1/(2\beta) + 1/(2\gamma) + \varepsilon_1\right)$, откуда вытекает, что $\psi(\lambda)$ — конечной степени в правой полуплоскости и

$$h_\psi\left(-\frac{\pi}{2}\right) + h_\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) \le 2\pi\left[\left(1 - \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{2\gamma}\right) + \varepsilon_1\right]. \tag{50}$$

Вследствие произвольности $\varepsilon_1 > 0$ получим

$$h_\psi\left(-\frac{\pi}{2}\right) + h_\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) \le 2\pi\left(1 - \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{2\gamma}\right). \tag{51}$$

Из условия $\gamma > [1/\beta - 2(1 - d_\lambda)]^{-1}$ следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\left[h_\psi\left(-\frac{\pi}{2}\right) + h_\psi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] < d_\lambda. \tag{52}$$

Отсюда в силу теоремы единственности Б.Я. Левина [12, гл. IV, § 2] заключаем что $\psi(\lambda) \equiv 0$, $\mathrm{Re}\lambda > 0$, откуда следует, что $w(\lambda) \equiv 0$, $\mathrm{Re}\lambda > 0$, и, в частности, $w(n) = 0$, $n = 0, 1, \ldots$, или

$$\int\limits_E \exp\Big(-p(r)\Big) z^n d\mu(z) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{53}$$

Из условия (15), принимая во внимание, что $\gamma \ge \max(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, по теореме М.М. Джрбашяна заключаем, что $d\mu(z) = 0$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Легко видеть, что доказательство проходит также в случае, когда $\beta = 1/2$, т.е. когда аппроксимация совершается на луче $[0, +\infty[$. Тогда доказанная теорема принимает вид

Теорема 1′. *Если при некотором* $\varepsilon > 0$

$$\int^{\infty} \frac{p(t)}{t^{1+\gamma}} dt = +\infty, \quad \gamma = \max\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2d_\lambda} + \varepsilon\right), \tag{54}$$

то система $\left\{1, z^{\lambda_n}\right\}$ *полна в* $C_\varphi[0, +\infty[$.

З а м е ч а н и е 2. Сравним наш результат с теоремой VI в случае, когда все λ_n различны. Из условия $|\mathrm{Im}\lambda_n| < C$ и из существования предела $\lim n \cdot |\lambda_n|^{-1} = D_\lambda$ следуют существование предела $\lim(N(R)/\ln R) = d_\lambda$ и равенство $d_\lambda = D_\lambda$. Обратное не верно, как показывает пример последовательности $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n = 2n(2-(-1)^n)$, для которой отношение $n|\lambda_n|^{-1} = 1/2(2-(-1)^n)$ не имеет предела. Имеем $\lambda_{2k} = 4k$, $\lambda_{2k-1} = 12k-6$. Ясно, что $\lambda_n \neq \lambda_m$ при $n \neq m$, т.е. все члены последовательности различны. Далее, так как $\nu(k) = k/4 + (1/4)(k/3) + O(1)$, то $\nu(t) = t/3 + O(1)$ и, следовательно, $d_\lambda = 1/3$. Тогда расходимость интеграла (54) обеспечит полноту системы $\left\{1, z^{\lambda_n}\right\}$ в $C_\varphi[0, +\infty[$.

З а м е ч а н и е 3. Возьмем $\lambda_n = 1 + i\eta_n$, где η_n — вещественные, и пусть выполнено условие (54). Тогда по теореме $1'$ имеем: $\forall f \in C_\varphi[0, +\infty[$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists p(t) = a_0^{(n)} + \sum a_k^{(n)} t^{1+i\eta_k}$ такая, что

$$\left| f(t) - a_0^{(n)} - \sum a_k^{(n)} t \cdot t^{i\eta_k} \right| \varphi^{-1}(t) < \varepsilon, \quad t \in [0, +\infty[. \tag{55}$$

Понятно, что здесь можно взять $a_0^{(n)} = a_0 = f(0)$, и после замены $t = \exp x$ получим, что

$$\left| f(e^x) - a_0 - e^x \sum a_k^{(n)} e^{i\eta_k x} \right| \varphi^{-1}(e^x) < \varepsilon, \quad -\infty < x < +\infty\,. \tag{56}$$

Обозначая $f_1(x) = f(\exp x) - a_0$ и $\varphi_1(x) = \varphi(\exp x)$, перепишем (56) в виде

$$\left| f_1(x) - e^x \sum a_k^{(n)} e^{i\eta_k x} \right| \varphi_1^{-1}(x) < \varepsilon, \quad -\infty < x < +\infty, \tag{57}$$

