Математическая физика, анализ, геометрия
2000, т. 7, № 4, с. 415–441

О кольцах инвариантов групп, порожденных отражениями относительно скрещивающихся прямых

А.И. Криворучко

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
Ул. Ялтинская, 4, г. Симферополь, 95007, Украина

Статья поступила в редакцию 10 ноября 1998 года
Представлена А.Д. Милкой

Найдены базисные полиномиальные инварианты группы преобразований H аффинного пространства V в случае, когда H удовлетворяет следующим условиям:

a) H действует на нецилиндрической алгебраической гиперповерхности $F \subset V$;

b) H порождена аффинными отражениями относительно прямых, из которых хотя бы две скрещиваются;

c) для каждой гиперплоскости $P \subset V$ существует не более одной прямой, отражение относительно которой в направлении P принадлежит H.

Строение нецилиндрической алгебраической гиперповерхности F с бесконечной группой G, порожденной (аффинными) отражениями относительно гиперплоскостей в вещественном n-мерном аффинном пространстве V, изучается в целом ряде работ В.Ф. Игнатенко (см., например, [1–3]). В этих работах доказывается, что линейная k-мерная оболочка бесконечной G-орбиты направлений симметрии поверхности F пересекает эту поверхность либо по $(k-1)$-мерным квадрикам, либо по $(k-1)$-мерным тетраэдральным поверхностям (вещественным или мнимым), а размерность пересечения любых двух различных линейных оболочек таких орбит не больше 1.

В [4] показано, что алгебраическая гиперповерхность с бесконечным множеством осей (аффинной) симметрии, пересекающихся в общей точке, имеет бесконечное множество гиперплоскостей симметрии. Поэтому представляет интерес задача изучения строения нецилиндрической гиперповерхности F, на которой действует нецентроаффинная бесконечная группа H, порожденная отражениями относительно прямых. В статье эта задача решается в предположении, что хотя бы две из осей симметрии поверхности F скрещиваются и для каждой гиперплоскости P в пространстве V существует не более одной прямой, отражение относительно которой в направлении P принадлежит H.

Пусть $\mathfrak{H}_0$ — класс всех групп H преобразований пространства V, удовлетворяющих следующим условиям:

а) H действует на некоторой нецилиндрической алгебраической гиперповерхности;

б) H порождена аффинными отражениями относительно прямых, из которых хотя бы две скрещиваются;

в) для каждой гиперплоскости P в пространстве V существует не более одной прямой, отражение относительно которой в направлении P принадлежит H.

В пунктах 1^o–3^o строятся некоторые группы, принадлежащие $\mathfrak{H}_0$, указываются полные системы данных этих групп и вычисляются их кольца инвариантов.

В пунктах 4^o–5^o доказывается, что замыкание в топологии Зарисского всякой группы, принадлежащей $\mathfrak{H}_0$, также принадлежит $\mathfrak{H}_0$ и, с точностью до аффинной эквивалентности, совпадает с одной из групп, построенных в пп. 1^o–3^o.

1^o. Отражениями будем называть отражения относительно прямых; отражение относительно прямой L в направлении гиперплоскости P, определенной с точностью до параллельного переноса, обозначаем через $(L,\, P)$. Для произвольного множества A аффинных преобразований $\langle A\,\rangle$ обозначает группу, порожденную A; $\mathrm{cl}\, A$ — замыкание A в топологии Зарисского; $[B,\, C\,]$ — коммутатор элементов B и C алгебры Ли группы $\mathrm{cl}\,\langle A\,\rangle$; id — единичное преобразование некоторого множества (если это множество не указано, то оно определяется из контекста). $\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел.

Если в V заданы координаты $y_1,\dots,y_n$, то $\{\, y'_i = f_i(y_1,\dots,\, y_n) : i \geq 1\,\}$ обозначает отображение $f : V \to V$, координатное представление которого указано в фигурных скобках; при этом если некоторое y'_i не указывается, то считаем $y'_i = y_i$.

Далее V будем рассматривать как гиперплоскость $x_0 = 1$ координатного пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ с аффинными координатами, заданными в V, и дополнительной координатой x_0. Это позволяет аффинные преобразования и элементы алгебры Ли группы аффинных преобразований пространства V отождествлять с линейными операторами в $\mathbb{R}^{n+1}$ (при этом $x'_0 = x_0$ для координатных представлений аффинных преобразований, и $x'_0 = 0$ для элементов алгебры Ли группы аффинных преобразований).

Координатные представления линейных операторов в $\mathbb{R}^{n+1}$ (чтобы отличать их от преобразований пространства V) будем записывать в круглых скобках, причем в этом случае если для некоторой координаты не указано ее значение, то оно считается равным 0.

Предполагается, что "переменные" индексы принимают все допустимые соответствующими ограничениями значения; индексы i, j, k, l принимают лишь целые неотрицательные значения.

Для некоторых целых неотрицательных p, m, n_j $(0 < j \le m)$, удовлетворяющих равенству $p + \sum_j n_j = n$, зафиксируем в V репер

$$(O;\ e_i,\, e_{jk}\ :\ 0 < i \le p;\ 0 < j \le m;\ 0 < k \le n_j) \tag{1.1}$$

с соответствующими координатными функциями

$$x_i = e_i^*\,, \quad x_{jk} = e_{jk}^*\,. \tag{1.2}$$

Пусть K обозначает кольцо всех многочленов над $\mathbb{R}$ от координат x_j, x_{jk}.

В этом пункте будем предполагать, что $m = 0$.

Положим $\alpha_i^{(t)} = (L_i^t, P_i^t)$, где $t \in \mathbb{R}$, P_1^t — плоскость $x_2 - tx_3 = 0$, P_2^t — плоскость $x_2 - t(x_3 + x_4) = 0$, P_3^t — плоскость $x_3 + x_4 = 0$, L_i^t — прямая, параллельная вектору d_i^t и проходящая через точку с радиус-вектором c_i^t, причем

$$\begin{array}{lll} c_1^t = -\frac{1}{3}t^3 e_1 + t e_2\,, & c_2^t = 2t(e_3 - e_4)\,, & c_3^t = t e_2\,, \\ d_1^t = t e_1 + e_2\,, & d_2^t = e_2\,, & d_3^t = 3t e_1 + e_3 + 2e_4\,. \end{array}$$

Пусть $\varphi_i^{2t} = \alpha_i^{(t)} \alpha_i^{(0)}$. Тогда $(\varphi_i^t : t \in \mathbb{R})$ — однопараметрическая группа аффинных преобразований с производящим оператором $B_i = (\frac{d}{dt}\varphi_i^t)|_{t=0}$. При этом $B_3 = [B_2, B_1]$, $\quad [B_3, B_j] = 0 \quad (j \le 2)$.

Положим $M_i = \{\alpha_i^{(t)} : t \in \mathbb{R}\}$, $H_1 = \langle M_1 \rangle$, $H_2 = \langle M_1 \cup M_2 \rangle$, $H_3 = \langle M_1 \cup \{\alpha_3^{(0)}\} \rangle$, K_i — кольцо инвариантов группы H_i.

Для любого кольца S через $S\langle x, \ldots, z \rangle$ обозначается кольцо всех четных многочленов над S, т.е. многочленов над S от всевозможных попарных произведений (в том числе и квадратов) переменных $x, \ldots, z$.

Под действием на произвольной группе некоторой ее подгруппы будем понимать действие сопряжениями.

Теорема 1.1. *1) H_1 совпадает с $\mathrm{cl}\,\langle\{\alpha_1^{(0)},\ \alpha_1^{(1)}\}\rangle$ и распадается на компоненты $\{\varphi_1^t : t \in \mathbb{R}\}$ и M_1; M_1 – множество всех принадлежащих H_1 отражений и группа $\{\varphi_1^t : t \in \mathbb{R}\}$ действует на M_1 транзитивно.*

2) $K_1 = \mathbb{R}[x_2 - \frac{1}{2}x_3^2]\left\langle x_1 - x_2 x_3 + \frac{1}{3}x_3^3, \quad x_4, \ldots, x_n \right\rangle$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. См. [4].

Пусть теперь $n \geq 4$, $G_0 = \{\varphi_1^r \varphi_2^s \varphi_3^t : r, s, t \in \mathbb{R}\}$.

С использованием координатных представлений определенных выше преобразованй непосредственно проверяется, что G_0 — не содержащая отражений связная алгебраическая группа, каждый элемент которой представим в виде произведения $\varphi_1^r \varphi_2^s \varphi_3^t$ единственным образом, $G_0 \cap G_0 \alpha_1^{(0)} = \emptyset$,

$$\varphi_1^a \varphi_2^b \varphi_3^c \varphi_1^r \varphi_2^s \varphi_3^t = \varphi_1^{a+r} \varphi_2^{b+s} \varphi_3^{c+t-br}, \quad \alpha_1^{(0)} \varphi_1^r \varphi_2^s \varphi_3^t = \varphi_1^{-r} \varphi_2^{-s} \varphi_3^t \alpha_1^{(0)}, \tag{1.3}$$

$\varphi_1^r \varphi_2^s \varphi_3^t \alpha_1^{(0)}$ — отражение тогда и только тогда, когда $2t = -rs$, и G_0 действует транзитивно на множестве всех отражений, принадлежащих $G_0 \alpha_1^{(0)}$.

Теорема 1.2. *1)* $H_2 = \mathrm{cl}\,\langle \{\alpha_1^{(0)},\ \alpha_1^{(1)},\ \alpha_2^{(1)}\}\rangle = G_0 \cup G_0 \alpha_1^{(0)}$.
2) $K_2 = \mathbb{R}\langle x_1 - x_2(x_3 + x_4) + (\frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{6}x_4)(x_3 + x_4)^2, \quad x_5, \ldots, x_n\rangle$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $G_2 = G_0 \cup G_0 \alpha_1^{(0)}$. Тогда G_2 — замкнутая группа, $\langle M_1 \cup M_2 \rangle \subset G_2$. Из (1.3) следует, что $\varphi_3^r \in \langle M_1 \cup M_2 \rangle$ при всех $r \in \mathbb{R}$. Отсюда получаем $\langle M_1 \cup M_2 \rangle = G_2$. Но $G_2 \supset \mathrm{cl}\,\langle \{\alpha_1^{(0)}, \alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}\}\rangle$, а $\langle \{\alpha_1^{(0)},\ \alpha_j^{(1)}\}\rangle$ содержит бесконечное подмножество множества M_j, $j \leq 2$; относительно топологии Зарисского M_j гомеоморфно $\mathbb{R}$, и поэтому всякое бесконечное подмножество M_j плотно в M_j. Следовательно, $\langle M_1 \cup M_2 \rangle \subset \mathrm{cl}\,\langle \{\alpha_1^{(0)}, \alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}\}\rangle$; таким образом, $H_2 = G_2 = \mathrm{cl}\,\langle \{\alpha_1^{(0)}, \alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}\}\rangle$.

Пусть $f \in K_2$. По теореме 1.1,

$$f = g(v, w, x_4, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}[v]\,\langle w, x_4, \ldots, x_n \rangle\,,$$

где $v = x_2 - \frac{1}{2}x_3^2$, $w = x_1 - x_2 x_3 + \frac{1}{3}x_3^3$. Теперь из инвариантности f относительно φ_3^t следует, что $f = g(v, w, x_4, \ldots, x_n) = g(v', w', x_4, \ldots, x_n)$, где $v' = v + t$, $w' = w + t x_4$. Полагая $t = -v$, получаем $f = g(0, w - v x_4, x_4, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}\,\langle w - v x_4, x_4, \ldots, x_n\rangle$. Затем аналогичным образом используя инвариантность многочлена f относительно φ_2^t и полагая $t = -\frac{1}{2}x_4$, получим

$$f = g(0, u, 0, x_5, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}\,\langle u, x_5, \ldots, x_n \rangle\,,$$

где $u = x_1 - x_2(x_3 + x_4) + (\frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{6}x_4)(x_3 + x_4)^2$. Непосредственно проверяется, что всякий многочлен, принадлежащий кольцу $\mathbb{R}\,\langle u, x_5, \ldots, x_n\rangle$, инвариантен относительно $\alpha_1^{(0)}$, $\alpha_1^{(1)}$ и $\alpha_2^{(1)}$. Следовательно, $K_2 = \mathbb{R}\,\langle u, x_5, \ldots, x_n\rangle$.

