Математическая физика, анализ, геометрия
2000, т. 7, № 3, с. 321–330

Сингулярные числа интегральных операторов Фредгольма и p-k-вариация

Б.Д.Котляр, Ю.Б.Олевская

Национальная горная академия Украины
Пр. К. Маркса, 19, г. Днепропетровск, 49027, Украина

Украинский институт муниципального менеджмента и бизнеса
Пр. К. Маркса, 76, г. Днепропетровск, 49070, Украина

E-mail:volev@fregat.com

Статья поступила в редакцию 16 ноября 1998 года

Представлена М.И. Кадецем

Получены оценки сверху скорости убывания сингулярных чисел интегрального оператора Фредгольма через модуль непрерывности ядра оператора и его p-k-вариацию, а также неубывающих по модулю перестановок коэффициентов Фурье и Фурье–Уолша функций.

1. Введение

Вопрос о связи гладкости ядра интегрального оператора Фредгольма A: $L^2(a,b) \to L^2(a,b)$ со скоростью убывания его собственных и сингулярных чисел изучался в ряде работ (эта задача в простейшем случае решена в классическом мемуаре Фредгольма [1]; подробную библиографию см. в [2–4]). Гораздо меньше изучен соответствующий вопрос для операторов, действующих на пространствах функций многих переменных (см. [5, гл. XI, п. 9], где предложен эффективный метод решения таких задач в одномерном и многомерном случаях). Как отмечено в [6], из результатов о принадлежности операторов норм-идеалам следует ряд теорем о поведении коэффициентов Фурье и Фурье–Уолша функций; в частности, из теорем о ядерности операторов Гильберта–Шмидта вытекают признаки абсолютной сходимости рядов Фурье. Ниже устанавливается порядок убывания сингулярных чисел интегральных операторов Фредгольма (все связанные с этим понятием определения и свойства см. в [2, 5]) и коэффициентов Фурье. Основные результаты настоящей статьи анонсированы в [7] — одномерный случай и [8] — многомерный случай.

Хорошо известно понятие p-вариации, восходящее к Н. Винеру [9]. Многочисленные результаты, связывающие p-вариацию с поведением коэффициентов Фурье по тригонометрической системе получены в [10], там же приведена обширная библиография. В работах [11–13] введено и исследовано понятие "модуля изменения" функции, причем в статьях З. Чантурия [12, 14, 15] это понятие применено к исследованию равномерной и абсолютной сходимости рядов Фурье. Вводимое понятие "p-k-вариации" в одномерном случае и при $p = 1$ лишь незначительно отличается от "модуля изменения" $v(n, f)$ работы [12].

Для функций многих переменных рассматривается ряд различных определений вариации (Арцела, Пьерпонта, Харди, Витали, Фреше, Тоннели, множество вариаций Кронрода–Витушкина). Это обстоятельство связано с тем, что важные свойства функций ограниченной вариации одной переменной в многомерном случае "расщепляются" — классы функций с определенными по-разному ограниченными многомерными вариациями имеют различные свойства (представимость в виде разностей неубывающих функций, сходимость рядов Фурье, квадрируемость графика функции и т.д.; обзор вопросов, связанных с некоторыми из этих вариаций, см. в [16]). Полученные ниже результаты показывают, что при исследовании поведения сингулярных чисел в многомерном случае естественно использовать вариацию Пьерпонта (точнее — ее p-k-аналог).

В настоящей работе получены оценки сверху скорости убывания сингулярных чисел $s_k \equiv s_k(K)$ (упорядоченных так, чтобы они не возрастали) оператора $K : L^2(Q^m) \to L^2(Q^n)$, действующего по формуле

$$(Kf)(x) = \int\limits_{Q^m} K(x, y) f(y) dy,$$

где $x \in R^n$, $y \in R^m$, функция $K(x, y) \equiv K(x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_m)$ задана на прямоугольном параллелепипеде

$$Q^{n,m} \equiv Q^n \times Q^m$$
$$\equiv \{x \in R^n, y \in R^m \mid a_j \le x_j \le b_j, j = \overline{l, n}; c_i \le y_i \le d_i, i = \overline{l, m}\}.$$