где

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = 0; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} = 0, \tag{58}$$

а $\varphi_1(x)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi_1(x) = \varphi(0), \quad \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln \varphi_1(x)}{e^{\gamma x}} dx = +\infty, \ \gamma = \max\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2d_\lambda} + \varepsilon\right). \tag{59}$$

Обозначим через $\tilde{C}_{\varphi_1}(-\infty, +\infty)$ пространство непрерывных на оси $(-\infty, +\infty)$ функций $f_1(x)$, удовлетворяющих условиям (58), где $\ln \varphi_1(x)$ — выпуклая функция с конечным положительным пределом в отрицательной бесконечности. Тогда при выполнении условия (59) система $\left\{e^x e^{i\eta_n x}\right\}$ полна в $\tilde{C}_{\varphi_1}(-\infty, +\infty)$.

Отсюда, в частности, следует, что при выполнении условия (59) система $\{e^{-x}e^{i\eta_n x}\}$ полна в пространстве $C_0[0,+\infty[$ непрерывных на полуоси $[0,+\infty[$ функций $f(x)$, удовлетворяющих условию $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$, причем $||f|| = \max_{0\le x<+\infty}|f(x)|$. Но выполнение условия (59) всегда можно обеспечить выбором весовой функции, если предположить, что $d_\lambda>0$. Выразим d_λ через считающую функцию. Так как отрезок прямой $\mathrm{Re} z=1$, попадающий в круг $|z-t/2|=t/2$, имеет длину $2\sqrt{t-1}\sim 2\sqrt{t}$ при достаточно больших t, то, обозначая через $n(t)$ количество точек η_n, попадающих в отрезок $[-t;t]$, получим

$$\begin{aligned} n(t) &= \nu(t^2), \\ N(R) &= \int^R \frac{\nu(t)}{t^2}dt = 2\int^R \frac{n(u)}{u^3}du, \\ d_\lambda &= \overline{\lim}\frac{N(R)}{\ln R} = \overline{\lim}\frac{1}{\ln R}\int^R \frac{n(u)}{u^3}du. \end{aligned} \tag{60}$$

Таким образом, получаем утверждение, являющееся дополнением к теореме VII Винера–Пэли:

Теорема 2. *Если $\overline{\lim}(1/\ln R)\int^R u^{-3}n(u)\,du>0$, то система $\{e^{-x}e^{i\eta_n x}\}$ полна в $C_0[0,+\infty[$.*

Полным аналогом теоремы Винера–Пэли для полуоси $[0,+\infty[$ является следующая [11, с. 283]

Теорема 3. *Необходимым и достаточным условием полноты системы $\{e^{-x}e^{i\eta_n x}\}$, $\eta_n\in\boldsymbol{R}$, в $L_2(0,+\infty)$ является расходимость ряда*

$$\sum\frac{1}{1+\eta_n^2}\,. \tag{61}$$

Из последних теорем получаем простое достаточное условие полноты системы $\{e^{i\eta_n x}\}$, $\eta_n\in\boldsymbol{R}$, на любом отрезке вещественной оси.

Пусть l — произвольное положительное число. Если

$$\overline{\lim}\frac{1}{\ln R}\int^R\frac{n(u)}{u^3}du>0 \quad \text{или} \quad \sum\frac{1}{1+\eta_n^2}=+\infty, \tag{62}$$

то система $\{\exp(i\eta_n x)\}$, $\eta_n\in\boldsymbol{R}$, полна в пространстве $C[-l,l]$.

Это условие, конечно, далеко от необходимого. Оно не улавливает порядок роста функции $n(r)$. Причиной этого является потеря, которая происходит вследствие того, что весовая норма заменяется обыкновенной равномерной нормой. Можно ожидать, что эта потеря будет менее чувствительной при более быстром росте весовой функции. Это наводит на мысль, что из теорем о весовой полноте системы $\exp(i\eta_n x)$, $\eta_n \in \boldsymbol{R}$, на оси или полуоси можно получить близкое к необходимому простое достаточное условие для того, чтобы радиус Берлинга–Малявена был равен бесконечности. С этой целью докажем такую теорему:

Теорема 4. *Пусть $\{\eta_n\}$ — произвольная последовательность отличных друг от друга вещественных чисел, и пусть $n(r)$ означает число точек η_n в интервале $(-r, r)$. Пусть*

$$\overline{\lim} \frac{n(r)}{r \ln r} = \varepsilon > 0. \tag{63}$$

Тогда система

$$\Big\{\exp(-\exp at)\exp(i\eta_n t)\Big\} \tag{64}$$

при $a > e/\varepsilon$ полна в $C_0[0, +\infty[$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $d\mu(t)$ определяет произвольный функционал, исчезающий на данной системе:

$$\int\limits_0^{+\infty} \exp(-\exp at)\exp(i\eta_n t) d\mu(t) = 0. \tag{65}$$

Рассмотрим функцию

$$f(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty} \exp(-\exp at)\exp(-i\lambda t) d\mu(t). \tag{66}$$

Это — целая функция уточненного порядка $\rho(r) = 1 + \ln\ln r/\ln r$, обращающаяся в нуль во всех точках $-\eta_n$, причем $h_f(\theta) \le 1/a$.

Пусть $n_f(r)$ означает число отличных от нуля корней функции f в круге радиуса r. Тогда по теореме Б.Я. Левина [12, с. 222] имеем

$$\overline{\lim} \frac{n_f(r)}{r^{\rho(r)}} \le \frac{e\rho}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} h_f(\theta) d\theta. \tag{67}$$

У нас $\rho = 1$, а $\int_0^{2\pi} h_f(\theta) d\theta \le 2\pi/a$, следовательно,

$$\overline{\lim} \frac{n_f(r)}{r \ln r} \le \frac{e}{a}. \tag{68}$$

Из очевидного неравенства $n(r) \le n_f(r)$ следует, что

$$\varepsilon = \overline{\lim} \frac{n(r)}{r \ln r} \le \overline{\lim} \frac{n_f(r)}{r \ln r} \le \frac{e}{a}, \tag{69}$$

что противоречит условию $e/a < \varepsilon$. Следовательно, $f(\lambda) \equiv 0$, откуда следует, что $d\mu(t) = 0$. Теорема доказана.

Следствие. *Если* $\overline{\lim}\, n(r)/r \ln r > 0$, *то система* $\{\exp(i\eta_n t)\}$ *полна в любом пространстве* $C(-l, l)$.

Этот результат также можно уточнить. Аналогично, можно доказать, что если для некоторого натурального k

$$\overline{\lim} \frac{n(r)}{r \underbrace{\ln \cdots \ln}_{k} r} > 0, \tag{70}$$

то система $\{\exp(i\eta_n t)\}$ полна в любом пространстве $C(-l, l)$.

В качестве другого следствия приведем одну теорему о полноте системы степеней на конечной совокупности спрямляемых кривых. Пусть L — совокупность конечного числа кусочно гладких спрямляемых жордановых кривых L_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, выходящих из начала координат, причем кривые L_j и L_k, $k \ne j$, не имеют других общих точек. Предположим, что существует угловая область с вершиной в начале координат и с раствором π/β $(1/2 < \beta < +\infty)$, не содержащая точек множества L. Обозначим через $C(L)$ пространство непрерывных на L функций $f(z)$ с обычной нормой $||f|| = \max_{z \in L} |f(z)|$. Пусть, далее, $\{\lambda_n\}$ — последовательность отличных друг от друга комплексных чисел из правой полуплоскости, и пусть d_λ имеет тот же смысл, что и в теореме 1. Тогда имеет место следующая

Теорема 5. *Если* $d_\lambda > 1 - 1/(2\beta)$, *то система* $\{1, z^{\lambda_k}\}$ *полна в пространстве* $C(L)$.

Доказательство. Без ограничения общности можно предположить, что $z \in L \Rightarrow |z| \le 1$, $|\arg z| \le \pi(1 - 1/2\beta)$. Пусть $d\mu(z)$ определяет произвольный линейный функционал, аннулирующий систему $\{1, z^{\lambda_k}\}$, т.е. $\int_L d\mu(z) = 0$; $\int_L z^{\lambda_k} d\mu(z) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим функцию $w(\lambda) = \int_L z^\lambda d\mu(z)$. Она голоморфна в правой полуплоскости, и $w(\lambda_n) = 0$. Кроме того, имеем $|w(\lambda)| \le C + (1 - 1/2\beta)|\tau|$, $\lambda = \sigma + i\tau$. Тогда из условия $d_\lambda > 1 - 1/(2\beta)$ по теореме Б.Я. Левина следует, что $w(\lambda) \equiv 0$, $\mathrm{Re}\lambda > 0$ и, в частности, $w(n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Это означает, что $\int_L z^n d\mu(z) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, и так как система $\{z^n\}$ полна в $C(L)$, то $d\mu \equiv 0$. Теорема доказана. Она является обобщением одной теоремы А.Ф. Леонтьева [13, с. 201], см. также [14]*.

