Математическая физика, анализ, геометрия
2000, т. 7, № 3, с. 308–320

Многочлен минимальной степени для определения всех моментов переключения в задаче быстродействия

В.И. Коробов, Г.М. Скляр, В.В. Флоринский

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
Пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина

Szczecin Institute of Mathematics
15 Wielkopolska, Szczecin, Poland

Белгородский государственный университет
Ул. Студенческая, 12, г. Белгород, 308007, Россия

E-mail:vkorobov@univer.kharkov.ua
korobov@sus.univ.szczecin.pl
sklyar@univer.kharkov.ua
sklyar@sus.univ.szczecin.pl
flor@bgu.edu.ru

Статья поступила в редакцию 24 ноября 1999 года
Представлена Е.Я. Хрусловым

Данная работа продолжает исследования авторов по аналитическому решению задачи быстродействия. Найден точный вид многочлена минимальной степени, корнями которого являются моменты переключения оптимального по быстродействию управления для канонической системы. На основе этого определен явный вид опорного вектора к области управляемости системы.

Один из путей развития теории линейного быстродействия основан на ее связи с классической проблемой моментов, при этом важное место занимает исследование задачи быстродействия для канонической системы:

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = u, \quad |u| \le 1, \\ \dot{x}_i = x_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n, \\ x(0) = x, \quad x(\Theta) = 0, \quad \Theta \to \min . \end{gathered} \tag{1}$$

Показано [1], что эта задача эквивалентна степенной проблеме моментов на минимально возможном отрезке. Такой подход позволил получить [1, 2] аналитическое решение задачи (1) для произвольного порядка системы n: даны методы нахождения управления $u(t)$, времени оптимального быстродействия Θ и моментов переключения $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$ (точки разрыва функции $u(t)$). В работе [1] был дан явный вид полиномов $\Delta_n(\Theta, x)$ и $\tilde{\Delta}_n(\Theta, x)$ степени p^2, при $n = 2p-1$, и степени $p(p+1)$, при $n = 2p$, таких, что наибольший вещественный корень Θ_0 уравнения

$$\Delta_n(\Theta, x)\tilde{\Delta}_n(\Theta, x) = 0$$

является временем быстродействия из точки x в 0. Следующим шагом после определения времени быстродействия было нахождение моментов переключения управления $u(t)$. Предложенный в [1] метод состоял в последовательном нахождении моментов переключения как минимальных корней соответствующих полиномов, суммарная степень которых равна $p(p-1)$, при $n = 2p-1$, и p^2, при $n = 2p$. При этом процедура нахождения последовательности полиномов нам представляется громоздкой, поскольку последовательности полиномов, определяющих новый момент переключения, вычисляются после нахождения предыдущего момента.

В данной работе показываем, что нахождение моментов переключения в рамках теории, построенной в [1], может быть существенно проще и элегантней. А именно, мы даем явный вид полинома степени $n-1$, корнями которого являются все моменты переключения $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$. Другим замечательным свойством этого полинома является то, что его коэффициенты, умноженные на некоторые известные множители, дают компоненты опорного вектора к области управляемости за время Θ_0 в точке x, знание которого используется при решении задач оптимального управления [3]. Данная работа вносит необходимое дополнение, завершающее построение теории, которая предложена в [1].

Пусть $u(t)$ — оптимальное по быстродействию управление, переводящее точку x_0 в 0 в силу системы (1). Управление $u(t)$ является кусочно-постоянной функцией, имеющей не более $n-1$ точек разрыва [4], причем $u(t) = 1$, либо $u(t) = -1$. Тогда справедливо соотношение

$$x = -\int\limits_0^{\Theta} e^{-A\tau} b u(\tau)\, d\tau, \tag{2}$$

здесь

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

В силу кусочного постоянства функции $u(t)$, из (2) имеем

$$(-1)^k x_k = (-1)^{n+1} \frac{2\tilde{u}}{k!} \left[\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+1} T_j^k + (-1)^{n+1} \frac{T_n^k}{2} \right], \tag{4}$$