2^o. Зафиксируем репер (1.1), для которого $p > m \geq 1$ и $n_j = 2$, $j \leq m$. Для каждого $\tau = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m$ пусть $\alpha_4^\tau = (L_4^\tau,\ P_4^\tau)$, где прямая L_4^τ параллельна $e_p + \sum\limits_{i \leq m} t_i e_{i1}$ и проходит через точку с радиус-вектором $\sum\limits_{i \leq m} t_i e_{i2}$, а плоскость P_4^τ задается уравнением $x_p - \sum\limits_{i \leq m} t_i x_i = 0$; $\varphi_4^{2\tau} = \alpha_4^\tau \alpha_4^{(0)}$; $B_4^\tau = \sum\limits_{i \leq m} t_i B_{4i}$, где $B_{4i} = (x'_p = x_i,\ x'_{i1} = x_p,\ x'_{i2} = x_0)$. Непосредственно проверяется, что $\varphi_4^\tau = \exp B_4^\tau$, $\alpha_4^\tau = \varphi_4^\tau \alpha_4^{(0)} \varphi_4^{-\tau} = \varphi_4^{2\tau} \alpha_4^{(0)}$.

Положим $\varepsilon_i = (\delta(i,1), \dots, \delta(i,m))$, где $\delta(x,y)$ (при произвольных x и y) — символ Кронекера; $\alpha_{4i} = \alpha_4^{\varepsilon_i}$, $M_{4m} = \{\alpha_4^\tau : \tau \in \mathbb{R}^m\}$, $H_{4m} = \langle M_{4m} \rangle$; K_{4m} — кольцо инвариантов группы H_{4m}.

2.1. Пусть $m = 1$.

Каждой линейной форме $\omega = \sum\limits_{i=1}^{p-1} A_i x_i$ сопоставим множество $M[\omega]$, состоящее из отражений $\gamma_\omega^{(t)} = (\Lambda_\omega^t, \Pi_\omega^t)$, где $t \in \mathbb{R}$, прямая Λ_ω^t параллельна вектору $e_{12} + te_{11}$ и проходит через точку с радиус-вектором te_p, а плоскость Π_ω^t задается уравнением $x_{12} + t\omega = 0$. Отметим, что для любых τ и t прямые L_4^τ и Λ_ω^t пересекаются между собой, $\Lambda_\omega^t \parallel P_4^\tau$, $L_4^\tau \parallel \Pi_\omega^t$; это эквивалентно тому, что $\alpha_4^\tau \neq \gamma_\omega^{(t)}$ и $\alpha_4^\tau \gamma_\omega^{(t)} = \gamma_\omega^{(t)} \alpha_4^\tau$.

$\gamma_\omega^{(0)}$ не зависит от ω и обозначается через γ_0.

Положим $H_4^1 = \langle M_{41} \cup \{\gamma_0\} \rangle$, $H_4[\omega] = \langle M_{41} \cup M[\omega] \rangle$, K_4^1 и $K_4[\omega]$ — кольца инвариантов групп H_4^1 и $H_4[\omega]$ соответственно; $v_1 = x_p - x_1 x_{12}$, $v_2 = x_{11} - x_p x_{12} + \frac{1}{2} x_{12}^2 x_1$.

Теорема 2.1. *1) H_{41} совпадает с $\mathrm{cl}\,\langle \{\alpha_4^{(0)}, \alpha_{41}\} \rangle$ и распадается на компоненты $\{\varphi_4^{(t)} : t \in \mathbb{R}\} = M_{41} \alpha_4^{(0)}$ и M_{41}; M_{41} — множество всех принадлежащих H_{41} отражений и $M_{41} \alpha_4^{(0)}$ действует на M_{41} транзитивно.*

2) $K_{41} = \mathbb{R}[v_1]\,\langle v_2, x_1, \dots, x_{p-1} \rangle$

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\{\varphi_4^{2(j)} : j \geq 1\}$ — лежащее в H_{41} бесконечное подмножество однопараметрической группы $\{\varphi_4^{(t)} : t \in \mathbb{R}\}$, гомеоморфной $\mathbb{R}$ относительно топологии Зарисского. Следовательно, эта однопараметрическая группа совпадает с $\mathrm{cl}\,\{\varphi^{2(j)} : j \geq 1\}$ и поэтому лежит в $\mathrm{cl}\,\langle \{\alpha_4^{(0)}, \alpha_{41}\} \rangle$.

Пусть $f \in K_{41}$. Из инвариантности f относительно $\alpha_4^{(0)}$ следует, что $f \in \mathbb{R}[x_p]\,\langle x_{11}, x_{12}, x_1, \dots, x_{p-1} \rangle$; используя инвариантность f относительно $\varphi_4^{(t)}$ и затем полагая $t = -x_{12}$, теперь получаем $f \in \mathbb{R}[v_1]\,\langle v_2, x_1, \dots, x_{p-1} \rangle$.

Теорема 2.2. *1) H_4^1 совпадает с $\mathrm{cl}\,\langle \{\alpha_4^{(0)},\ \alpha_{41},\ \gamma_0\} \rangle$ и распадается на компоненты $\{\varphi_4^{(t)} : t \in \mathbb{R}\}$, M_{41}, $\{\varphi_4^{(t)} \gamma_0 : t \in \mathbb{R}\}$ и $M_{41} \gamma_0$. Множество всех принадлежащих H_4^1 отражений распадается на две H_4^1-орбиты, одна из которых — M_{41}, а другая — $\{\gamma_0\}$.*

2) $K_4^1 = \mathbb{R}[v_1^2]\,\langle v_2, x_1, \dots, x_{p-1} \rangle$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in K_4^1$. Тогда $f \in K_{41}$, т.е.

$$f = g(v_1,\, v_2,\, x_1, \dots,\, x_{p-1}) \in \mathbb{R}[v_1]\,\langle v_2,\, x_1, \dots,\, x_{p-1}\rangle\,.$$

Из инвариантности f относительно γ_0 и $\alpha_4^{(0)}$ следует, что

$$g(v_1, v_2, x_1, \dots, x_{p-1}) = g(-v_1, -v_2, -x_1, \dots, -x_{p-1}) = g(-v_1, v_2, x_1, \dots, x_{p-1}).$$

Отсюда $f \in \mathbb{R}\langle v_1\rangle\,\langle v_2, x_1, \dots, x_{p-1}\rangle = \mathbb{R}[v_1^2]\,\langle v_2, x_1, \dots, x_{p-1}\rangle$.

Остальные утверждения теоремы 2.2 следуют из теоремы 2.1 и координатных представлений $\alpha_4^{(t)}$ и γ_0.

Положим $\psi_\omega^{2t} = \gamma_\omega^{(t)}\gamma_0$, $G_\omega = \{\varphi_4^{(s)}\psi_\omega^t : s, t \in \mathbb{R}\}$. Непосредственно проверяется, что $(\psi_\omega^t : t \in \mathbb{R})$ — однопараметрическая группа, элементы которой коммутируют с элементами группы H_{41}.

Теорема 2.3. *1) Для любого вещественного $s \neq 0$ группа $H_4[\omega]$ совпадает с* $\mathrm{cl}\,\langle\{\alpha_4^{(0)},\, \alpha_{41},\, \gamma_0, \gamma_\omega^{(s)}\}\rangle$ *и распадается на компоненты G_ω, $G_\omega\alpha_4^{(0)}$, $G_\omega\gamma_0$, $G_\omega\alpha_4^{(0)}\gamma_0$. Множество всех принадлежащих $H_4[\omega]$ отражений распадается на две $H_4[\omega]$-орбиты, одна из которых — M_{41}, а другая — $M[\omega]$.*

2) $K_4[\omega] = \mathbb{R}\big\langle \omega(x_p^2 - 2x_1x_{11}) - 2v_2, \quad x_1, \dots, x_{p-1}\big\rangle$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in K_4[\omega]$. По теореме 2.1,

$$f = g(v_1,\, v_2,\, x_1, \dots,\, x_{p-1}) \in \mathbb{R}[v_1]\,\langle v_2,\, x_1, \dots,\, x_{p-1}\rangle\ .$$

Из инвариантности f относительно ψ_ω^t получаем

$$f = g(v_1 + t(1+\omega x_1),\ v_2 + t\omega(v_1 + \tfrac{1}{2}t(1+\omega x_1)),\ x_1, \dots,\, x_{p-1}).$$

Рассматривая это равенство как равенство в поле частных кольца $\mathbb{R}[t, x_1, \dots, x_p,\, x_{11}, x_{12}]$ и полагая $t = -v_1(1+\omega x_1)^{-1}$, получим

$$f = g(0,\, v_2 - \frac{\omega v_1^2}{2(1+\omega x_1)}\,,\, x_1, \dots, x_{p-1}). \tag{2.1}$$

Если $\omega = 0$, то из (2.1) следует, что $f \in \mathbb{R}\langle v_2, x_1, \dots, x_{p-1}\rangle = K_4[0]$.

Пусть $\omega \neq 0$. Тогда из (2.1), учитывая взаимную простоту многочленов $1 + \omega x_1$ и ω, получаем $f \in \mathbb{R}\big\langle \omega(x_p^2 - 2x_1x_{11}) - 2v_2, \quad x_1, \dots, x_{p-1}\big\rangle$. Остальные утверждения теоремы 2.3 доказываются так же, как и соответствующие утверждения теоремы 1.2. При этом используется то, что $\{\psi^{2sj} : j \geq 1\}$ — бесконечное подмножество группы $\{\psi^t : t \in \mathbb{R}\}$, которая гомеоморфна $\mathbb{R}$ относительно топологии Зарисского.

Теорема 2.4. *Пусть* $\omega = \sum_{i=1}^{p-1} A_i x_i$. *Если* $\omega \nparallel x_1$, *то* $H_4[\omega]$ *аффинно эквивалентна* $H_4[x_2]$. *Если же* $\omega \parallel x_1$, *то* $H_4[\omega]$ *аффинно эквивалентна* $H_4[(\operatorname{sgn} A_1)x_1]$. *При этом группы* $H_4[0]$, $H_4[-x_1]$, $H_4[x_1]$, $H_4[x_2]$ *попарно аффинно неэквивалентны.*

Доказательство. Если $\omega \nparallel x_1$, то можно считать, что $A_2 \neq 0$, т.к. перестановка координат $x_2, \dots, x_{p-1}$ не изменяет координатного представления множества M_{41} и координат векторов $e_{12} + te_{11}$ и te_p. Но если $A_2 \neq 0$, то после замены координат $y_2 = \sum_{i=1}^{p-1} A_i x_i$ (остальные координаты не изменяются), также не меняющей координатного представления M_{41} и координат векторов $e_{12} + te_{11}$ и te_p, можем считать, что Π_ω^t задается уравнением $x_{12} + tx_2 = 0$ (т.е., что $\omega = x_2$).

Пусть теперь $\omega = Ax_1$, $A \neq 0$. После замены $x_{1i} = |A|^{\frac{1}{2}} y_{1i}$ $(i \leq 2)$, $x_1 = |A|^{-\frac{1}{2}} y_1$ (остальные координаты не изменяются) координатное представление M_{41} и уравнения прямых Λ_ω^t не изменяются (хотя и изменяются значения параметра t, соответствующие преобразованиям из M_{41}) и можно считать, что $\omega = (\operatorname{sgn} A)x_1$.

Только при $\omega = 0$ группа $H_4[\omega]$ содержит отражения в направлении параллельных гиперплоскостей, и поэтому если $\omega \neq 0$, то $H_4[\omega]$ аффинно неэквивалентна $H_4[0]$.

Для $\omega \neq 0$ положим $d = \dim \bigcap_t (P_t \cap \Pi_\omega^t)$. Если $\omega \nparallel x_1$, то $d = n-4$; если же $\omega \parallel x_1$, то $d = n-3$. Поэтому, если $\omega \parallel x_1$, то $H_4[\omega]$ аффинно неэквивалентна $H_4[x_2]$.

Аффинная неэквивлентность групп $H_4[-x_1]$ и $H_4[x_1]$ следует из того, что если $\omega = x_1$, то G_ω-орбита каждой точки пространства V является двумерным гиперболическим параболоидом. Если же $\omega = -x_1$, то имеются точки (например, точка с радиус-вектором e_1), G_ω-орбитами которых являются параболы.

2.2. Пусть теперь $m > 1$, $\mathfrak{T}_m$ — множество всех вещественных кососимметричных матриц порядка m. Для каждой матрицы $T \in \mathfrak{T}_m$ обозначим через $\hat{T}$ линейный оператор $((x'_{11}, \dots, x'_{m1}) = (x_1, \dots, x_m)T)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ (при этом значения координат, не указанные в координатном представлении оператора, как уже отмечалось в п. 1^o, считаем равными 0).