Перейдем теперь к вопросу весовой полноты системы $\{z^{\lambda_n}\}$ в пространстве аналитических в неограниченной области функций (ср. [7]). Для простоты ограничимся следующим случаем.

Пусть $\Delta(\alpha)$ означает угловую область $|\arg z| < \pi/2\alpha$ $(1/2 < \alpha < +\infty)$, а $H_2(\Delta, \varphi)$ — множество функций $f(z)$, голоморфных в области $\Delta(\alpha)$ и удовлетворяющих условию

$$\iint\limits_{\Delta(\alpha)} \exp\Big(-p(r)\Big)\Big|f(z)\Big|^2 dxdy < +\infty, \quad r = |z|, \quad z = x + iy. \tag{71}$$

Предполагается, что функция $\varphi(z) = \varphi(|z|) = \exp p(r)$ допускает представление (2). Пусть, далее, π/β означает раствор угла, дополнительного к $\Delta(\alpha)$, т.е. $\beta^{-1} + \alpha^{-1} = 2$, а d_λ имеет тот же смысл, что и в теореме 1. Тогда имеет место следующая

Теорема 6. *Если* $1/\beta > 2(1 - d_\lambda)$ *и при некотором* $\varepsilon_0 > 0$

$$\int^{+\infty} \frac{p(t)}{t^{1+\gamma}} dt = +\infty, \quad \gamma = \max\left(\beta, \frac{1}{\beta} - 2(1 - d_\lambda) + \varepsilon_0\right), \tag{72}$$

то система $\{z^{\lambda_n}\}$ $(\mathrm{Re}\lambda_n > 0)$ *полна в* $H_2(\Delta, \varphi)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что если для некоторой функции $f_0(z) \in H_2(\Delta, \varphi)$

$$\iint\limits_{\Delta(\alpha)} \exp\Big(-p(r)\Big)\overline{f_0(z)} z^{\lambda_n} dxdy = 0, \quad n = 1, 2, \ldots;\ z = x + iy,\ r = |z|, \tag{73}$$

то $f_0(z) \equiv 0$. С этой целью рассмотрим функцию

$$w(\lambda) = \iint\limits_{\Delta(\alpha)} \exp\Big(-p(r)\Big) z^\lambda \overline{f_0(z)} dxdy. \tag{74}$$

Она голоморфна в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda > 0$, и

$$w(\lambda_n) = 0. \tag{75}$$

*Результат, о котором идет речь, был позднее опубликован в работе: *R. Zeistra*, Zeros and regular growth of Laplace transform along curves.— J. Reine und Angewandte Math. (1992), v. 424, 1–15 (Прим. редакции).

Оценим функцию $w(\lambda)$. Применяя неравенство Шварца с учетом того, что $f_0(z) \in H_2(\Delta, \varphi)$, получим, что (ср. [7])

$$\begin{aligned}
\Big|w(\lambda)\Big| &\le C_0 \exp\left(\frac{\pi}{2\alpha}|\tau|\right) \left(\int_0^\infty \exp\Big(-p(r)\Big) r^{2\sigma+1} dr\right)^{1/2} \\
&\le C_0 \exp\left(\frac{\pi}{2\alpha}|\tau|\right) \left(C_1 + \int_1^\infty \exp\Big(-p(r)\Big) r^{2\sigma+1} dr\right)^{1/2} \\
&\le C_0 \exp\left(\frac{\pi}{2\alpha}|\tau|\right) \cdot C_2 \left(\int_1^\infty \exp\Big(-p(r)\Big) r^{2\sigma+1} dr\right)^{1/2} \\
&\le C_3 \exp\frac{\pi}{2\alpha}|\tau| \cdot \max_{r\ge 1} \left(\exp\Big(-p(r)\Big) r^{2\sigma+3}\right)^{1/2}. \qquad (76)
\end{aligned}$$

Обозначая $p_1(r) = (1/2)p(r) - (3/2)\ln r$, будем иметь

$$p_1(r) = p_1(1) + \int_1^r \frac{\omega_1(t)}{t} dt, \quad \omega_1(t) = \frac{1}{2}\omega(t) - \frac{3}{2}, \qquad (77)$$

и оценка (76) запишется в виде

$$\Big|w(\lambda)\Big| \le C \exp\left[\left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)\pi|\tau|\right] \cdot \max_{r\le 1}\left(\exp\Big(-p_1(r)\Big) r^{\sigma}\right) \qquad (78)$$