Определение 1. *Пусть $\Delta(k^d)$ — разбиение d-мерного параллелепипеда*

$$Q^d \equiv \{t \in R^d \mid a_j \le t_j \le b_j, j = \overline{1, d}\}$$

на k^d непересекающихся параллелепипедов

$$Q_{k_1,...k_d} \equiv \{t \in R^d \mid t_j^{(k_1)} \le t \le t_j^{(k_1+1)}, j \in \overline{1, d}; k_j \in \overline{0, k-1}\},$$
$$a_j = t_j^{(0)} \le t_j^{(1)} \le ... \le t_j^{(k_1)} \le t_j^{(k_1+1)} \le ... \le t_j^{(k)} = b_j;$$

для функции $f\colon Q^d \to R$ положим

$$\underset{Q^d}{V_p}(f;\Delta(k^d)) = \sum_{k_1=0}^{n-1} \dots \sum_{k_d=0}^{n-1} \omega^p_{k_1\dots k_d},$$

где $\omega_{k_1\dots k_d}$ — колебание функции f на $\Omega_{k_1\dots k_d}, p \geq 0$; p-k-вариацией функции f на Q^d назовем величину

$$\underset{Q^d}{V_p}(f;k) = \sup_{\Delta(k^d)} \underset{Q^d}{V_p}(f;\Delta(k^d)),$$

где точная верхняя граница справа берется по всем разбиениям $\Delta(k^d)$ при фиксированном $k \in N$; для произвольного $k \in [1;+\infty)$ полагаем

$$\underset{Q^d}{V_p}(f;k) = \underset{Q^d}{V_p}(f;[k]).$$

Заметим, что из таким образом введенных вариаций [8] при $d = 1$, p $= 1$ получаются k-вариации [11–15] (по терминологии [12] — модуль изменения); при $d = 1$, $p \leq 0$ — p-k-вариации [7].

Определение 2. *p-вариацией функции $f\colon Q^d \to R$ называется величина*

$$\underset{Q^d}{V_p}(f) = \sup_{k\in N} \underset{Q^d}{V_p}(f;k).$$

Отметим, что при p $= 1$ это определение дает многомерную вариацию Пьерпонта [17], при $d = 1$ и произвольном p ≥ 0 — p-вариацию Винера; многочисленные результаты, посвященные функциям ограниченной p-вариации (при $d = 1$), см. в [10].

Определение 3. *Пусть функция $f(x,y)$ двух векторных аргументов задана на $Q^{n,m}$, $\underset{Q^m}{V_p^{(2)}}(f(x,.);k)$ — ее p-k-вариация по второй переменной при фиксированной первой; p-k-вариацией функции f по второй переменной называется величина*

$$\underset{Q^{n,m}}{V_p^{(2)}}(f;k) = \sup_{x\in Q^n} \underset{Q^m}{V_p^{(2)}}(f(x,.);k).$$

Модуль непрерывности функции $f\colon Q^{n,m} \to R$ двух векторных аргументов по второй переменной определим, как обычно, равенством

$$\omega(f;h) = \sup_{x\in Q^n} \sup_{y_1,y_2\in Q^m;||y_1-y_2||\leq h} \mid f(x,y_1) - f(x,y_2) \mid .$$

Если функция $f\colon R^n \times R^m \to R$ периодична с кубом периодов $Q^n \times Q^m$, то в определение модуля непрерывности вносится очевидное изменение (внутренний супремум берется по всем $y_1, y_2 \in R^m$, $\| y_1 - y_2 \| \leq h$).

2. Формулировка и обсуждение результатов

Основным результатом настоящей статьи является

Теорема 1. *Для любого* $r \in [0;2]$ *при* $k \to \infty$

$$s_k(K) = O\Big(\frac{1}{k}(\omega(K;\frac{\sqrt{m}}{k^{\frac{1}{m}}}))^{\frac{r}{2}}(\underset{Q^{n,m}}{V^{(2)}_{2-r}}(K;k^{\frac{1}{m}}))^{\frac{1}{2}}\Big). \tag{1}$$

Эта теорема содержит много известных и новых результатов; приведем, например, ее следствие для скалярного случая ($m = n = 1$) в несколько усиленном виде. Пусть ядро K имеет j-ю производную в среднем по второй переменной K_{0j} (определение производной в среднем см. в [2]); в этом случае вариацию функции двух переменных f: $[a;b] \times [a;b] \to R$ обозначаем $[a;b] \times [a;b]$.