Пусть $\tau_i = (t_{i1}, \dots, t_{im}) \in \mathbb{R}^m$, $\quad T_i \in \mathfrak{T}_m$. Непосредственно проверяются следующие соотношения:

$$[B_4^{\tau_1},\, B_4^{\tau_2}] = \left(\begin{pmatrix} t_{21} \\ \vdots \\ t_{2m} \end{pmatrix} (t_{11} \ \dots \ t_{1m}) - \begin{pmatrix} t_{11} \\ \vdots \\ t_{1m} \end{pmatrix} (t_{21} \ \dots \ t_{2m})\right)^{\widehat{}}\,, \tag{2.2}$$

$$\exp \hat{T}_1 \exp \hat{T}_2 = \exp(\hat{T}_1 + \hat{T}_2)\,, \tag{2.3}$$

$$\varphi_4^{\tau_1} \varphi_4^{\tau_2} = \varphi_4^{\tau_1+\tau_2} \exp(\tfrac{1}{2}[B_4^{\tau_1},\, B_4^{\tau_2}]), \quad \varphi_4^{\tau_1} \alpha_4^{(0)} = \alpha_4^{(0)} \varphi_4^{-\tau_1}\,. \tag{2.4}$$

Положим $G_{4m} = \{\varphi_4^{\tau} \exp \hat{T} \,:\, \tau \in \mathbb{R}^m,\ T \in \mathfrak{T}_m\}$.

Из (2.2)–(2.4) следует, что G_{4m} — связная замкнутая группа, не содержащая отражений, и для каждого элемента этой группы представление его в виде $\varphi_4^{\tau} \exp \hat{T}$, где $\tau \in \mathbb{R}^m,\ T \in \mathfrak{T}_m$, единственно; $(\varphi_4^{\tau} \exp \hat{T})\alpha_4^{(0)}$ – отражение тогда и только тогда, когда $T = 0$.

Теорема 2.5. *Пусть $m > 1$. Тогда*

1) H_{4m} совпадает с $\mathrm{cl}\,\langle\{\alpha_4^{(0)},\, \alpha_{41}, \dots,\, \alpha_{4m}\}\rangle$ и распадается на компоненты G_{4m} и $G_{4m}\alpha_4^{(0)}$; M_{4m} содержится в $G_{4m}\alpha_4^{(0)}$ и является множеством всех принадлежащих H_{4m} отражений; G_{4m} действует на M_{4m} транзитивно;

2) $K_{4m} = \mathbb{R}[\, x_p - \sum\limits_{j \le m} x_j x_{j2}, \quad x_p^2 - 2 \sum\limits_{j \le m} x_j x_{j1}\,] \langle x_1, \dots x_{p-1} \rangle$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f = f(x_p, x_{11}, \dots, x_{m1}, x_{12}, \dots, x_{m2}, x_1, \dots, x_{p-1})$ принадлежит K_{4m}, $D_i = [B_4^{\varepsilon_1}, B_4^{\varepsilon_i}]$. Согласно (2.2), $D_i = (x'_{11} = x_i,\ x'_{1i} = -x_i)$ для всех $i \ge 2$. Из инвариантности f относительно $\exp \sum\limits_{i \ge 2} t_i D_i$ следует, что

$$f = f(\, x_p,\ x_{11} + \sum_{i \ge 2} t_i x_i,\ x_{21} - t_2 x_1, \dots,\ x_{m1} - t_m x_1,\ x_{12}, \dots,\ x_{m2},\ x_1, \dots,\ x_{p-1}\,).$$

Как и при доказательстве теоремы 2.3, рассматривая последнее равенство как равенство в поле частных кольца многочленов $K[t_2, \dots, t_m\,]$ и полагая $t_i = x_{i1} x_1^{-1}$, имеем:

$$\begin{aligned} f &= f(\, x_p,\ x_{11} + x_1^{-1} \sum_{i \ge 2} x_i x_{i1},\ 0, \dots,\ 0,\ x_{12}, \dots,\ x_{m2},\ x_1, \dots,\ x_{p-1}) \\ &= g(x_p, u, x_{12}, \dots, x_{m2}, x_1, \dots, x_{p-1}) \in \mathbb{R}[\, x_p, u, x_{12}, \dots, x_{m2}, x_1, \dots, x_{p-1}\,], \end{aligned}$$

где $u = \sum\limits_{i \ge 1} x_i x_{i1}$. Теперь из инвариантности f относительно φ_4^{τ}, где $\tau = (t_1, \dots, t_m)$, следует, что $f = g(x'_p, u', x'_{12}, \dots, x'_{m2},\ x_1, \dots, x_{p-1})$, где $x'_p = x_p +$

$\sum\limits_{i\geq 1} t_i x_i$, $u' = u - \frac{1}{2}x_p^2 + \frac{1}{2}(x_p')^2$, $x_{i2}' = x_{i2} + t_i$. Полагая $t_i = -x_{i2}$ и обозначая $x_p - \sum\limits_{i\geq 1} x_{i2}x_i$ через v, а $\frac{1}{2}x_p^2 - \sum\limits_{i\geq 1} x_{i1}x_i$ — через w, получим $x_p' = v$, $u' = \frac{1}{2}v^2 - w$, т.е. $f = g(v, \frac{1}{2}v^2 - w, 0, \ldots, 0, x_1, \ldots, x_{p-1})$. Но тогда из инвариантности f относительно $\alpha_4^{(0)}$ вытекает, что $f \in \mathbb{R}[v,w]\,\langle x_1, \ldots, x_{p-1}\rangle$.

Остальные утверждения теоремы следуют из (2.2)–(2.4) и теоремы 2.1.

3^o. Зафиксируем репер (1.1), для которого $p > m \geq 2$, $n_1 = 1$, $n_j = 2$, $j \geq 2$.

Для каждого $\tau = (t_1, \ldots t_m) \in \mathbb{R}^m$ пусть $\alpha_5^\tau = (L_5^\tau, P_5^\tau)$, где прямая L_5^τ параллельна $e_p + \sum\limits_{i\leq m} t_i e_{i1}$ и проходит через точку с радиус-вектором $t_1 e_{21} + \sum\limits_{j\geq 2} t_j e_{j2}$, а P_5^τ задается уравнением $x_p - \sum\limits_{i\leq m} t_i x_i = 0$; $\varphi_5^{2\tau} = \alpha_5^\tau \alpha_5^{(0)}$; $B_5^\tau = \sum\limits_{i\leq m} t_i B_{5i}$, где $B_{51} = (x_p' = x_1,\, x_{11}' = x_p,\, x_{21}' = x_0)$, $B_{5j} = (x_p' = x_j,\, x_{j1}' = x_p,\, x_{j2}' = x_0)$ для всех $j \geq 2$. Тогда $\varphi_5^\tau = \exp B_5^\tau$, $\alpha_5^\tau = \varphi_5^\tau \alpha_5^{(0)} \varphi_5^{-\tau} = \varphi_5^{2\tau}\alpha_5^{(0)}$.

Положим $M_{5m} = \{\alpha_5^\tau : \tau \in \mathbb{R}^m\}$, $H_{5m} = \langle M_{5m}\rangle$, K_{5m} — кольцо инвариантов группы H_{5m}; $G_{5m} = \{\varphi_5^\tau \exp \hat{T} : \tau \in \mathbb{R}^m,\, T \in \mathfrak{T}_m\}$ (определение $\mathfrak{T}$ и $\hat{T}$ см. в п. 2^o).

Для операторов B_5^τ, $\hat{T}$, φ_5^τ и α_5^τ выполняются соотношения, аналогичные (2.2)–(2.4); G_{5m} — связная замкнутая группа, не содержащая отражений, и каждый ее элемент представим в виде произведения $\varphi_5^\tau \exp \hat{T}$, где $\tau \in \mathbb{R}^m$, $T \in \mathfrak{T}_m$, единственным образом; $(\varphi_5^\tau \exp \hat{T})\ \alpha_5^{(0)}$ — отражение тогда и только тогда, когда $T = 0$.

Теорема 3.1. *1) Группа H_{5m} совпадает с $\mathrm{cl}\,\langle\{\alpha_5^{(0)}, \alpha_5^{\varepsilon_i} : i \leq m\}\rangle$ и распадается на компоненты G_{5m} и $G_{5m}\alpha_5^{(0)}$. M_{5m} содержится в $G_{5m}\alpha_5^{(0)}$ и является множеством всех принадлежащих H_{5m} отражений; G_{5m} действует на M_{5m} транзитивно;*

2) $K_{5m} = \mathbb{R}\langle x_1(\frac{1}{2}x_p^2 - \sum\limits_{j\geq 1} x_{j1}x_j) + x_2(x_p - \sum\limits_{j\geq 2} x_{j2}x_j), \quad x_1, \ldots, x_{p-1}\rangle$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in K_{5m}$. Тогда f инвариантен относительно $\exp D$, где $D = \sum\limits_{i\geq 2} t_i [B_5^{\varepsilon_1}, B_5^{\varepsilon_i}] = (x_{11}' = \sum\limits_{i\geq 2} t_i x_i, x_{j1}' = -t_j x_1 : j \geq 2)$. Отсюда, как и при доказательстве теоремы 2.5, $f = g(x_p, u, x_{22}, \ldots, x_{m2}, x_1, \ldots, x_{p-1}) \in \mathbb{R}[\,x_p, u, x_{22}, \ldots, x_{m2}, x_1, \ldots, x_{p-1}\,]$, где $u = \sum\limits_{i\geq 1} x_i x_{i1}$. Из инвариантности f относительно φ_5^τ для $\tau = (t_1, \ldots, t_m)$ следует, что $f \in \mathbb{R}[x_p', u', x_{22}', \ldots, x_{m2}', x_1, \ldots, x_{p-1}]$, где $x_p' = x_p + \sum\limits_{i\geq 1} t_i x_i$, $u' = u + \frac{1}{2}((x_p')^2 -$

$x_p^2) + t_1x_2$, $x'_{j2} = x_{j2} + t_j$ для всех $j \geq 2$. Полагая $t_1 = (\sum\limits_{j\geq 2} x_{j2}x_j - x_p)x_1^{-1}$, $t_j = -x_{j2}$, $j \geq 2$, и обозначая $x_1(u - \frac{1}{2}x_p^2) + x_2(\sum\limits_{j\geq 2} x_{j2}x_j - x_p)$ через w, получаем $x'_{j2} = 0$ $(j \geq 2)$, $x'_p = 0$, $u' = wx_1^{-1}$. Но тогда из инвариантности f относительно $\alpha_5^{(0)}$ вытекает, что $f \in \mathbb{R}\langle w, x_1, \ldots, x_{p-1}\rangle$.

4^o. Пусть H обозначает произвольную группу аффинных преобразований пространства V, удовлетворяющую следующим условиям:

а) H действует на нецилиндрической алгебраической гиперповерхности;

б) H порождена отражениями относительно прямых, из которых хотя бы две скрещиваются;

в) для каждой гиперплоскости P в пространстве V существует не более одной прямой, отражение относительно которой в направлении P принадлежит H

Первое из этих условий является геометрическим эквивалентом условия

а$'$) кольцо K^H (целых вещественных) инвариантов группы H невырождено, т.е. не содержится в $\mathbb{R}[y_2, \ldots, y_n]$ ни при каком выборе в V аффинных координат y_1, $y_2, \ldots,$ y_n.

В этом и следующем пунктах доказывается

Теорема 4.1. *Группа* $\mathrm{cl}\, H$ *аффинно эквивалентна одной и только одной из групп* H_i, H_{4m}, H_4^1, H_{5m}, $H_4[\omega]$ $(\omega \in \{-x_1;\ x_1;\ x_2\})$.

Реперы (1.1), использованные в пп. 1^o–3^o для задания групп, указанных в теореме 4.1, будем называть каноническими реперами этих групп.

Далее $L \mathbin{\dot-} L'$ означает, что прямые L и L' скрещиваются. $A \sim B$ означает аффинную эквивалентность A и B.

Пусть $(L_j, P_j) \in H$, $L_1 \mathbin{\dot-} L_2$, Q_j — содержащая L_j гиперплоскость, параллельная пересечению $P_1 \cap P_2$.