$$k = 1, \dots, n,$$

здесь и далее $T_n = \Theta$, а $\tilde{u}$ — управление на последнем участке $[T_{n-1}, T_n]$, т.е. $\tilde{u} = +1$, либо $\tilde{u} = -1$. Здесь, как и в [2], имеем две системы равенств: для начальных точек x, которые переводятся в начало координат управлением первого рода, имеем $\tilde{u} = -1$, для управления второго рода имеем $\tilde{u} = +1$. Учитывая, что $\tilde{u} = \pm 1$ (т.е. $\tilde{u} = 1/\tilde{u}$), равенства (4) можно записать в следующем виде:

$$\frac{T_n^k + (-1)^{k+1} \tilde{u} k! x_k}{2} = (-1)^n \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+1} T_j^k, \tag{5}$$

$$k = 1, \dots, n.$$

Обозначим левые части (5)

$$G_k = \frac{T_n^k + (-1)^{k+1} \tilde{u} k! x_k}{2}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{6}$$

Тогда равенства (5) можно записать в виде

$$G_k = (-1)^n \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+1} T_j^k, \quad k = 1, \dots, n. \tag{7}$$

Для нахождения времени быстродействия Θ, рода управления $\tilde{u}$, моментов переключения $T_1, \dots, T_{n-1}$, следуя [1, 2], введем последовательность полиномов $\{\gamma_k(x, \Theta, \tilde{u})\}$, определяемую рекуррентной формулой:

$$\gamma_1 = \frac{\Theta + \tilde{u} x_1}{2}, \quad \gamma_k = \frac{1}{k} \left(G_k - \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i G_{k-i} \right), \quad k = 1, \dots, n, \tag{8}$$

или явной формулой:

$$\gamma_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \begin{vmatrix} G_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ G_2 & G_1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{k-1} & G_{k-2} & G_{k-3} & \dots & k-1 \\ G_k & G_{k-1} & G_{k-2} & \dots & G_1 \end{vmatrix}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Известен [1] аналитический метод решения задачи (1), в котором используется последовательность определителей Маркова:

$$\Delta_1 = \gamma_1, \quad \Delta_2 = \gamma_2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{vmatrix}, \dots, \tag{9}$$

$$\Delta_{2p-1} = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_p \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_p & \gamma_{p+1} & \cdots & \gamma_{2p-1} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{2p} = \begin{vmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{p+1} \\ \gamma_3 & \gamma_4 & \cdots & \gamma_{p+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{p+1} & \gamma_{p+2} & \cdots & \gamma_{2p} \end{vmatrix}, \dots .$$

Время быстродействия Θ_0 является наибольшим вещественным корнем уравнения

$$\Delta_n(\gamma_1(x, \Theta, -1), \dots, \gamma_n(x, \Theta, -1))\Delta_n(\gamma_1(x, \Theta, 1), \dots, \gamma_n(x, \Theta, 1)) = 0.$$

При этом, если $\tilde{u} = -1$, то Θ_0 является максимальным вещественным корнем уравнения $\Delta_n(\gamma_1(x, \Theta, -1), \dots, \gamma_n(x, \Theta, -1)) = 0$; если $\tilde{u} = +1$, то Θ_0 является максимальным вещественным корнем уравнения $\Delta_n(\gamma_1(x, \Theta, +1), \dots, \gamma_n(x, \Theta, +1)) = 0$. Таким образом, Θ_0 является наибольшим вещественным корнем уравнения

$$\Delta_n(\gamma_1(x, \Theta, \tilde{u}), \dots, \gamma_n(x, \Theta, \tilde{u})) = 0. \tag{10}$$

Теорема 1. *Моменты переключения $T_1, \dots, T_{n-1}$ являются корнями уравнения*

$$\sum_{l=1}^{n} t^{l-1} \sum_{k=l}^{n} \frac{\partial \Delta_n(\gamma_1(x, \Theta_0, \tilde{u}), \dots, \gamma_n(x, \Theta_0, \tilde{u}))}{\partial \gamma_k(x, \Theta_0, \tilde{u})} \gamma_{k-l}(x, \Theta_0, \tilde{u}) = 0, \tag{11}$$

где x — начальная точка, Θ_0 — время быстродействия из x в 0, $\tilde{u}$ — управление на конечном промежутке $[T_{n-1}; \Theta_0]$.