Теорема 2. *Для любых* $j \in N$ *и* $r \in [0;2]$ *при* $k \to \infty$

$$s_k(K) = O\Big(\frac{1}{k^{j+1}}(\omega(K_{0j};\frac{1}{k}))^{\frac{r}{2}}(\underset{[a;b]}{V^{(2)}_{2-r}}(K_{0j};k))^{\frac{1}{2}}\Big). \tag{2}$$

Обозначим для 2π-периодической функции f неубывающую перестановку модулей ее коэффициентов Фурье через $\{c_k^*\}$; для функции f, заданной на $[0;1]$, обозначим неубывающую перестановку модулей ее коэффициентов Фурье–Уолша через $\{a_k^*\}$. Пусть $C^{(j)}(a,b)$ ($\tilde{C}(a,b)$ означает, как обычно, пространство функций, заданных на $[a,b]$ и имеющих j-ю непрерывную производную (пространство периодических с периодом $T = b - a$ функций с непрерывной j-й производной).

Теорема 3. *Для функции* $f \in \tilde{C}(0.2\pi)$

$$C_k^*(f) = O\Big(\frac{1}{k^{j+1}}(\omega(f^{(j)};\frac{1}{k}))^{\frac{r}{2}}(\underset{[a;b]}{V^{(2)}_{2-r}}(f^{(j)};k))^{\frac{1}{2}}\Big). \tag{3}$$

Теорема 4. *Для функции* $f \in C(a,b)$

$$a_k^*(f) = O\Big(\frac{1}{k^{j+1}}(\omega(f^{(j)};\frac{1}{k}))^{\frac{r}{2}}(\underset{[a;b]}{V^{(2)}_{2-r}}(f^{(j)};k))^{\frac{1}{2}}\Big). \tag{4}$$

Оценки (1)–(4) содержат ряд известных результатов. Так, из (2) вытекают некоторые теоремы из работ [18] (случай $j = 0, r = 2$); [5, 6] (случай $j = 0, r = 2$, $\omega(t) = t^{\alpha}$ — это подтверждение одной гипотезы из [2]); [1] (случай $j = 0, r = 2$

— упомянутый классический результат Фредгольма). Из (3) следуют признаки абсолютной сходимости рядов Фурье [19, 20] и сходимости рядов вида $\sum\limits_k \mid c_k(f) \mid^p$ [21] ($c_k(f)$ — коэффициенты Фурье функции f; см. также [22, 23]). Аналогичные результаты следуют из (4) для рядов Фурье–Уолша (см. монографию [24], в которой дано детальное изложение вопросов, связанных с поведением коэффициентов Фурье–Уолша). При $j = 0, r = 1$ из (3) следуют условия абсолютной сходимости рядов Фурье функций ограниченной (на периоде) вариации [22, 25, 26], а из (4) — аналогичные результаты для рядов Фурье–Уолша. В случае, когда $n > 1$ или $m > 1$, теорема 1 обобщает соответствующие многомерные результаты. Так, оценка (1) существенно усиливает результат Данфорда и Шварца [5] (для этого в (1) необходимо положить $r = 2$, $\omega(t) = t^\alpha$). Отметим, что даже случай $r = 2$, т.е. случай 0-k-вариации, является содержательным — множитель в правой части, порождаемый вариацией, имеет при этом порядок $k^{\frac{1}{2}}$, и, следовательно, множитель перед модулем непрерывности — порядок $k^{-\frac{1}{2}}$, (теорема 1) или $k^{-j-\frac{1}{2}}$, (теоремы 1–3).

Конечно, из (1)–(4) следуют и многочисленные, существенно новые результаты. Приведем модельный пример, который обсуждался с Ю.А. Брудным (Хайфа, Технион) и Р.М. Тригубом (Донецк, Донецкий государственный университет).

Пусть функция $g(x;\alpha,\beta)$ нечетна и периодична с периодом 2π, а на $(0, 2\pi]$ — задана равенством

$$g(x;\alpha,\beta) = x^\alpha sin(\frac{\pi^{1+\beta}}{x^\beta}).$$

Требуется найти показатели ρ, при которых сходится ряд $\sum\limits_k \mid c_k(g) \mid^\rho$. Оценка (3) и последующая минимизация по r позволяют заключить, что

$$c_k^*(g(x;\alpha,\beta)) = \mathrm{O}(\frac{(\ln k)^{\frac{1}{2}}}{k^\gamma}),$$

где

$$\gamma = \begin{cases} \frac{2\alpha+\beta+2}{2(1+\beta)}, \alpha \le 1+\beta; \\ 2 - \frac{\beta}{2\alpha}, \alpha > 1+\beta. \end{cases}$$

Ясно, что при $\rho > \frac{1}{\gamma}$ гарантируется сходимость ряда $\sum\limits_k \mid c_k(g) \mid^\rho$.