Из невырожденности K^H следует, что выполняется одно из следующих двух условий [4, 5]:

$$\begin{array}{llll} \text{А)} & P_1 \nparallel P_2\,, & Q_1 \parallel Q_2\,, & Q_1 \neq Q_2\,; \\ \text{Б)} & P_1 \nparallel P_2\,, & Q_1 = Q_2 & (\text{и тогда } n = \dim V \geq 4) \end{array}$$

В этом пункте будем предполагать, что H содержит пару отражений относительно скрещивающихся прямых, удовлетворяющую условию А). Такая пара аффинно эквивалентна паре $(\alpha_1^{(0)},\ \alpha_1^{(1)})$ (см. [5]), и поэтому можно считать, что $M_1 \subset \mathrm{cl}\, H$, $\alpha_1^{(s)} \in H$ для всех целых s. Если $H \setminus M_1$ не содержит отражений, то $H \subset \langle M_1\rangle \subset \mathrm{cl}\, H$ и из замкнутости H_1 следует, что $\mathrm{cl}\, H = H_1$.

Зафиксируем канонический репер (1.1) группы H_1.

Пусть $\beta = (L,\ P)$ обозначает произвольное отражение относительно прямой

$$\frac{x_1 - c_1}{a_1} = \ldots = \frac{x_n - c_n}{a_n} \tag{4.1}$$

в направлении гиперплоскости

$$\sum_{i>0} A_i x_i = 0\,. \tag{4.2}$$

Положим $\sigma = (\sum\limits_i A_i a_i)^{-1}$, $\beta_1^{(2t)} = \alpha_1^{(t)} \beta \alpha_1^{(t)} = (L^{2t},\ P^{2t}) = (\alpha_1^{(t)}(L),\ \alpha_1^{(t)}(P))$, $d^{2t} = \alpha_1^{(t)}(e_2)$.

Если $\beta \in H$, то $\beta_1^{(2t)} \in H$ для всех целых t.

Лемма 4.1. 1) *$L^t \dot{-} L_1^0$ и $P^t \nparallel P_1^0$ почти для всех t.*

2) *$L^t \parallel P_1^0$ тогда и только тогда, когда $ta_3 = a_2$; $L_1^0 \parallel P^t$ тогда и только тогда, когда $tA_1 + A_2 = 0$.*

3) *некоторая ненулевая линейная комбинация векторов e_2 и d^t параллельна плоскостям P_1^0 и P^t тогда и только тогда, когда $e_2 \nparallel d^t$ и*

$$a_3 A_1 t^2 + (a_3 A_2 - a_2 A_1)t + \sum_{i \neq 2} A_i a_i = 0\,. \tag{4.3}$$

Доказательство. Пусть ненулевой вектор $xe_2 + yd^t$ параллелен P_1^0 и P^t. Тогда $e_2 \nparallel d^t$ (иначе $e_2 \parallel xe_2 + yd^t \parallel P_1^0$) и поэтому $(x; y)$ — ненулевое решение системы уравнений

$$X + (ta_3 - a_2)Y = 0, \quad (a_3 A_1 t^2 + (a_3 A_2 - a_2 A_1)t + \sum_{i \neq 2} A_i a_i)Y = 0$$

с неизвестными X и Y; следовательно, определитель этой системы равен 0, что и влечет (4.3). Остальное очевидно.

Пусть M_{12} — множество всех $\beta = (L,\ P)$, для которых в уравнениях (4.1) и (4.2) прямой L и плоскости P

$$A_1 = a_3 = 0, \quad A_2 = a_2 = 1, \quad c_2 = 0; \tag{4.4}$$

M_{13} — множество всех $\beta = (L,\ P)$, для которых в соответствующих уравнениях (4.1) и (4.2) прямой L и плоскости P

$$A_1 = A_2 = 0, \quad a_3 = 1, \quad c_3 = 0. \tag{4.5}$$

Лемма 4.2. $\operatorname{cl} H \setminus (M_{12} \cup M_{13})$ *не содержит отражений.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\beta = (L,\, P) \in \mathrm{cl}\, H \setminus (M_{12} \cup M_{13})$. Для коэффициентов уравнений (4.1) и (4.2) прямой L и плоскости P выполняется одно из следующих условий:

1. $(a_2^2 + a_3^2)(A_1^2 + A_2^2) \neq 0$ и при этом либо $A_2 a_2 = 0$, либо $A_1^2 + a_3^2 \neq 0$.

Если $A_2 a_2 = 0$, то $\sum\limits_{i \neq 2} A_i a_i \neq 0$.

Допустим, что $A_2 a_2 \neq 0$, но $A_1 a_3 = 0$. Отсюда следует, что в рассматриваемом случае либо $A_1 = 0 \neq a_3$, либо $a_3 = 0 \neq A_1$; следовательно, $a_3 A_2 - a_2 A_1 \neq 0$.

Таким образом, хотя бы один из коэффициентов многочлена $f(t)$, являющегося левой частью равенства (4.3), отличен от 0. По лемме 4.1, найдется t, для которого $L^t \dot{-} L_1^0$, $\;P^t \nparallel P_1^0$, $\;L^t \nparallel P_1^0$, $\;L_1^0 \nparallel P^t$ и не выполнено равенство (4.3). Но тогда $(\alpha_1^{(0)} \beta_1^{(t)})^2$ — винтовое вращение (эллиптическое или гиперболическое); отсюда следует, что K^H вырождено (см. [4; 5]).

2. $a_2 = a_3 = 0$.

В этом случае принадлежащее $\mathrm{cl}\, H$ отображение $\exp[[\beta B_1 \beta,\, B_1],\, B_1]$ является переносом $\{x_1' = x_1 - 2(a_1 A_1 \sigma + 1),\; x_i' = x_i - 2 a_i A_1 \sigma : i \geq 2\}$ на ненулевой вектор (если $A_1 \neq 0$, но $a_i = 0$ для всех $i \geq 2$, то $a_1 A_1 \sigma = 1$), и поэтому K^H вырождено.

3. $A_1 = A_2 = a_3 = 0,\;\; a_2 = 1,\;\; c_2 = 0$.

Тогда $\exp[\beta B_1 \beta,\, B_1] = \{x_1' = x_1 + 2c_3 - 4\sigma A_3, \quad x_2' = x_2 + 2\}$ — перенос на ненулевой вектор, и опять K^H вырождено.

Лемма 4.3. *Пусть* $\beta \in (M_{12} \cap \mathrm{cl}\, H) \backslash M_1$. *Тогда* $M_{12} \cap \mathrm{cl}\, H$ *— множество всех отражений, принадлежащих группе* $\mathrm{cl}\, \langle M_1 \cup \{\beta\} \rangle$, *и эта группа аффинно эквивалентна группе* H_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\beta = (L,\, P)$ удовлетворяет условиям леммы, L и P задаются уравнениями (4.1) и (4.2) соответственно и выполнены условия (4.4). Тогда $[\beta B_1 \beta,\, B_1] = 2(x_1' = (\sigma(2c_3 + 2A_3 + a_1) - c_3)x_0,\; x_2' = (\sigma - 1)x_0,\; x_i' = a_i \sigma x_0 : i \geq 3)$. Отсюда $a_i = 0 \quad (i \geq 3)$, $\sigma = 1$, $a_1 + 2A_3 + c_3 = 0$, т.к. иначе $\mathrm{cl}\, H$ содержит перенос $\exp[\beta B_1 \beta,\, B_1]$ на ненулевой вектор.

Заменяя β на $\beta_1^{(t)}$ при $t = a_1$, не изменяя при этом $\langle M_1 \cup \{\beta\} \rangle$, можем считать, что $a_1 = 0$ (см. доказательство леммы 4.1). Покажем, что в таком случае $A_3 \neq 0$. Допустим противное. Тогда

$$B_1 + \beta B_1 \beta = (x_1' = 2 \sum_i A_i (c_i x_0 - x_i))\,.$$

Поэтому если $A_i \neq 0$ для некоторого $i \geq 4$, то $\exp(B_1 + \beta B_1 \beta)$ — сдвиг, и K^H вырождено. Если же $A_i = 0$ для всех $i \geq 4$, то учитывая, что $\beta \neq \alpha_1^{(0)}$, получаем, что $\beta \alpha_1^{(0)}$ — перенос на ненулевой вектор, и опять K^H вырождено.

Таким образом, наряду с (4.4), имеем: $c_3 = -2A_3 \neq 0$, $a_i = 0$ для всех $i \neq 2$.

Полагая $\gamma_1 = \beta$, $\gamma_{i+1} = \alpha_1^{(0)}\gamma_i\alpha_1^{(0)}$, $i \geq 1$, получаем, что $\langle\{\alpha_1^{(0)},\ \beta\}\rangle$ содержит бесконечное подмножество множества $M_2' = \{\beta_2^{(t)} : t \in \mathbb{R}\}$, где $\beta_2^{(t)}$ — отражение относительно прямой $\dfrac{x_1 - c_1 t}{0} = \dfrac{x_2}{1} = \dfrac{x_3 - c_3 t}{0} = \ldots = \dfrac{x_n - c_n t}{0}$ в направлении гиперплоскости $x_2 + t\sum\limits_{i\geq 3} A_i x_i = 0$ (причем $c_3 = -2A_3 \neq 0$), и $\beta = \beta_2^{(1)}$. Следовательно, $M_2' \subset \operatorname{cl}\langle\{\alpha_1^{(0)}, \beta\}\rangle$ (см. [4, 5]). Положим $\psi_2^{2t} = \beta_2^{(t)}\beta_2^{(0)}$. Тогда $(\psi_2^t : t \in \mathbb{R})$ — однопараметрическая группа с производящим оператором $B_2' = (\frac{d}{dt}\psi_2^t)|_{t=0} = (x_2' = -\sum\limits_{i\geq 3} A_i x_i,\ x_j' = c_j x_0 : j \neq 2)$, $[[\beta B_1 \beta,\ B_2'], B_2'] = (x_1' = x_0 \sum\limits_{i\geq 3} A_i c_i)$. Отсюда получаем: $\sum\limits_{i\geq 3} A_i c_i = 0$, $\sum\limits_{i\geq 4} A_i c_i = 2A_3^2 > 0$.

После перестановки базисных векторов $e_4, \ldots, e_n$, не меняющей координатных представлений M_1 и M_{12}, можно считать, что $A_4 c_4 \neq 0$. Теперь после замены координат

$$y_4 = A_3^{-1}\sum_{k\geq 4} A_k x_k, \quad y_i = x_i - \frac{1}{2}c_i y_4\,, \quad 1 \leq i \notin \{2;\ 3;\ 4\}\,,$$

также не меняющей координатных представлений M_1 и M_{12}, получаем, что в новой системе координат координатное представление M_2' совпадает с координатным представлением M_2 в исходной системе координат. Следовательно, по теореме 1.2, $\operatorname{cl}\langle M_1 \cup \{\beta\}\rangle$ совпадает с группой $\langle M_1 \cup M_2'\rangle$, которая аффинно эквивалентна H_2. Но $M_1 \cup M_2' \subset M_{12} \cap \operatorname{cl} H$. Остается показать, что $M_{12} \cap \operatorname{cl} H \subset \langle M_1 \cup M_2'\rangle$.

Пусть, наряду с рассмотренным выше β, некоторое β' принадлежит $M_{12} \cap \operatorname{cl} H$. Как и для β, для β' найдется s такое, что $\gamma = \alpha_1^{(s)}\beta'\alpha_1^{(s)}$ является отражением относительно прямой $\dfrac{x_1 - c_1'}{0} = \dfrac{x_2}{1} = \dfrac{x_3 - c_3'}{0} = \ldots = \dfrac{x_n - c_n'}{0}$ в направлении гиперплоскости $x_2 + \sum\limits_{i\geq 3} A_i' x_i = 0$, причем $c_3' = -2A_3' \neq 0 = \sum\limits_{i\geq 3} A_i' c_i'$. Как и для β, группа $\operatorname{cl}\langle\{\alpha_1^{(0)},\ \gamma\}\rangle$ содержит однопараметрическую группу с производящим оператором $B_2'' = (x_2' = -\sum\limits_{i\geq 3} A_i' x_i,\ x_j' = c_j' x_0 : j \neq 2)$. Но $[A_3' B_2' - A_3 B_2'',\ B_1]$ совпадает с $(x_1' = \sum\limits_{i\geq 4}(A_3' A_i - A_3 A_i')x_i)$ и является нулевым оператором, т.к. иначе это — производящий оператор однопараметрической группы сдвигов, принадлежащих $\operatorname{cl} H$, а тогда K^H вырождено.

Следовательно, $A_i' = rA_i$, $i \geq 3$, где $r = A_3' A_3^{-1}$. Но тогда $\beta_2^{(r)}$ и γ являются отражениями относительно параллельных прямых в направлениях параллельных плоскостей. Поэтому $\gamma = \beta_2^{(r)}$ (иначе $\gamma\beta_2^{(r)}$ — принадлежащий $\operatorname{cl} H$ параллельный перенос на ненулевой вектор), и $\beta' = \alpha_1^{(s)}\gamma\alpha_1^{(s)} \in \langle M_1 \cup M_2'\rangle$.