Для доказательства теоремы используется следующий промежуточный результат.

Лемма. *Имеют место следующие равенства:*

$$\frac{\partial \gamma_k}{\partial G_k} = \frac{1}{k}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial \gamma_k}{\partial G_{k-j}} = -\frac{\gamma_j}{k-j}, \quad j = 1, \dots, k-1. \tag{13}$$

Доказательство леммы. Воспользуемся соотношениями (8). Так как $\gamma_i \quad (i = 1, \dots, k-1)$ не зависят от G_k, то дифференцируя (8) по G_k, получаем равенство (12).

Равенство (13) будем доказывать по индукции. При $j = 1$ имеем

$$\frac{\partial \gamma_k}{\partial G_{k-1}} = \frac{1}{k}\left(-\gamma_1 - \frac{\partial \gamma_{k-1}}{\partial G_{k-1}} G_1\right) = \frac{1}{k}\left(-\gamma_1 - \frac{1}{k-1} G_1\right) = -\frac{\gamma_1}{k-1}.$$

Здесь воспользовались тем, что $\gamma_1 = G_1$ и что γ_j не зависит от $G_{j+1}, G_{j+2}, \dots$.

Предположим, что формула (13) справедлива для $1 \le j \le s < k-1$, и докажем для $j = s+1$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \gamma_k}{\partial G_{k-s-1}} &= \frac{1}{k}\left(-\gamma_{s+1} - \frac{\partial \gamma_{k-s-1}}{\partial G_{k-s-1}} G_{s+1} - \frac{\partial \gamma_{k-s}}{\partial G_{k-s-1}} G_s - \dots - \frac{\partial \gamma_{k-1}}{\partial G_{k-s-1}} G_1\right) \\
&= \frac{1}{k}\left(-\gamma_{s+1} - \frac{1}{k-s-1} G_{s+1} + \frac{1}{k-s-1}\gamma_1 G_s + \dots + \frac{1}{k-s-1}\gamma_s G_1\right) \\
&= \frac{1}{k}\left[-\gamma_{s+1} - \frac{1}{k-s-1}\left(G_{s+1} - \gamma_1 G_s - \dots - \gamma_s G_1\right)\right] \\
&= \frac{1}{k}\left(-\gamma_{s+1} - \frac{s+1}{k-s-1}\gamma_{s+1}\right) = -\frac{1}{k-s-1}\gamma_{s+1},
\end{aligned}$$

что доказывает справедливость формулы (13).

Замечание 1. Обозначив в формуле (13) $l = k - j$, получим

$$\frac{\partial \gamma_k}{\partial G_l} = -\frac{\gamma_{k-l}}{l}, \qquad l = 1, \dots, k-1. \tag{14}$$

Замечание 2. Если положить $\gamma_0 = -1$, то соотношения (12) и (13) можно записать одним равенством (13), которое будет справедливым для $j = 0, 1, \dots, k-1$, а равенство (14) будет справедливым для $l = 1, \dots, k$.

Доказательство теоремы. Из равенств (9), (8) и (7) видно, что при заданном x_0 и найденных Θ_0 и $\tilde{u}$, определители Δ_n являются функциями от $T_1, \dots, T_{n-1}$ ($\Delta_n = \Delta_n(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$; $\gamma_k = \gamma_k(G_1, \dots, G_k)$, $k = 1, \dots, n$; $G_l = G_l(T_1, \dots, T_{n-1})$, $l = 1, \dots, n$).