3. Доказательства

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Для сокращения объема доказательства приведем выкладки в случае $m = n = 1$. Пусть χ_q — индикаторная функция промежутка $[y_q, y_{q+1})$, $y_q = a + \frac{1}{k}(b-a)q$, $q = \overline{0, k-1}$; $y_{q+1} - y_q = \Delta y$ (в периодическом случае здесь и далее полагаем $a = 0, b = T$). Каждая из функций χ_q порождает линейный функционал

$$(f, \chi_q) = \int\limits_a^b f(y)\chi_q(y)dy$$

на $L^2(a,b)$. Пусть функция $f \in L^2(a,b)$ удовлетворяет линейным условиям

$$(f, \chi_q) = \int\limits_{y_q}^{y_{q+1}} f(y)dy = 0; q = \overline{0, k-1}.$$

Полагаем

$$K_k(x,y) = K(x, y_q), y_q \le y < y_{q+1}, q = \overline{0, k-1}.$$

Так как

$$\int\limits_a^b K_k(x,y)f(y)dy = \sum_{q=0}^{k-1} \int\limits_{y_q}^{y_{q+1}} K_k(x,y)f(y)dy = \sum_{q=0}^{k-1} K(x,y_q) \int\limits_{y_q}^{y_{q+1}} f(y)dy = 0,$$

то

$$(Kf)(x) = \int\limits_a^b (K(x,y) - K_k(x,y))f(y)dy.$$

Для невозрастающей последовательности сингулярных чисел $\{s_k\}$ оператора K имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k^2 =\| K \|,$$

откуда

$$s_k(K) \le k^{-\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2)^{\frac{1}{2}} = k^{-\frac{1}{2}} \| K \| .$$

Здесь, как обычно,

$$\| K \| = \Big(\int\limits_a^b \int\limits_a^b \mid (K(x,y) \mid^2 dxdy \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Используя минимаксное свойство сингулярных чисел (см., например, [5, гл. IX]), получаем последовательно

$$
\begin{aligned}
s_{2k}(K) &\le \min_{\psi_1\ldots\psi_{k-1}} \ \le \max_{\substack{\|f\| \\ (f,\chi_0)=\ldots=(f,\chi_{k-1})= \\ =(f,\psi_1)=\ldots=(f,\psi_{k-1})}} \| Kf \| \ \le \min_{\psi_q} \ \max_{\substack{\|f\| \\ (f,\chi_q)=(f,\psi_q)=0}} \| (K-K_k)f \| \\
&\le s_k(K-K_k) \le k^{-\frac{1}{2}} \| K-K_k \| \\
&= k^{-\frac{1}{2}}\Big(\int\limits_a^b\int\limits_a^b |\,(K(x,y)-K_k(x,y)\,|^2\,dxdy\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= k^{-\frac{1}{2}}\Big(\int\limits_a^b\Big(\sum_{q=0}^{k-1}\int\limits_{y_q}^{y_{q+1}} |\,(K(x,y)-K(x,y_q)\,|^2\,dy\Big)dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= k^{-\frac{1}{2}}\Big(\sum_{q=0}^{k-1}\int\limits_{y_q}^{y_{q+1}} dy\Big(\int\limits_a^b |\,(K(x,y)-K(x,y_q)\,|^2\,dx\Big)\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= k^{-\frac{1}{2}}\Big(\sum_{q=0}^{k-1}\int\limits_{y_q}^{y_{q+1}}\Big(\int\limits_a^b |\,(K(x,y)-K(x,y_q)\,|^r|\,K(x,y)-K(x,y_q)\,|^{2-r}\,dx\Big)dy\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\le k^{-\frac{1}{2}}\Big(\omega\Big(K;\tfrac{b-a}{k}\Big)\Big)^{\frac{r}{2}}\Big(\int\limits_a^b\Big(\sum_{q=0}^{k-1}\int\limits_{y_q}^{y_{q+1}} |\,K(x,y)-K(x,y_q)\,|^{2-r}\,dy\Big)dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= k^{-\frac{1}{2}}\Big(\omega\Big(K;\tfrac{b-a}{k}\Big)\Big)^{\frac{r}{2}}\Big(\int\limits_a^b\Big(\sum_{q=0}^{k-1}\int\limits_0^{\Delta y} |\,K(x,\sigma+y_q)-K(x,y_q)\,|^{2-r}\,d\sigma\Big)dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= k^{-\frac{1}{2}}\Big(\omega\Big(K;\tfrac{b-a}{k}\Big)\Big)^{\frac{r}{2}}\Big(\int\limits_a^b\Big(\int\limits_0^{\Delta y}\sum_{q=0}^{k-1} |\,K(x,\sigma+y_q)-K(x,y_q)\,|^{2-r}\,d\sigma\Big)dx\Big)^{\frac{1}{2}}. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