Лемма 4.4. *Пусть* $M_{13} \cap H = \emptyset$. *Тогда* $\mathrm{cl}\, H \sim H_i$ *для некоторого* $i \le 2$.

Доказательство. Пусть M — множество всех отражений в V. Тогда $\langle M \cap H \rangle = H$, т.к. H порождается отражениями. По лемме 4.2, $M \cap H \subset M_{12}$. Поэтому $\langle M_{12} \cap H \rangle = H$. Если $M_{12} \cap H \subset M_1$, то

$$H_1 \subset \mathrm{cl}\, H \subset \mathrm{cl}\,(M_{12} \cap H) \subset \mathrm{cl}\, M_1 = H_1,$$

т.е. $\mathrm{cl}\, H = H_1$. Если же найдется $\beta \in (M_{12} \cap H) \setminus M_1$, то, по лемме 4.3, $M_{12} \cap \mathrm{cl}\, H = M \cap H_2'$, где $H_2' = \mathrm{cl}\, \langle M_1 \cup \{\beta\} \rangle \sim H_2$. В частности, H_2' порождается отражениями, замкнута и содержится в $\mathrm{cl}\, H$. Следовательно,

$$\begin{aligned} H_2' &= \left\langle M \cap H_2' \right\rangle = \langle M_{12} \cap \mathrm{cl}\, H \rangle \subset \mathrm{cl}\, H \\ &= \mathrm{cl}\, \langle M_{12} \cap H \rangle \subset \mathrm{cl}\, \langle M_{12} \cap \mathrm{cl}\, H \rangle = \mathrm{cl}\, H_2' = H_2'. \end{aligned}$$

Лемма 4.5. $H \cap M_{13} = \emptyset$.

Доказательство. Пусть $\beta = (L, P) \in M_{13} \cap H$. Тогда $\beta_1^{(2t)} \in H$ для всех целых t, причем если $t_1 \ne t_2$, то $L^{2t_1} \nparallel L^{2t_2}$, $P^{2t_1} \parallel P^{2t_2}$, а это противоречит условию в).

Из доказанного получаем

Предложение 4.1 *Пусть* $\mathrm{cl}\, H$ *содержит отражения* (L_1, P_1), (L_2, P_2), *для которых* $L_1 \dot{-} L_2$ *и выполняется условие* А). *Тогда* $\mathrm{cl}\, H \sim H_i$ *для некоторого* $i \le 2$.

5^o. В этом пункте будем предполагать, что H не содержит удовлетворяющих условию А) отражений относительно скрещивающихся прямых, но содержит отражения, удовлетворяющие условию Б) п. 4^o.

Лемма 5.1. *Пусть* $\beta_i = (L_i, P_i)$, $i \le 2$, $L_1 \dot{-} L_2$, $P_1 \nparallel P_2$, *а гиперплоскость, содержащая* L_1 *и параллельная* $P_1 \cap P_2$, *содержит и* L_2. *Тогда для любой точки* $C \in L_1$ *и направляющего вектора* b_1 *прямой* L_1 *существует репер* $(C;\ b_1, \ldots, b_n)$ *с координатными функциями* $y_i = b_i^*$, $i \ge 1$, *относительно которого* P_1 *задается уравнением* $y_1 = 0$, P_2 — *уравнением* $y_1 - y_4 = 0$, *а прямая* L_2 *параллельна* $b_1 + b_3$ *и проходит через точку с радиус-вектором* b_2.

Доказательство. Будем считать, что P_1 и P_2 (определенные с точностью до параллельного переноса) содержат точку C. Пусть Q — гиперплоскость, содержащая L_1 и параллельная $P_1 \cap P_2$. Выберем вектор $b_3 \parallel P_1 \cap P_2$ так, чтобы $b_1 + b_3$ был направляющим вектором прямой L_2 (это возможно, т.к. $L_2 \subset Q$). L_2 пересекает $P_1 \cap P_2$ в (единственной) точке C' (в противном случае получили бы, что $L_2 \parallel P_2$). Положим $b_2 = \overrightarrow{CC'}$. Векторы b_1, b_2, b_3 линейно независимы, т.к. $L_1 \dotdiv L_2$. Дополним b_2 и b_3 векторами $b_5, \ldots, b_n$ до базиса в $P_1 \cap P_2$, который, в свою очередь, дополним до базиса в P_1 вектором $\tilde{b}_4$. В результате получаем репер $(C;\ \tilde{b}_4,\, b_i\ :\ i \neq 4)$, в котором P_2 задается уравнением $A_1 y_1 + A_4 \tilde{y}_4 = 0$, где $y_1 = b_1^*$, $\tilde{y}_4 = \tilde{b}_4^*$; $A_1 \neq 0$ (иначе $L_1 \subset P_2$; но $P_1 \cap P_2 \subset P_2$ и поэтому $P_2 = Q$, что невозможно, т.к. $L_2 \subset Q$), $A_4 \neq 0$ (иначе $P_1 = P_2$) и полагая $b_4 = -A_1 A_4^{-1} \tilde{b}_4$, получим репер, удовлетворяющий условиям леммы.

Зафиксируем в $\mathrm{cl}\, H$ отражения $\beta_i = (L_i,\ P_i)$ и репер

$$(C;\ b_1, \ldots, b_n), \tag{5.1}$$

удовлетворяющие условиям леммы 5.1.

Пусть $\beta_4^{(t)} = (L_4^t,\ P_4^t)$, где L_4^t параллельна вектору $b_1 + t b_3$ и проходит через точку с радиус-вектором $t b_2$, P_4^t — плоскость с уравнением $y_1 - t y_4 = 0$; $\varphi_4^{2t} = \beta_4^{(t)} \beta_4^{(0)}$, $B_4 = (\frac{d}{dt}\varphi_4^t)|_{t=0}$, $M_4 = \{\, \beta_4^{(t)}\ :\ t \in \mathbb{R}\}$, $H_4 = \langle M_4 \rangle$.

Лемма 5.2. *M_4 аффинно эквивалентно M_{41} и содержится в* $\mathrm{cl}\, H$.

Доказательство. Пусть $(O;\, e_{11}, e_{12}, e_1, \ldots, e_{n-2})$ — канонический репер группы H_{41}, φ — аффинное преобразование, для которого $\varphi(C) = O$, $\varphi(b_1) = e_{n-2}$, $\varphi(b_2) = e_{12}$, $\varphi(b_3) = e_{11}$, $\varphi(b_4) = e_1$, $\varphi(b_i) = e_{i-3}$, $i \geq 5$. Тогда $\varphi \beta_4^{(t)} \varphi^{-1} = \alpha_4^{(t)}$, причем $\beta_4^{(0)} = \beta_1$, $\beta_4^{(1)} = \beta_2$ (в частности, $(\beta_1, \beta_2) \sim (\alpha_4^{(0)}, \alpha_4^{(1)})$), и из теоремы 2.1 следует, что $M_4 \subset \mathrm{cl}\, H$.

Обозначим через $\widetilde{M}$ множество всех отражений $\beta = (L, P)$ для которых L и P в репере (5.1) задаются уравнениями

$$\frac{y_1}{1} = \frac{y_2 - c_2}{a_2} = \ldots = \frac{y_n - c_n}{a_n} \tag{5.2}$$

и

$$y_1 + \sum_{i \geq 2} A_i y_i = 0 \tag{5.3}$$

соответственно. Для каждого такого β положим

$$\tilde{\pi}_1(\beta) = \sum_{i \geq 2} a_i b_i, \quad \tilde{\pi}_2(\beta) = \sum_{i \geq 2} c_i b_i, \quad \tilde{\pi}_3(\beta) = \sum_{i \geq 2} A_i y_i, \tag{5.4}$$

$$B\,\langle\, \beta \,\rangle = (\, y_1' = -\sum_{i \geq 2} A_i y_i,\ y_j' = a_j y_1 + c_j x_0\ :\ j \geq 2\,), \tag{5.5}$$

$$C\,\langle\, \beta \,\rangle = [B\,\langle\, \beta \,\rangle\,,\ B_4].$$

$\widetilde{M}$ будем рассматривать как вещественное линейное пространство, для любых β, γ из $\widetilde{M}$ и вещественных s, t полагая $s\cdot\beta\oplus t\cdot\gamma$ равным такому δ из $\widetilde{M}$, которое однозначно определяется равенством $B\langle\delta\rangle = sB\langle\beta\rangle + tB\langle\gamma\rangle$. Тогда каждое $\tilde\pi_i$ является линейным отображением пространства $\widetilde{M}$; эти отображения (и линейные операции в $\widetilde{M}$) хотя и задаются с использованием координат $y_1, \ldots, y_n$, полностью определяются выбором точки $C \in L_1$ и вектора $b_1 \parallel L_1$.

Пусть $f : V \to V$ — аффинное преобразование, $f(C) = C'$, $f(b_1) = b_1'$, $f(L_1) = L_1'$, $f(P_1) = P_1'$, $\widetilde{M}'$ — множество всех $\beta' = (L', P')$, для которых $L' \nparallel P_1'$, $L_1' \nparallel P'$; $\tilde\pi_i'$ — линейные отображения пространства $\widetilde{M}'$, определенные аналогично (5.4) с помощью отражения $\beta' = f\beta_1 f^{-1} = (L_1', P_1')$, точки C' и вектора b_1'. Тогда для любого $\beta \in \widetilde{M}$ из совпадения координатных представлений β и $f\beta f^{-1}$ в реперах, сопряженных относительно f (или из геометрических соображений),

$$\tilde\pi_i' f\beta f^{-1} = f\tilde\pi_i\beta \tag{5.6}$$

и отображение $\beta \to f\beta f^{-1}$ является изоморфизмом линейных пространств $\widetilde{M}$ и $\widetilde{M}'$ (при этом линейная структура на $\widetilde{M}'$ определяется с помощью отображений $\tilde\pi_i'$ так же, как она определяется на $\widetilde{M}$ с помощью $\tilde\pi_i$).

В частности, если $\beta_1' = \beta_1$ и при этом $C' = C + \lambda b_1$, $b_1' = \mu b_1$, то $\widetilde{M}' = \widetilde{M}$ и

$$\tilde\pi_1' = \mu\tilde\pi_1, \quad \tilde\pi_2' = \tilde\pi_2 + \lambda\tilde\pi_1, \quad \tilde\pi_3' = \mu^{-1}\tilde\pi_3. \tag{5.7}$$

Отсюда следует, что хотя при данном β_1 отображения $\tilde\pi_i$ и зависят от выбора точки C и вектора b_1, пучок операторов $\tilde\pi_2 + \lambda\tilde\pi_1$ и линейная структура на $\widetilde{M}$ однозначно определяются отражением β_1.

Положим $M' = \widetilde{M} \cap \mathrm{cl}\, H$, π_i — сужение $\tilde\pi_i$ на M', $V_i = \pi_i(M')$ $(i \le 3)$;

$\beta = (L, P) \in M'$, где L и P задаются уравнениями (5.2) и (5.3) соответственно.

Лемма 5.3. *M' — линейное подпространство $\widetilde{M}$. При этом*

1) $\exp(2tB\langle\beta\rangle) = (t\cdot\beta)\beta_4^{(0)}$;

2) форма $\pi_3(\beta)$ *равна* 0 *на* $V_1 + V_2$.

Доказательство. Пусть $d = b_1 + \pi_1(\beta)$, $\beta^{(t)} = \beta_4^{(t)}\beta\beta_4^{(t)}$. Тогда почти для всех t

$$L^t \dot{-} L_4^0, \quad L_4^0 \nparallel P^t, \quad L^t \nparallel P_4^0, \quad P_4^0 \nparallel P^t. \tag{5.8}$$

При этом

$$A_3 = a_4 = \sum_{i\ge 2} A_i a_i = 0, \tag{5.9}$$

В самом деле, допустим, что (5.9) не выполняется. Тогда почти для всех t

$$4A_3a_4t^2 + 2(a_4 - A_3)t + \sum_{i\geq 2} A_ia_i \neq 0, \tag{5.10}$$

и поэтому найдется t, для которого выполняются условия (5.8) и (5.10). Но (5.10) эквивалентно тому, что всякая линейная комбинация направляющих векторов прямых L_4^0 и L^t, параллельная P_4^0 и P^t, тривиальна. Следовательно, для t, удовлетворяющего условиям (5.8) и (5.10), $(\beta^{(t)}\beta_4^{(0)})^2$ — винтовое вращение (эллиптическое или гиперболическое), что влечет вырожденность K^H. Полученное противоречие доказывает (5.9).