При найденных Θ_0 и $\tilde{u}$ уравнение (10) обращается в тождество, дифференцируя которое по T_j, получим систему

$$\frac{\partial\Delta_n}{\partial T_j} = 0, \qquad j = 1, \ldots, n-1\,,$$

или

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\Delta_n}{\partial G_1}\,\frac{\partial G_1}{\partial T_1} + \frac{\partial\Delta_n}{\partial G_2}\,\frac{\partial G_2}{\partial T_1} + \cdots + \frac{\partial\Delta_n}{\partial G_n}\,\frac{\partial G_n}{\partial T_1} = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial\Delta_n}{\partial G_1}\,\frac{\partial G_1}{\partial T_{n-1}} + \frac{\partial\Delta_n}{\partial G_2}\,\frac{\partial G_2}{\partial T_{n-1}} + \cdots + \frac{\partial\Delta_n}{\partial G_n}\,\frac{\partial G_n}{\partial T_{n-1}} = 0.
\end{gathered} \tag{15}$$

Из соотношений (7) имеем, что

$$\frac{\partial G_k}{\partial T_j} = (-1)^{n+j+1} k T_j^{k-1}. \tag{16}$$

Подставляя (16) в (15), получаем

$$\begin{gathered}
(-1)^{n+2}\left(\frac{\partial\Delta_n}{\partial G_1} + 2\frac{\partial\Delta_n}{\partial G_2}T_1 + 3\frac{\partial\Delta_n}{\partial G_3}T_1^2 + \cdots + n\frac{\partial\Delta_n}{\partial G_n}T_1^{n-1}\right) = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(-1)^{2n}\left(\frac{\partial\Delta_n}{\partial G_1} + 2\frac{\partial\Delta_2}{\partial G_2}T_{n-1} + 3\frac{\partial\Delta_n}{\partial G_3}T_{n-1}^2 + \cdots + n\frac{\partial\Delta_n}{\partial G_n}T_{n-1}^{n-1}\right) = 0.
\end{gathered}$$

Откуда следует, что моменты переключения $T_1, \ldots, T_{n-1}$ и только они являются корнями уравнения

$$\frac{\partial\Delta_n}{\partial G_1} + 2\frac{\partial\Delta_2}{\partial G_2}t + 3\frac{\partial\Delta_n}{\partial G_3}t^2 + \cdots + n\frac{\partial\Delta_n}{\partial G_n}t^{n-1} = 0$$

или

$$\sum_{l=1}^{n} l\,\frac{\partial\Delta_n}{\partial G_l}\,t^{l-1} = 0. \tag{17}$$

При заданной начальной точке x и найденных Θ_0 и $\tilde{u}$, в левой части уравнения (17) стоит полином степени $n-1$, который имеет $n-1$ действительных корней.

Учитывая, что

$$\frac{\partial\Delta_n}{\partial G_l} = \sum_{k=l}^{n} \frac{\partial\Delta_n}{\partial\gamma_k}\,\frac{\partial\gamma_k}{\partial G_l}, \qquad l = 1, \ldots, n,$$

здесь при $k < l \quad \frac{\partial \gamma_k}{\partial G_l} = 0$. Воспользовавшись равенством (14), получим

$$\frac{\partial \Delta_n}{\partial G_l} = -\frac{1}{l} \sum_{k=l}^{n} \frac{\partial \Delta_n}{\partial \gamma_k} \gamma_{k-l}.$$

Подставляя полученное выражение в (17), имеем уравнение (11), что и требовалось доказать.

Найдем теперь производные $\frac{\partial \Delta_n}{\partial \gamma_k}$. Из вида определителей (9) получаем, что производная $\frac{\partial \Delta_n}{\partial \gamma_k}$ представляет собой сумму алгебраических дополнений элемента γ_k. Обозначим через $\Delta_n^{(i,j)}$ определитель, полученный из определителя Δ_n вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Тогда

$$\frac{\partial \Delta_{2p-1}}{\partial \gamma_k} = (-1)^{k+1} \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ 1 \le i,j \le p}} \Delta_{2p-1}^{(i,j)}, \qquad k = 1, \dots, 2p-1;$$

$$\frac{\partial \Delta_{2p}}{\partial \gamma_k} = (-1)^{k} \sum_{\substack{i+j=k \\ 1 \le i,j \le p}} \Delta_{2p}^{(i,j)}, \qquad k = 1, \dots, 2p.$$