При использовании непрерывности функции $K(x,y)$ по второй переменной из теоремы о среднем получаем, что для каждого x существует такая точка $\sigma_q = \sigma_q(x)$, что

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_0^{\Delta y}\sum_{q=0}^{k-1} |\,K(x,\sigma+y_q)-K(x,y_q)\,|^{2-r}\,d\sigma \\
&= \frac{b-a}{k}\sum_{q=0}^{k-1} |\,K(x,\sigma_q+y_q)-K(x,y_q)\,|^{2-r} \\
&\le \frac{b-a}{k}\sum_{q=0}^{k-1}\Big(|\,K(x,y_{q+1})-K(x,\sigma_q+y_q)\,|^{2-r} \\
&+ |\,K(x,\sigma_q+y_q-K(x,y_q)\,|^{2-r} \le \tfrac{b-a}{k}\underset{[a,b]}{V_{2-r}}{}^{(2)}(K;2k).
\end{aligned}
$$

Используя (5), получаем

$$s_{2k} \le k^{-\frac{1}{2}}\Big(\omega\Big(K; \frac{b-a}{k}\Big)\Big)^{\frac{r}{2}}\Big(\int_a^b \frac{b-a}{k} \underset{[a,b]}{V}(K;2k)\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{b-a}{k}\Big(\omega\Big(K; \frac{b-a}{k}\Big)\Big)^{\frac{r}{2}}\Big(\underset{[a,b]}{V_{2-r}{}^{(2)}}(K;2k)\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда получаем, что

$$s_{2k+1} \le s_{2k} \le \frac{b-a}{k}\Big(\omega\Big(K; \frac{b-a}{k}\Big)\Big)^{\frac{r}{2}}\Big(\underset{[a,b]}{V_{2-r}{}^{(2)}}(K;2k+1)\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Из двух последних неравенств (с использованием полуаддитивности модуля непрерывности) следует утверждение теоремы.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Воспользуемся методом М.Г. Крейна ([27], см. также [2]). Согласно [2, гл. III], в наших обозначениях имеем

$$s_{2k+1}(K) \le s_{2k}(K) \le \frac{2(b-a)}{\pi(2k-1)} s_k(K_{01});$$

отсюда с помощью индукции следует, что

$$s_k(K) = \mathrm{O}\Big(\frac{1}{k^j} s_k(K_{0j})\Big).$$

Используя последнее неравенство и теорему 1, примененную к оператору с ядром K_{0j} , получаем утверждение теоремы 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. Следуя [6], положим $K(x,y) = f(x-y)$. Собственные числа $\lambda_k(K)$ оператора K совпадают (с точностью до множителя) с коэффициентами Фурье $c_k(f)$ функции f; в силу нормальности оператора Фурье невозрастающая перестановка модулей собственных чисел $\{|\lambda_{p_k}(K)|\}$ совпадает с последовательностью сингулярных чисел $\{s_k(K)\}$ этого оператора. Следовательно, $\{2\pi c_k^*(f)\} \equiv \{s_k(K)\}$; отсюда и из (2) следует (3). Этим доказательство завершается.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 4. Полагаем $K(x,y) = f(x \oplus y)$ (относительно операции "$\oplus$" см. [24]). Собственные числа $\lambda_k(K)$ оператора K совпадают с коэффициентами Фурье–Уолша $a_k(f)$ функции f; в силу нормальности оператора Фурье–Уолша невозрастающая перестановка модулей собственных чисел $\{|\lambda_{p_k}(K)|\}$ совпадает с последовательностью сингулярных чисел $\{s_k(K)\}$ этого оператора. Следовательно, $\{a_k^*(f)\} = \{s_k(K)\}$; отсюда и из (2) следует (4). Доказательство завершено.

Список литературы

[1] *I. Fredholm*, Sur une classe d'equations fonctionnelles. — Acta Math. (1903), v. 27, p. 365–390.

[2] *И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн*, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Наука, Москва (1965), 448 с.

[3] *М.Ш. Бирман, М.З. Соломяк*, Оценки сингулярных чисел интегральных операторов. — Успехи мат. наук (1977), т. 32, № 1, с. 17–84.