Для каждого t, удовлетворяющего условию (5.8), пусть Q_1^t и Q_2^t — гиперплоскости, для которых $L_4^0 \subset Q_1^t$, $L^t \subset Q_2^t$, $P_4^0 \cap P^t \parallel Q_i^t$ $(i \leq 2)$. Из (5.9) следует, что $Q_1^t \parallel Q_2^t$. Поэтому $Q_1^t = Q_2^t$ для всех t, удовлетворяющих условию (5.8). В самом деле, допустим, что $Q_1 \neq Q_2$ для некоторого t, удовлетворяющего условию (5.8). Тогда $\beta_4^{(0)}$ и $\beta^{(t)}$ — отражения относительно скрещивающихся прямых, удовлетворяющие условию A) п. 4^o. При этом $\beta^{(t)} \in \mathrm{cl}\, H$. Но множество всех отражений γ, для которых $\beta_4^{(0)}$ и γ — отражения относительно скрещивающихся прямых, удовлетворяющие условию A), открыто во множестве всех отражений. Значит, такое отражение γ найдется и в группе H.

Гиперплоскость Q_1^t принадлежит пучку гиперплоскостей, одна из которых параллельна P_4^0, а другая параллельна P^t. Следовательно, Q_1^t задается уравнением $\lambda(t)y_1 + \mu(t)(y_1 - A_2y_2 - (2t + A_4)y_4 - \sum_{j\geq 5} A_jy_j) + \rho(t) = 0$, где $\lambda^2(t) + \mu^2(t) \neq 0$. Но из $L_4^0 \subset Q_1^t$ следует, что $\lambda(t) + \mu(t) = 0$ (и поэтому $\lambda(t) \neq 0 \neq \mu(t)$), $\rho(t) = 0$, а тогда из $L^t \subset Q_1^t$ имеем: $2t(A_2 - c_4) = \sum_{i\geq 2} A_ic_i$. Это равенство выполняется почти для всех t, и, таким образом,

$$A_2 - c_4 = \sum_{i\geq 2} A_ic_i = 0. \tag{5.11}$$

Положим $\xi^t = (t\cdot\beta)\beta_4^{(0)}$. Из (5.9) и (5.11) следует, что $(\xi^t : t \in \mathbb{R})$ — однопараметрическая группа преобразований с производящим оператором $2B\langle\beta\rangle$, и утверждение 1) доказано, при этом

$$\xi^t\beta_4^{(0)} = \beta_4^{(0)}\xi^{-t} = t\cdot\beta\,. \tag{5.12}$$

Но $\xi^1 = \beta\beta_4^{(0)} \in \mathrm{cl}\, H$, а множество $\{\xi^t : t \in \mathbb{R}\}$ относительно топологии Зарисского гомеоморфно $\mathbb{R}$ и содержит бесконечное подмножество $\{\xi^k : k \geq 1\}$, лежащее в $\mathrm{cl}\, H$. Следовательно, $\{\xi^t : t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{cl}\,\{\xi^k : k \geq 1\} \subset \mathrm{cl}\, H$, и из (5.12) получаем

$$\{t\cdot\beta \,:\, t \in \mathbb{R}\} \subset M'. \tag{5.13}$$

В силу (5.9), $[C\langle\beta\rangle, B_4] = (y_3' = (2A_2 + c_4)x_0)$. Поэтому $2A_2 + c_4 = 0$ (иначе $\mathrm{cl}\,H$ содержит однопараметрическую группу параллельных переносов $\exp[tC\langle\beta\rangle, B_4])$ и, учитывая (5.11), имеем

$$A_2 = c_4 = 0. \tag{5.14}$$

Пусть теперь $\gamma = (L', P') \in M'$, $B\langle\gamma\rangle = (y_1' = -\sum_{i\ge 2} A_i' y_i,\ y_j' = a_j' y_1 + c_j' x_0 : j \ge 2)$. Как и для β,

$$A_2' = A_3' = a_4' = c_4' = \sum_{i\ge 2} A_i' a_i' = \sum_{i\ge 2} A_i' c_i' = 0 \tag{5.15}$$

(см. (5.9), (5.11), (5.14)). При этом $[C\langle\beta\rangle, C\langle\gamma\rangle] = (x_3' = x_4 \sum_{i\ge 5}(A_i a_i' - A_i' a_i))$. Отсюда

$$\sum_{i\ge 5}(A_i a_i' - A_i' a_i) = 0\,, \tag{5.16}$$

поскольку иначе $\mathrm{cl}\,H$ содержит однопараметрическую группу сдвигов $\exp[tC\langle\beta\rangle, C\langle\gamma\rangle]$.

Положим $\widetilde{B} = B\langle\beta\rangle + B\langle\gamma\rangle$, $\tilde{A}_i = A_i + A_i'$, $\tilde{a}_i = a_i + a_i'$, $\tilde{c}_i = c_i + c_i'$ для всех $i \ge 2$, $\varepsilon = \sum_{j\ge 2} \tilde{A}_j \tilde{a}_j$. Тогда

$$\tilde{A}_2 = \tilde{A}_3 = \tilde{a}_4 = \tilde{c}_4 = 0 \tag{5.17}$$

Из равенства $[[\widetilde{B}, B_4], \widetilde{B}] = (y_1' = \varepsilon y_4,\ y_3' = \varepsilon y_1 + x_0 \sum_{j\ge 5} \tilde{A}_j \tilde{c}_j)$ получаем

$$\varepsilon = \sum_{j\ge 5} \tilde{A}_j \tilde{c}_j = 0, \tag{5.18}$$

т.к. иначе $\mathrm{cl}\,H$ содержит однопараметрическую группу параллельных переносов $\exp(t([[\widetilde{B}, B_4], \widetilde{B}] - \varepsilon B_4))$. Теперь из (5.9), (5.15)–(5.18) следует, что

$$\sum_{i\ge 2} A_i a_i' = \sum_{i\ge 2} A_i' a_i = 0. \tag{5.19}$$

Но $[[B\langle\gamma\rangle, B_4], B\langle\beta\rangle] = (y_1' = y_4 \sum_{j\ge 2} A_j a_j',\ y_3' = \sum_{j\ge 2} A_j'(a_j y_1 + c_j x_0))$, и из (5.19) вытекает

$$\sum_{j\ge 2} A_j' c_j = 0. \tag{5.20}$$

Из (5.19) и (5.20) следует утверждение 2).

Из (5.17)–(5.18) получаем $\exp\widetilde{B} = \{y_1' = y_1 - \sum_{i\ge 4} \tilde{A}_i y_i,\ y_j' = y_j + (\tilde{a}_j y_1 + \tilde{c}_j) - \frac{1}{2}\tilde{a}_j \sum_{i\ge 4} \tilde{A}_i y_i : j \ge 2\}$, $(\exp\widetilde{B})\beta_4^{(0)} \exp(-\widetilde{B}) = \beta \oplus \gamma$. Из последнего равенства и (5.13) следует, что M' — линейное пространство.

Лемма 5.4. *Для каждого* $i \le 3$ *отображение* π_i *является изоморфизмом. При этом* $\pi_2\pi_1^{-1}$ *не имеет инвариантных подпространств.*

Доказательство. Покажем сначала, что π_1 и π_3 – изоморфизмы. Для этого достаточно проверить, что если $\pi_1(\beta)$ или $\pi_3(\beta)$ — нулевые, т.е. если

$$L \parallel L_4^0 \quad \text{или} \quad P \parallel P_4^0, \tag{5.21}$$

то $\beta = \beta_4^{(0)}$.

Из (5.9) и (5.14) следует, что

$$\begin{aligned} \exp(C\langle\beta\rangle) &= \{y_3' = y_3 + (a_3 + A_4)y_4 + \sum_{i \ge 5} A_i y_i\,, \\ y_j' &= y_j + a_j y_4 : j \notin \{1;\,3;\,4\}\}\,. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Если $C\langle\beta\rangle \ne 0$, то из (5.21) следует, что (5.22) является сдвигом, принадлежащим группе $\mathrm{cl}\,H$.

Если $C\langle\beta\rangle = 0$, то из (5.22) имеем $a_3 + A_4 = a_2 = a_j = A_j = 0$ для всех $j \ge 5$; но $a_3A_4 = 0$ в силу (5.21). Поэтому $a_3 = A_4 = 0$. Теперь из (5.9) и (5.14) следует, что $L \parallel L_4^0$, $P \parallel P_4^0$, а тогда $\beta = \beta_4^{(0)}$, т.к. иначе $\beta\beta_4^{(0)}$ — параллельный перенос на ненулевой вектор.

Положим $\nu = \pi_2\pi_1^{-1}$. Покажем, что ν не имеет инвариантных подпространств.

Обозначим через V^* пространство линейных форм, определенных на ассоциированном с V пространстве векторов. Индексированное семейство $(v_x : x \in X)$ векторов и индексированное семейство $(f_y : y \in Y)$ линейных форм (с произвольными множествами индексов X и Y), для которых $f_y(v_x)$ тождественно по x и y равно символу Кронекера $\delta(x,y)$, будем называть сопряженными.

Пусть $f \in K^H$.

Допустим, что $b = \pi_1(\beta)$ — собственный вектор ν, т.е. что $\beta \ne \beta_4^{(0)}$ и $\pi_2(\beta) = \lambda b$ для некоторого вещественного λ. Тогда линейные формы y_1, $y_4 = -\pi_3(\beta_4^{(1)})$ и $\pi_3(\beta)$ линейно независимы (в противном случае $\pi_3(\beta) = t\pi_3(\beta_4^{(1)})$, что в силу взаимной однозначности π_3 влечет равенство $\beta = t\cdot\beta_4^{(1)}$, причем $t \ne 0$; отсюда $\pi_2(\beta) = tb_2$, $b = \pi_1(\beta) = tb_3$, т.е. $\pi_2(\beta) \nparallel b$). Рассмотрим два альтернативных случая.

1) b_1, b_2, b_3, b линейно зависимы.

Тогда $b = a_2b_2 + a_3b_3$. Положим $\tilde b_i = b_i$ $(i \le 3)$, $z_1 = y_1$, $z_4 = y_4$, $z_5 = -\pi_3(\beta)$. Из леммы 5.3 следует сопряженность линейно независимой системы векторов $\tilde b_i$ и линейно независимой системы форм z_j. Но тогда эти системы содержатся в сопряженных базисах $(\tilde b_i : 1 \le i \le n)$ и $(z_j : 1 \le j \le n)$

пространств V и V^* соответственно. Из существования этих базисов следует, что $n \geq 5$ (один из этих базисов содержит векторы b_i, $i \leq 3$, а другой — формы z_4 и z_5). При переходе к системе координат $(C;\, z_1, \ldots, z_n)$ координатное представление M_4 не изменяется,

$$\begin{aligned} B\langle\beta\rangle &= (z_1' = z_5,\, z_i' = a_i(z_1 + \lambda x_0)\, :\, i \in \{2;3\}), \\ C\langle\beta\rangle &= (z_2' = a_2 z_4,\, z_3' = a_3 z_4 - z_5). \end{aligned}$$

По теореме 2.1 и лемме 5.2, учитывая инвариантность f относительно H_4, получаем

$$f \in \mathbb{R}[z_1 - z_2 z_4] \left\langle z_3 - z_1 z_2 + \tfrac{1}{2} z_2^2 z_4, \quad z_4, \ldots, z_n \right\rangle. \tag{5.23}$$

При этом f инвариантен относительно $\exp(tC\langle\beta\rangle) = \{z_2' = z_2 + t a_2 z_4,\ z_3' = z_3 + t(a_3 z_4 - z_5)\}$. Отсюда, с учетом (5.23),

$$f = h(u, v, z_4, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}[u, v, z_4, \ldots, z_n], \tag{5.24}$$

где $u = z_1 - z_4(z_2 + t a_2 z_4)$, $v = z_3 + t(a_3 z_4 - z_5) - z_1(z_2 + t a_2 z_4) + \frac{1}{2} z_4 (z_2 + t a_2 z_4)^2$.

Если $a_2 = 0$, то $\operatorname{cl} H$ содержит сдвиги $\exp(tC\langle\beta\rangle)$, и K^H вырождено.