Подставляя полученные выражения в (11), имеем уравнения для нахождения всех моментов переключения для $n = 2p-1$

$$\sum_{l=1}^{2p-1} t^{l-1} \sum_{k=l}^{2p-1} (-1)^{k+1} \gamma_{k-l} \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ 1 \le i,j \le p}} \Delta_{2p-1}^{(i,j)} = 0 \tag{18}$$

и для $n = 2p$

$$\sum_{l=1}^{2p} t^{l-1} \sum_{k=l}^{2p} (-1)^{k} \gamma_{k-l} \sum_{\substack{i+j=k \\ 1 \le i,j \le p}} \Delta_{2p}^{(i,j)} = 0. \tag{19}$$

Теорема доказана.

В качестве примера, как и в [1], рассмотрим задачу оптимального быстродействия для системы (1) при $n = 5$ из точки $x(0,0,0,0,x_5)$ $(x_5 > 0)$ в 0.

В этом случае $p = 3$,

$$\gamma_1 = \frac{\Theta}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{\Theta^2}{2^3}, \quad \gamma_3 = \frac{\Theta^3}{2^4}, \quad \gamma_4 = \frac{5\Theta^4}{2^7}, \quad \gamma_5 = 12\tilde{u}x_5 + \frac{7\Theta^5}{2^8}.$$

Из уравнения

$$\begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 \end{vmatrix} = 0.$$

Находим, что $\tilde{u} = -1$, $\quad \Theta = 4\sqrt[5]{6x_5}$. С учетом этого можно отметить, что $\gamma_5 = 13\Theta^5/2^9$. Тогда уравнение (11) (или (18)) запишем в виде

$$\begin{vmatrix} \gamma_3 & \gamma_4 \\ \gamma_4 & \gamma_5 \end{vmatrix} \gamma_0 + \left(- \begin{vmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_4 & \gamma_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \gamma_2 & \gamma_4 \\ \gamma_3 & \gamma_5 \end{vmatrix} \right) \gamma_1$$

$$+ \left(\begin{vmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_3 \\ \gamma_2 & \gamma_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{vmatrix} \right) \gamma_2$$

$$+ \left(- \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_3 \\ \gamma_2 & \gamma_4 \end{vmatrix} \right) \gamma_3 + \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \gamma_4$$

$$+ \left[\left(- \begin{vmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_4 & \gamma_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \gamma_2 & \gamma_4 \\ \gamma_3 & \gamma_5 \end{vmatrix} \right) \gamma_0 + \left(\begin{vmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_3 \\ \gamma_2 & \gamma_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{vmatrix} \right) \gamma_1 \right.$$

$$\left. + \left(- \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_3 \\ \gamma_2 & \gamma_4 \end{vmatrix} \right) \gamma_2 + \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \gamma_3 \right] t$$

$$+ \left[\left(\begin{vmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_3 \\ \gamma_2 & \gamma_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{vmatrix} \right) \gamma_0 + \left(- \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_3 \\ \gamma_2 & \gamma_4 \end{vmatrix} \right) \gamma_1 \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \gamma_2 \right] t^2 + \left[\left(- \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_3 \\ \gamma_2 & \gamma_4 \end{vmatrix} \right) \gamma_0 + \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \gamma_1 \right] t^3$$

$$+ \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \gamma_0 t^4 = 0.$$

Учитывая, что по предположению $\gamma_0 = -1$, получим уравнение

$$256t^4 - 512\Theta t^3 + 336\Theta^2 t^2 - 80\Theta^3 t + 5\Theta^4 = 0,$$

корни которого (в порядке возрастания)

$$t_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{8}\Theta, \quad t_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{8}\Theta, \quad t_3 = \frac{3+\sqrt{5}}{8}\Theta, \quad t_4 = \frac{5+\sqrt{5}}{8}\Theta$$

являются моментами переключения управления (точки разрыва функции $u(t)$).