[4] *Б.Д. Котляр*, О сингулярных числах интегральных операторов. — Диф. ур. (1978), т. 14, № 8, с. 1473–1477.

[5] *Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц*, Линейные операторы. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Мир, Москва (1966), 1066 с.

[6] *С.Л. Блюмин, Б.Д. Котляр*, Операторы Гильберта–Шмидта и абсолютная сходимость рядов Фурье. — Изв. АН СССР. Сер. мат. (1970), т. 34, № 1, с. 209–217.

[7] *Б.Д. Котляр*, О сингулярных числах интегральных операторов и коэффициентах Фурье. — Докл. НАН Украины (1994), № 4, с. 20–22.

[8] *Ю.Б. Олевська*, Про сингулярні числа інтегральних операторів. — У кн.: Всеукр. наукова конф. "Розробка та застосування мат. методів в науково-техн. дослідженнях". Тези доп. Част. I. Львів (1995), с. 82–83.

[9] *N. Wiener*, The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients. — Mass. J. Math. (1924), No. 5, p. 72–94.

[10] *Б.И. Голубов*, О функциях ограниченной p-вариации. — Изв. АН СССР. Сер. мат. (1968), т. 32, № 4, с. 837–858.

[11] *R. Lagrange*, Sur les oscillations d'orde superier d'une fonction numerique. — Ann. Sci. École Norm. Sup. (1965), v. 82, No. 2, p. 101–130.

[12] *З.А. Чантурия*, Модуль изменения функции и его применения в теории рядов Фурье. — Докл. АН СССР (1974), т. 214, № 1, с. 63–66.

[13] *Е.А. Севастьянов*, Кусочно монотонная аппроксимация и Ф-вариации. — Anal. Math. (1975), v. 1, № 2, p. 141–164.

[14] *З.А. Чантурия*, Об абсолютной сходимости рядов Фурье. — Мат. заметки (1975), т. 18, № 2, с. 185–193.

[15] *З.А. Чантурия*, Об равномерной сходимости рядов Фурье. — Мат. сб. (1976), т. 100, № 4, с. 534–554.

[16] *А.Г. Витушкин*, О многомерных вариациях. Гостехиздат, Москва (1955), 220 с.

[17] *J. Pierpont*, Lectures of the theory of function of real variables. V. 1. New York (1959), 350 p.

[18] *Б.Д. Котляр*, О сингулярных числах интегральных операторов. — Докл. АН СССР (1976), т. 229, № 4, с. 794–796.

[19] *С.Н. Бернштейн*, Об абсолютной сходимости тригонометрических рядов. — Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 2 (1914), т. 14, с. 139–144.

[20] *S.N. Bernstein*, Sur la convergence des séries trigonometrique. — Comtes Rendus Acad. Sci. (1934), v. 199, p. 397–400.

[21] *O. Szász*, Uber den Konvergenzexponent der Fourierschen Reien. — Münch. Sitzungber. (1922), S. 135–150.

[22] *А. Зигмунд*, Тригонометрические ряды. Т. I. Мир, Москва (1965), 616 с.

[23] *Н.К. Бари*, Тригонометрические ряды. Физматгиз, Москва (1961), 936 с.

[24] *Б.И. Голубов, А.В. Ефимов, В.А. Скворцов*, Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. Наука, Москва (1987), 344 с.

[25] *A. Zygmund*, Sur la convergence absolute des séries de Fourier. — J. London Math. Soc. (1928), No. 3, p. 194–196.

[26] *R. Salem*, On the theorem of Zygmund. — Duke Math. J. (1943), No. 10, p. 23–31.

[27] *М.Г. Крейн*, .О характеристических числах дифференцируемых симметрических ядер — Мат. сб. (1937), т. 2, No. 4, с. 725–732.

Singular values of Fredholm integral operators and p-k-variation

B.D. Kotlyar, Yu.B. Olevskaya

There have been find upper bound of the singular values of Fredholm integral operator velocity of decrease which depends from continuous modul and p-k-variation of cernel of operator, and permutation in nondecreasing order modul of Fourier and Fourier–Walsh coefficients of function.

Сингулярні числа інтегральних операторів Фредгольма та p-k-варіація

Б.Д. Котляр, Ю.Б. Олевська

Одержано оцінки зверху швидкості спадання сингулярних чисел інтегральних операторів Фредгольма через модуль неперервності ядра оператора та його p-k-варіацію, а також неспадаючих за модулем перестановок коефіцієнтів Фур'є та Фур'є–Уолша функцій.