Пусть $a_2 \neq 0$. При $t = a_2^{-1}(z_1 - z_2 z_4) z_4^{-1}$ из (5.24) имеем $f = h(0, w, z_4, \ldots, z_n)$, где $w = (a_2^{-1}(z_1 - z_2 z_4)(a_3 z_4 - z_5) + z_3 z_4^2 - \frac{1}{2} z_4 z_1^2) z_4^{-2}$. Теперь из инвариантности f относительно $\exp(tB\langle\beta\rangle) = \{z_1' = z_1 + t z_5,\ z_i' = z_i + t a_i(z_1 + \lambda + \frac{1}{2} t z_5)\, :\, i \in \{2;3\}\}$ следует, что

$$f = h(0, w(t), z_4, \ldots, z_n), \tag{5.25}$$

где $w(t) = w + t a_2^{-1} z_5((a_3 + \lambda a_2) z_4 - z_5) z_4^{-2}$ зависит от t. Поэтому $f \in \mathbb{R}[z_4, \ldots, z_n]$ и опять K^H вырождено.

2) b_1, b_2, b_3 и b линейно независимы.

Пусть $\tilde{b}_i$ $(i \leq 3)$, z_1, z_4 и z_5 — те же, что и в предыдущем случае, $\tilde{b}_6 = b$. Опять $\tilde{b}_i$ и z_j образуют сопряженные системы, которые содержатся в сопряженных базисах $(\tilde{b}_i\, :\, 1 \leq i \leq n)$ и $(z_j\, :\, 1 \leq j \leq n)$ пространств V и V^* соответственно (и теперь $n \geq 6$). При переходе к системе координат $(C;\, z_1, \ldots, z_n)$ координатное представление M_4 опять не изменяется, $B\langle\beta\rangle = (z_1' = z_5,\ z_6' = z_1 + \lambda x_0)$, $C\langle\beta\rangle = (z_3' = -z_5,\ z_6' = z_4)$. Если $f \in K^H$, то, как и в предыдущем случае, выполняется (5.23). Из инвариантности f относительно $\exp(tC\langle\beta\rangle) = \{z_3' = z_3 - t z_5,\ z_6' = z_6 + t z_4\}$ получаем $f = h(u,\ v - t z_5,\ z_4,\ z_5,\ z_6',\ z_7, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}[u,\ v - t z_5,\ z_4,\ z_5,\ z_6',\ z_7, \ldots, z_n]$, где $u = z_1 - z_2 z_4$, $v = z_3 - z_1 z_2 + \frac{1}{2} z_2^2 z_4$, $z_6' = z_6 + t z_4$. При $t = -z_6 z_4^{-1}$ имеем $f = h(u, w, z_4, z_5, 0, z_7, \ldots, z_n)$, где $w = v + z_5 z_6 z_4^{-1}$. Из инвариантности f относительно $\exp(tB\langle\beta\rangle) = \{z_1' = z_1 + t z_5, \quad z_6' = z_6 + t(z_1 + \lambda) + \frac{1}{2} t^2 z_5\}$ следует, что $f = h(u + t z_5,\ w - t z_5(z_2 - ((z_1 + \lambda) + \frac{1}{2} t z_5) z_4^{-1}),\ z_4, z_5, 0, z_7, \ldots, z_n)$, и при $t =$

$-uz_5^{-1}$, получим $f = h(0, -\frac{1}{2}z_1^2 - \lambda z_1 + z_5 z_6 + z_4(\lambda z_2 + z_3), z_4, z_5, 0, z_7, \dots, z_n) \in \mathbb{R}[z_1, \lambda z_2 + z_3, z_4, \dots, z_n]$, т.е. K^H вырождено.

Таким образом, ν не имеет одномерных инвариантных подпространств. В частности, если $\nu(a) = 0$, то $a = 0$ (иначе a — направляющий вектор одномерного инвариантного подпространства); поэтому ν и π_2 — изоморфизмы.

Отметим, что отсутствие у ν собственных векторов эквивалентно тому, что $L \doteq L_4^0$ для каждого $\beta = (L, P) \in M' \setminus \{\beta_4^{(0)}\}$.

Остается показать, что ν не имеет двумерных инвариантных подпространств.

Предположим, что $\beta \neq \beta_4^{(0)}$, а вектор $b = \pi_1(\beta)$ принадлежит двумерному ν-инвариантному подпространству W. По уже доказанному, $\nu(b) \nparallel b$ и поэтому W натянуто на b и $\nu(b)$; следовательно, $\nu^2(b) = \lambda b + \mu\nu(b)$, $\lambda \neq 0$. Пусть $\gamma = \pi_1^{-1}(\nu(b))$. Тогда $\pi_1(\beta) \nparallel \pi_1(\gamma)$, а поэтому $\pi_3(\beta) \nparallel \pi_3(\gamma)$. По лемме 5.3, векторы $\tilde{b}_1 = b_1$, $\tilde{b}_2 = \nu(b)$, $\tilde{b}_3 = b$ и формы $z_1 = y_1$, $z_4 = -\pi_3(\beta)$, $z_5 = -\pi_3(\gamma)$ принадлежат сопряженным базисам $(\tilde{b}_i : 1 \le i \le n)$ и $(z_j : 1 \le j \le n)$ пространств V и V^* соответственно. Из равенств $\pi_1(\beta) = \tilde{b}_3$, $\pi_1(\gamma) = \tilde{b}_2$, $\pi_2(\beta) = \tilde{b}_2$, $\pi_2(\gamma) = \nu^2(b) = \lambda\tilde{b}_3 + \mu\tilde{b}_2$, $\pi_3(\beta) = -z_4$, $\pi_3(\gamma) = -z_5$ следует, что в системе координат $(C; z_1, \dots, z_n)$ координатные представления $t \cdot \beta$ и $B\langle\beta\rangle$ совпадают с координатными представлениями $\beta_4^{(t)}$ и B_4 в системе координат (5.1), $B\langle\gamma\rangle = (z_1' = z_5,\ z_2' = z_1 + \mu x_0,\ z_3' = \lambda x_0)$, а из теоремы 2.1 получаем, что для f выполняется (5.23). При этом f инвариантен относительно $\exp[tB\langle\gamma\rangle, B\langle\beta\rangle] = \{z_2' = z_2 + tz_4,\ z_3' = z_3 - tz_5\}$. Следовательно, имеет место (5.24), где $u = z_1 - z_2 z_4 - t z_4^2$, $v = z_3 - tz_5 - z_1(z_2 + tz_4) + \frac{1}{2}z_4(z_2 + tz_4)^2$. Полагая $t = (z_1 - z_2 z_4) z_4^{-2}$, получаем $u = 0$, $z_2 + tz_4 = z_1 z_4^{-1}$, $f \in \mathbb{R}[w', z_4, \dots, z_n]$, где $w' = z_3 + (z_5(z_2 z_4 - z_1) - \frac{1}{2}z_1^2 z_4) z_4^{-2}$.

Теперь из инвариантности f относительно $\exp(tB\langle\gamma\rangle) = \{z_1' = z_1 + tz_5,\ z_2' = z_2 + t(z_1 + \mu) + \frac{1}{2}t^2 z_5,\ z_3' = z_3 + \lambda t\}$ получаем (5.25), где $w(t) = w' + t(\lambda z_4^2 + \mu z_4 z_5 - z_5^2) z_4^{-2}$ зависит от t. Поэтому $f \in \mathbb{R}[z_4, \dots, z_n]$.

Лемма 5.5. *Для некоторого $m \ge 1$ множество M' аффинно эквивалентно одному и только одному из множеств M_{4m}, M_{5m}.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 5.4, ν не имеет инвариантных подпространств. Применяя классификацию Кронекера пар линейных операторов (см., например, [6, гл. 12, § 2–4]) к линейным операторам id и ν, действующим из V_1 в V, получаем, что в $V_1 + V_2$ существует базис $(d_{ij} : 0 < i \le q;\ 0 < j \le k_i + 1)$, для которого $q \ge 1$, $k_1 \ge \dots \ge k_q \ge 1$, $\nu(d_{ik}) = d_{i,k+1}$ $(i \le q;\ k \le k_i)$ и $(d_{ik} : i \le q;\ k \le k_i)$ — базис пространства V_1. Такой базис назовем каноническим для ν.

Отражения $\beta_{ik} = \pi_1^{-1}(d_{ik})$, где $d_{ik} \in V_1$, образуют базис в M'; при этом $\pi_2(\beta_{ik}) = d_{i,k+1}$, а соответствующие линейные формы $\pi_3(\beta_{ik})$ линейно независимы и обращаются в 0 на $V_1 + V_2$ и на b_1.

Положим $d_1 = b_1$, $z_1 = y_1$, $n_i = k_i + 1$, $z_{i,n_i+k} = -\pi_3(\beta_{ik})$. Тогда семейства $(d_1,\, d_{ij} : i \le q;\ j \le n_i)$ и $(z_1,\, z_{i,n_i+k} : i \le q;\ k \le k_i)$ состоят из линейно независимых элементов, сопряжены друг с другом и поэтому содержатся в сопряженных базисах $(d_l,\, d_{ij} : 1 \le l \le s;\ 1 \le i \le q;\ 1 \le j \le 2n_i - 1)$ и $(z_l,\, z_{ij} : 1 \le l \le s;\ 1 \le i \le q;\ 1 \le j \le 2n_i - 1)$ пространств V и V^* соответственно (при этом $s = n + q - 2\sum\limits_{i\ge 1} n_i \ge 1$).

В репере

$$(C;\ d_l,\, d_{ij}\ : 1 \le l \le s; \quad 1 \le i \le q; \quad 1 \le j \le 2n_i - 1) \tag{5.26}$$

с координатными функциями z_l, z_{ij} получаем $\pi_k(\beta_4^{(0)}) = 0,\ k \le 3$, $\pi_1(\beta_{ij}) = d_{ij}$, $\pi_2(\beta_{ij}) = d_{i,j+1}$, $\pi_3(\beta_{ij}) = -z_{i,n_i+j}$.

Пусть $f \in K^H$, $B_{ij} = B\,\langle\beta_{ij}\rangle$, $u_{ij} = z_{i,n_i+j}$.

Предположим, что $n_1 \ge 4$. Тогда для любых вещественных t_i и s_j, $i \le 3$ и $j \le 2$ многочлен f инвариантен относительно $\varphi = \exp(\sum\limits_i t_i B_{1i} + \sum\limits_j s_j [B_{1j}, B_{13}])$.

Рассмотрим систему уравнений $z_1' = z_{1i}' = 0,\ i \le 4$, относительно неизвестных t_i и s_j, где z_1' и z_{1i}' определены координатным представлением φ. Эта система разрешима в поле рациональных функций, т.к. эквивалентна системе линейных уравнений $\sum\limits_i t_i u_{1i} = -z_1$, $\frac{1}{2}t_1 z_1 + s_1 u_{13} = -z_{11}$, $t_1 + \frac{1}{2}t_2 z_1 + s_2 u_{13} = -z_{12}$, $t_2 + \frac{1}{2}t_3 - \sum\limits_j s_j u_{1j} = -z_{13}$, $t_3 = -z_{14}$, определитель которой является ненулевым многочленом. Следовательно, f не зависит от z_1 и z_{1i}, $i \le 4$.

Теперь допустим, что $n_1 \ge 3$, $n_2 \ge 3$. Тогда для любых вещественных t_{ij} и s_k, $i,j \le 2$; $k \le 3$ многочлен f инвариантен относительно $\psi = \exp(s_1[B_{11}, B_{12}] + s_2[B_{21}, B_{22}] + s_3[B_{11}, B_{21}] + \sum\limits_{i,j} t_{ij} B_{ij})$.

Рассмотрим систему уравнений $z_1' = z_{ij}' = 0,\ i,j \le 2$, относительно t_{ij} и s_k, где z_1' и z_{ij}' определяются координатным представлением ψ. Система разрешима в поле рациональных функций, т.к. эквивалентна системе линейных уравнений $\frac{1}{2}t_{11}z_1 + s_1 u_{12} + s_3 u_{21} = -z_{11}$, $t_{11} + \frac{1}{2}t_{12}z_1 - s_1 u_{11} = -z_{12}$, $\sum\limits_{i,j} t_{ij} u_{ij} = -z_1$, $t_{12} = -z_{13}$, $\frac{1}{2}t_{21}z_1 + s_2 u_{22} - s_3 u_{11} = -z_{21}$, $t_{21} + \frac{1}{2}t_{22}z_1 - s_2 u_{21} = -z_{22}$, $t_{22} = -z_{22}$, определитель которой — ненулевой многочлен. Следовательно, f не зависит от z_1 и z_{ij} $(i,j \le 2)$.