З а м е ч а н и е 3. Поскольку при известном времени быстродействия Θ и роде управления $\tilde{u}$ полиномы γ_k являются функциями только от координат начальной точки x $(x_1, \dots, x_k, \quad k = 1, \dots, n)$, то предложенным методом можно находить моменты переключения $T_1, \dots, T_{n-1}$ управления $u(t)$ как функции от начальной точки $x(x_1, \dots, x_n)$.

Так, например, при $n = 3$, уравнение (11) имеет вид

$$\gamma_1 t^2 - (\gamma_1^2 + 2\gamma_2)t + \gamma_1\gamma_2 + \gamma_3 = 0,$$

корни которого

$$t_{1,2} = \frac{\gamma_1^2 + 2\gamma_2 \pm \sqrt{\gamma_1^4 + 4\gamma_2^2 - 4\gamma_1\gamma_3}}{2\gamma_1}.$$

Так как при найденных Θ и $\tilde{u}$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0,$$

то $\gamma_3 = \gamma_2^2/\gamma_1$. Тогда моменты переключения

$$T_1 = \gamma_2/\gamma_1, \quad T_2 = (\gamma_1^2 + \gamma_2)/\gamma_1.$$

Из формул (6) и (8) находим, что

$$\gamma_1 = (\Theta + \tilde{u}x_1)/2, \quad \gamma_2 = (\Theta^2 - 2\tilde{u}x_1\Theta - 4\tilde{u}x_2 - x_1^2)/8.$$

Откуда

$$T_1 = \frac{\Theta^2 - 2\tilde{u}\Theta x_1 - 4\tilde{u}x_2 - x_1^2}{4(\Theta + \tilde{u}x_1)}, \quad T_2 = \frac{3\Theta^2 + 2\tilde{u}\Theta x_1 - 4\tilde{u}x_2 + x_1^2}{4(\Theta + \tilde{u}x_1)}.$$

Аналогично, для $n = 4$, уравнение (11) запишем в виде

$$\gamma_2 t^3 - (\gamma_1\gamma_2 + 2\gamma_3)t^2 + (\gamma_4 + 2\gamma_1\gamma_3 - \gamma_2^2)t - \gamma_1\gamma_4 + \gamma_2\gamma_3 = 0.$$

Учитывая, что при известных Θ и $\tilde{u}$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{vmatrix} = 0$$

или $\gamma_4 = \gamma_3^2/\gamma_2$, последнее уравнение будет иметь следующий вид:

$$\gamma_2^2 t^3 - (\gamma_1\gamma_2 + 2\gamma_3)\gamma_2^2 t^2 + (\gamma_3^2 + 2\gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \gamma_2^3)t - \gamma_1\gamma_3^2 + \gamma_2^2\gamma_3 = 0,$$

корни которого

$$T_1 = \frac{\gamma_1\gamma_2 + \gamma_3 - \sqrt{(\gamma_3 - \gamma_1\gamma_2)^2 + 4\gamma_2^3}}{2\gamma_2},$$

$$T_2 = \frac{\gamma_3}{\gamma_2},$$

$$T_3 = \frac{\gamma_1\gamma_2 + \gamma_3 + \sqrt{(\gamma_3 - \gamma_1\gamma_2)^2 + 4\gamma_2^3}}{2\gamma_2}$$

являются моментами переключения; здесь, исходя из формул (6) и (8),

$$\gamma_1 = (\Theta + \tilde{u}x_1)/2, \quad \gamma_2 = (\Theta^2 - 2\tilde{u}x_1\Theta - 4\tilde{u}x_2 - x_1^2)/8,$$

$$\gamma_3 = (3\Theta^3 - 3\tilde{u}x_1\Theta^2 + 12\tilde{u}x_2\Theta + 3x_1^2\Theta + 12x_1x_2 + 48\tilde{u}x_3 + \tilde{u}x_1^3)/48.$$

Так как для системы (1) порядка n полином, стоящий в левой части уравнения (11), имеет степень $n-1$, то, при известном времени быстродействия Θ и роде управления $\tilde{u}$, можно получить моменты переключения $T_1, \ldots, T_{n-1}$ как функции от $x_1, \ldots, x_{n-1}$ в аналитическом виде при $n \le 5$.