или в виде

$$\begin{aligned}
&\Big|w(\lambda)\Big| \le C \exp\left[\left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)\pi|\tau| + \max_{r\le 1}\Big(\sigma \ln r - p_1(r)\Big)\right], \\
&\lambda = \sigma + i\tau,\ z = re^{i\varphi}. \qquad (79)
\end{aligned}$$

Оценка (79) совпадает с оценкой (34) с точностью до замены $p(r)$ на $p_1(r)$, что несущественно. Продолжая далее, как в доказательстве теоремы 1, получим, что из неравенства $\gamma > [1/\beta - 2(1-d_\lambda)]^{-1}$ следует, что $w(\lambda) \equiv 0$, $\mathrm{Re}\lambda > 0$ и, в частности, $w(n) = 0$, $n = 0, 1, \ldots$ или

$$\iint_{\Delta(\alpha)} \exp\Big(-p(r)\Big) z^n \overline{f_0(z)} dx dy = 0. \qquad (80)$$

Так как $\gamma \ge \beta$, то расходимость интеграла (72) согласно общей теореме М.М. Джрбашяна о полноте полиномов в угловых областях [15] влечет $f_0(z) \equiv 0$. Теорема доказана.

Автор выражает искреннюю благодарность Б.Я. Левину за обсуждение и ценные советы.

Список литературы

[1] *М.М. Джрбашян*, Некоторые вопросы теории взвешенно-полиномиальных приближений в комплексной области. — Мат. сб. (1955), т. 36 (78), № 3, с. 353–440.

[2] *W.H.J. Fuchs*, On the closure of $\{e^{-t}t^{\lambda_n}\}$. — Proc. Cambridge Philos. Soc. (1946), v. 42, p. 91–105.

[3] *S. Mandelbrojt*, Théorème d'unicité. — Ann. Ec. Norm. Sup. (3), (1948), v. 65.

[4] *С. Мандельбройт*, Примыкающие ряды, регуляризация последовательностей, применения. Изд-во иностр. лит., Москва (1955).

[5] *P. Malliavin*, Sur quelques procédés d'extrapolation. — Acta math. (1955), v. 93, p. 179–255.

[6] *М.М. Джрбашян*, О полноте некоторых систем аналитических функций в бесконечных областях. — Докл. АН СССР (1949), т. 67, № 1, с. 15–18.

[7] *М.М. Джрбашян, И.О. Хачатрян*, О полноте системы функций $\{z^{\lambda_n}\}$ в комплексной плоскости при взвешенно-квадратической аппроксимации. — Докл. АН СССР (1956), т. 110, № 6, с. 914–917.

[8] *А.Ф. Леонтьев*, О полноте системы $\{z^{\lambda_n}\}$ на кривых в комплексной плоскости. — Докл. АН СССР (1958), т. 121, № 5, с. 797–800.

[9] *Чэнь Се-чан*, О полноте системы функций $\{z^{\lambda_n}\}$ на кривых в комплексной области. — Изв. АН СССР. Сер. мат. (1961), т. 25, № 2, с. 253–276.

[10] *Чэнь Се-чан*, О полноте системы функций $\{z^{\lambda_n}\}$ на бесконечных кривых в комплексной плоскости. — Наука в Китае (Scientia Sinica) (1963), сер. A, т. 12, № 7, с. 921–949.

[11] *Н.И. Ахиезер*, Лекции по теории аппроксимации. Наука, Москва (1965).

[12] *Б.Я. Левин*, Распределение корней целых функций. Гостехиздат, Москва (1956).

[13] *А.Ф. Леонтьев*, Последовательности полиномов и экспонент. Наука, Москва (1980).

[14] *R.L. Zeinstra*, Müntz-Szász approximation on curves and area problems for zero sets. Thesis, University of Amsterdam (1985).

[15] *М.М. Джрбашян*, О метрических признаках полноты полиномов при взвешенном приближении. — Докл. АН СССР (1949), т. 66, № 6, с. 1037–1040.

On completeness of the system $\{z^{\lambda_n}\}$ on curves in the complex plane under weighted uniform approximation

I.O. Khachatryan

Sufficient conditions of completeness of the system mentioned in the title are given for weighted spaces of functions defined on curves in the complex plane.

Про повноту системи функцій $\{z^{\lambda_n}\}$ при вагово-рівномірній апроксимації на кривих в комплексній площині

I.O. Хачатрян

Дано достатні умови повноти згаданої в назві статті системи в вагових просторах функцій на кривих в комплексній площині.