Кроме того, используя результаты работы [2], в которой показано, что, при $n = 2p$, четные моменты переключения являются корнями полинома степени $p-1$, а нечетные — корнями полинома степени p, и, при $n = 2p-1$, четные и нечетные моменты переключения являются корнями полиномов степени $p-1$, можно получить моменты переключения $T_1, \ldots, T_{n-1}$ как функции от $x_1, \ldots, x_{n-1}$ в аналитическом виде при $n \le 9$.

Рассмотрим задачу быстродействия (1), которую запишем в векторной форме:

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad |u| \le 1, \tag{20}$$

$$x(0) = x_0, \quad x(\Theta) = 0,$$

где A — матрица $n \times n$, b — n-мерный вектор, которые имеют вид (3).

Обозначим через $S(\Theta)$ область управляемости системы (20) в 0 за время Θ, т.е.

$$S(\Theta) = \left\{ x : x = \int\limits_0^\Theta e^{-A\tau} bu(\tau)\, d\tau \right\},$$

здесь $u(\tau)$ — произвольная измеримая функция такая, что $|u(\tau)| \le 1$. Точка x_0 при этом является граничной точкой множества $S(\Theta)$.

Теорема 2. *Вектор вида*

$$g = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Delta_n}{\partial \gamma_k} \gamma_{k-1}; -\sum_{k=2}^{n} \frac{\partial \Delta_n}{\partial \gamma_k} \gamma_{k-2}; \ldots \right.$$

$$\left. \ldots; (-1)^{n-2}(n-2)! \sum_{k=n-1}^{n} \frac{\partial \Delta_n}{\partial \gamma_k} \gamma_{k-n+1} + (-1)^n (n-1)! \frac{\partial \Delta_n}{\partial \gamma_n} \right) \tag{21}$$

является опорным вектором к области управляемости $S(\Theta)$ системы (1) в точке $x(0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A^* — матрица, транспонированная к матрице A системы (20). Рассмотрим систему, сопряженную системе (20), с обратным отсчетом времени относительно вспомогательных переменных $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$:

$$\dot{\psi} = -A^*\psi, \tag{22}$$

с начальным вектором $\psi(0) = \psi^0 = (\psi_1^0, \psi_2^0, \dots, \psi_n^0)$, который является опорным вектором к области управляемости $S(\Theta)$ в точке x_0 [5].

Решением системы (22) является вектор

$$\psi(t) = \psi^0 e^{-A^*t}.$$

Пусть $u^*(t)$ — оптимальное по быстродействию управление, переводящее точку x_0 в 0 в силу системы (1), которое, согласно [5], имеет вид

$$u^*(t) = sign(-\psi(t), b) = sign(-\psi^0 e^{-A^*t}, b) = -sign(\psi^0, e^{-At}b). \tag{23}$$

Скалярное произведение $(\psi^0, e^{-At}b)$ представляет собой полином

$$(\psi^0, e^{-At}b) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(-1)^l \psi_{l+1}^0 t^l}{l!}. \tag{24}$$

Корни этого полинома, согласно равенству (23), являются моментами переключения. Следовательно, полином (24) с точностью до постоянного множителя C совпадает с левой частью уравнения (11), т. е. можно записать, что

$$\sum_{l=0}^{n-1} \frac{(-1)^l \psi_{l+1}^0 t^l}{l!} = C \sum_{l=0}^{n-1} t^l \sum_{k=l+1}^{n} \frac{\partial \Delta_n}{\partial \gamma_k} \gamma_{k-l-1}.$$

Откуда получаем, что

$$\frac{(-1)^l}{l!} \psi_{l+1}^0 = C \sum_{k=l+1}^{n} \frac{\partial \Delta_n}{\partial \gamma_k} \gamma_{k-l-1}$$

или

$$\psi_{l+1}^0 = (-1)^l C l! \sum_{k=l+1}^{n} \frac{\partial \Delta_n}{\gamma_k} \gamma_{k-l-1}, \quad l = 0, \dots, n-1.$$

Полагая $C = 1$, получим, что вектор

$$g = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Delta_n}{\partial \gamma_k} \gamma_{k-1}; -\sum_{k=2}^{n} \frac{\partial \Delta_n}{\partial \gamma_k} \gamma_{k-2}; \dots; (-1)^{n-1}(n-1)! \frac{\partial \Delta_n}{\partial \gamma_n} \gamma_0 \right)$$

является опорным вектором к области управляемости $S(\Theta)$ системы (1) в точке x_0. Учитывая, что $\gamma_0 = -1$, получаем вектор (21).

Для рассмотренного ранее примера, при $n = 5$, имеем

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{\partial \Delta_5}{\partial \gamma_k} \gamma_{k-1} = -\frac{5\Theta^8}{2^{14}} = -120 x_5 \sqrt[5]{216 x_5^3}\,,$$

$$\sum_{k=2}^{5} \frac{\partial \Delta_5}{\partial \gamma_k} \gamma_{k-2} = \frac{5\Theta^7}{2^{10}} = 480 x_5 \sqrt[5]{36 x_5^2}\,,$$

$$\sum_{k=3}^{5} \frac{\partial \Delta_5}{\partial \gamma_k} \gamma_{k-3} = -\frac{21\Theta^6}{2^{10}} = -504 x_5 \sqrt[5]{6 x_5}\,,$$

$$\sum_{k=4}^{5} \frac{\partial \Delta_5}{\partial \gamma_k} \gamma_{k-4} = \frac{\Theta^5}{2^5} = 192 x_5\,,$$

$$\frac{\partial \Delta_5}{\partial \gamma_5} \gamma_0 = -\frac{\Theta^4}{2^6} = -4 \sqrt[5]{1296 x_5^4}\,.$$

(Здесь учли, что $\Theta = 4\sqrt[5]{6x_5}$).

Тогда вектор

$$g = \left(-120 x_5 \sqrt[5]{216 x_5^3}; -480 x_5 \sqrt[5]{36 x_5^2}; -1008 x_5 \sqrt[5]{6 x_5}; -1152 x_5; -96 \sqrt[5]{1296 x_5^4}\right)$$

является опорным вектором к области управляемости задачи (1) при $n = 5$ в начальной точке $(0; 0; 0; 0; x_5)$.

Список литературы

[1] *В.И. Коробов, Г.М. Скляр*, Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов. — Мат. сб. (1987), т. 134(176), № 2(10), с. 186–206.

[2] *В.И. Коробов, Г.М. Скляр, В.В. Флоринский*, Методы построения оптимальных по быстродействию управлений для канонических управляемых систем. — Мат. физ, анализ, геометрия (1999), т. 6, № 3/4, с. 264–287.

[3] *Н.Н. Моисеев*, Элементы теории оптимальных систем. Наука, Москва (1975), 528 с.

[4] *Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе,Е.Ф. Мищенко*, Математическая теория оптимальных процессов. Наука, Москва (1976), 392 с.

[5] *Э.Б. Ли, Л. Маркус*, Основы теории оптимального управления. Наука, Москва (1972), 576 с.

The minimal polynomial for determining of all points of switching in the time optimal control problem

V.I. Korobov, G.M. Sklyar, V.V. Florinsky

The present work continues the investigations of the authors on analytic solving of the time optimal control problem. The explicit form of a polynomial of minimal power which roots are the points of switching of the time-optimal control for the canonical system is found. On this basis the explicit form of a support vector to the controllability set is given.

Многочлен мінімального степеня для визначення усіх моментів переключення в задачі швидкодії

В.І. Коробов, Г.М. Скляр, В.В. Флоринський

Дана робота продовжує дослідження авторів по аналітичному розв'язанню задачі швидкодії. Знайдено точний вигляд многочлена мінімального степеня, корнями якого є моменти переключення оптимального за швидкодією керування для канонічної системи. На основі цього визначено явний вигляд опорного вектора до області керованості системи.