Таким образом, с точностью до перестановки базисных векторов d_{ij}, остаются следующие возможности:

1) $n_i = 2$ для всех $i \leq q$.

Пусть аффинное преобразование $\alpha : V \to V$ отображает репер (5.26) на канонический репер (1.1) группы H_{4q}, $\alpha(d_{i3}) = e_i$, $\alpha(d_{ij}) = e_{ij}$, $i \leq q$; $j \leq 2$, $\alpha(d_1) = e_p$, $\alpha(d_k) = e_{q+k-1}$, $2 \leq k \leq s$. Тогда $\alpha M' \alpha^{-1} = M_{4q}$.

2) $n_1 = 3$ и если $q > 1$, то $n_j = 2$ для всех $j \geq 2$.

Пусть теперь α — аффинное преобразование пространства V, отображающее репер (5.26) на канонический репер (1.1) группы $H_{5,q+1}$ следующим образом:

$\alpha(d_{14}) = e_1, \quad \alpha(d_{15}) = e_2, \quad \alpha(d_{11}) = e_{11}, \quad \alpha(d_{12}) = e_{21}, \quad \alpha(d_{13}) = e_{22},$
$\alpha(d_1) = e_p, \quad \alpha(d_k) = e_{q+k} \quad (2 \leq k \leq s)$, и если $q > 1$, то $\alpha(d_{i3}) = e_{i+1}$,
$\alpha(d_{ij}) = e_{i+1,j} \quad (2 \leq i \leq q; \quad j \leq 2)$.

Тогда $\alpha M' \alpha^{-1} = M_{5,q+1}$.

Итак, M' аффинно эквивалентно одному из множеств M_{4m}, M_{5m} и, следовательно, аффинно однородно в силу теорем 2.1, 2.5 и 3.1. Докажем единственность такого множества.

Из классификации Кронекера пар линейных операторов следует, что кортеж $\tau = (k_1, \ldots, k_q)$ однозначно определяется линейным классом пары $(\nu, \mathrm{id}\,)$. Назовем τ сигнатурой оператора ν. Оператор $\mu\nu + \lambda\,\mathrm{id}$, где $\mu \neq 0$, также не имеет инвариантных подпространств и его сигнатура равна τ. В самом деле, если векторы d_{ij} образуют канонический базис ν, то векторы $(\mu\nu + \lambda\,\mathrm{id}\,)^j d_{i1}$, где $1 \leq i \leq q$, $0 \leq j \leq k_i$, образуют канонический базис оператора $\mu\nu + \lambda\,\mathrm{id}$. В силу (5.7), множество всех операторов $\mu\nu + \lambda\,\mathrm{id}$ однозначно определяется выбором $\beta_1 \in M'$, и поэтому τ можно назвать сигнатурой пары (M', β_1). Из (5.6) следует, что всякая пара, аффинно эквивалентная паре (M', β_1), имеет ту же сигнатуру τ. Поэтому, в силу отмеченной выше аффинной однородности M', если $M \sim M'$ и $\beta \in M$, то пара (M, β) имеет сигнатуру τ. Но пара $(M_{4m}, \alpha_4^{(0)})$ имеет сигнатуру $(1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^m$, а пара $(M_{5m}, \alpha_5^{(0)})$ имеет сигнатуру $(2, 1 \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{m-1}$.

Таким образом, если $H \setminus M'$ не содержит отражений, то $\mathrm{cl}\, H$, с точностью до аффинной эквивалентности, совпадает с одной (и только с одной) из групп H_{4m}, H_{5k} $(m \geq 1\ ;\ k \geq 2)$, т.к. в этом случае $H \subset \langle M' \rangle \subset \mathrm{cl}\, H$, а группа $\langle M' \rangle$ замкнута.

Предположим теперь, что $H \setminus M'$ содержит отражения.

Лемма 5.6. *Пусть $\beta = (L, P) \in M'$, $\gamma = (\Lambda, \Pi) \in \mathrm{cl}\, H \setminus M'$. Тогда $\beta\gamma = \gamma\beta$ (или, что то же самое, L и Λ пересекаются в некоторой точке, $L \parallel \Pi$, $\Lambda \parallel P$).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 5.5 и теорем 2.1, 2.5, 3.1 следует, что M', является орбитой в группе $\mathrm{cl}\, H$ относительно действия на ней ее подгруппы $\langle M' \rangle$. Поэтому достаточно рассмотреть случай $\beta = \beta_4^{(0)}$.

Пусть Λ и Π в репере (5.1) задаются уравнениями (4.1) и (4.2) соответственно (с заменой в этих уравнениях x_i на y_i). Тогда $A_1 a_1 = 0$ (иначе $\Lambda \nparallel P_4^0$, $L_4^0 \nparallel \Pi$, т.е. $\gamma \in M'$).

Положим $\alpha = \gamma\beta_4^{(0)}\gamma$. Имеет место лишь один из следующих двух случаев:

1) $a_1 = 0$. В этом случае α — отражение относительно прямой, параллельной вектору $b_1 - 2A_1(\sum\limits_{i\geq 2} A_i a_i)^{-1} \sum\limits_{i\geq 2} a_i b_i$, в направлении гиперплоскости $y_1 = 0$. Поэтому $\alpha \in M'$, $\pi_3(\alpha) = \pi_3(\beta_4^{(0)})$.

2) $A_1 = 0$. Тогда α — отражение относительно прямой, параллельной вектору b_1, в направлении гиперплоскости $y_1 - 2a_1(\sum\limits_{i\geq 2} A_i a_i)^{-1} \sum\limits_{i\geq 2} A_i y_i = 0$, т.е. $\alpha \in M'$, $\pi_1(\alpha) = \pi_1(\beta_4^{(0)})$.

В первом случае из взаимной однозначности π_3, а во втором — из взаимной однозначности π_1, получаем, что $\alpha = \beta_4^{(0)}$, и лемма доказана.

Лемма 5.7. *Пусть прямая Λ пересекает все прямые L_4^t, а гиперплоскость Π параллельна всем прямым L_4^t, но не параллельна прямой Λ. Тогда в репере (5.1) прямая Λ и гиперплоскость Π задаются соответственно уравнениями*

$$\frac{y_1 - a}{0} = \frac{y_2}{1} = \frac{y_3}{a} = \frac{y_4}{0} = \ldots = \frac{y_n}{0} \tag{5.27}$$

и

$$y_2 + \sum_{i\geq 4} A_i y_i = 0\,. \tag{5.28}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Λ и Π в репере (5.1) задаются уравнениями (4.1) и (4.2) соответственно (с заменой в этих уравнениях x_i на y_i). Обозначим через $\Delta(i,j,k)$ минор третьего порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_n \\ c_1 & c_2 - t & c_3 & c_4 & \ldots & c_n \end{pmatrix},$$

образованный столбцами с номерами i, j, k. Каждый такой минор тождественно по t равен 0 (иначе $\Lambda \dot{-} L_4^t$ для некоторого t). Из равенств $\Delta(2,3,k) = 0$ получаем $a_1 = a_i = 0$, $i \geq 4$. Если $a_2 = 0$, то из равенства $\Delta(1,2,3) = 0$ следует, что и $a_3 = 0$, а тогда все $a_i = 0$. Поэтому можем считать $a_2 = 1$, $c_2 = 0$. Теперь из равенств $\Delta(2,3,k) = 0$ получаем $c_1 = a_3$, $c_i = 0$ для $i \geq 3$.

Из условия $L_4^t \parallel \Pi$ и полученных выше ограничений на коэффициенты a_i следует, что $A_1 = A_3 = 0$. Но тогда $A_2 \neq 0$, т.к. иначе $\Lambda \parallel \Pi$. Поэтому можем считать, что $A_2 = 1$, и лемма доказана.

Лемма 5.8. *Если $H \setminus M'$ содержит отражения, то* $\operatorname{cl} H$ *аффинно эквивалентна одной из групп H_4^1, $H_4[\omega]$, где $\omega \neq 0$.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что для каждого $k \in \{4,5\}$ не существует прямой, пересекающей все прямые, отражения относительно которых принадлежат M_{k2}. Поэтому если найдется $\gamma = (\Lambda,\, \Pi) \in H \setminus M'$, то, согласно леммам 5.5 и 5.6, $M' = M_4$, а, по лемме 5.7, Λ и Π в репере (5.1) задаются уравнениями (5.27) и (5.28) соответственно. После замены координат

$$z_1 = y_1 - a, \quad z_2 = y_2 + \sum_{j\ge 4} A_j y_j, \quad z_3 = y_3 - a y_2, \quad z_i = y_i, \quad i \ge 4,$$

координатное представление M_4 не изменяется (хотя, возможно, изменяются координатные представления отражений, принадлежащих M_4) и поэтому, с точностью до аффинной эквивалентности, не изменяющей M_4, можем считать, что $\gamma = \gamma^{(0)} = (\Lambda^0,\, \Pi^0)$, где Λ^0 и Π^0 в репере (5.1) задаются уравнениями (5.27) и (5.28), для которых $a = A_j = 0$, $j \ge 4$.

Рассмотрим следующие случаи.

1. $H \setminus M_4$ содержит лишь $\gamma^{(0)}$. Тогда $H \subset \left\langle M_4 \cup \{\gamma^{(0)}\}\right\rangle \subset \operatorname{cl} H$, но группа $\left\langle M_4 \cup \{\gamma^{(0)}\}\right\rangle$ аффинно эквивалентна H_4^1, а поэтому замкнута и содержит $\operatorname{cl} H$. Таким образом, $\operatorname{cl} H$ совпадает с $\left\langle M_4 \cup \{\gamma^{(0)}\}\right\rangle$ и аффинно эквивалентна H_4^1.

2. $H \setminus M_4$ содержит некоторое отражение $\gamma^{(1)} = (\Lambda^1, \Pi^1) \neq \gamma^{(0)}$. Тогда Λ^1 задается уравнениями (5.27), где $a \neq 0$, Π^1 задается уравнением $y_2 + \theta = 0$, где $\theta = \sum\limits_{j\ge 4} A_j y_j \neq 0$, т.к. $\Lambda^0 \nparallel \Lambda^1$. Пусть α — аффинное преобразование пространства V, отображающее репер (5.1) на канонический репер (1.1) группы $H_4[\omega]$ так, что при этом $\alpha(C) = O$, $\alpha(b_2) = e_{12}$, $\alpha(b_3) = e_{11}$, $\alpha(b_1) = e_p$, $\alpha(b_i) = e_{i-3}$, $i \ge 4$. Тогда $\alpha M_4 \alpha^{-1} = M_{41}$, $\alpha\gamma^{(1)}\alpha^{-1} = \gamma_\omega^{(a)}$, где $\omega = a^{-1} \sum\limits_{j=4}^{n} A_j x_{j-3}$. Поэтому из теоремы 2.3 следует, что группа $\operatorname{cl} \left\langle M_4 \cup \{\gamma^{(0)}, \gamma^{(1)}\}\right\rangle$ аффинно эквивалентна $H_4[\omega]$ и для каждого вещественного t содержит отражение $\gamma^{(t)}$ относительно прямой $\dfrac{y_1 - at}{0} = \dfrac{y_2}{1} = \dfrac{y_3}{at} = \dfrac{y_4}{0} = \ldots = \dfrac{y_n}{0}$ в направлении гиперплоскости $y_2 + t\theta = 0$. При этом группа $\operatorname{cl} \left\langle M_4 \cup \{\gamma^{(0)}, \gamma^{(1)}\}\right\rangle$ совпадает с $\langle M_4 \cup M_0\rangle$, где $M_0 = \{\gamma^{(t)} : t \in \mathbb{R}\}$, и содержит однопараметрическую подгруппу $(\gamma^{(t)}\gamma^{(0)} : t \in \mathbb{R})$ с производящим оператором $D = (y_1' = a,\;\; y_2' = \theta,\;\; y_3' = a y_2)$.

Покажем, что $M_4 \cup M_0$ — множество всех отражений, принадлежащих $\operatorname{cl} H$.

Пусть $\gamma^{(0)} \neq \gamma' \in \operatorname{cl} H \setminus M_4$. Так же, как и $\gamma^{(1)}$, отражение γ' определяет лежащую в $\operatorname{cl} H$ однопараметрическую группу с производящим оператором

$D' = (y_1' = a',\ y_2' = \theta',\ y_3' = a'y_2)$, где $\theta' = \sum\limits_{j\geq 4} A_j' y_j$. Но $[D, D'] = (y_3' = a\theta' - a'\theta)$. Отсюда $a\theta' = a'\theta$, т.к. иначе $\mathrm{cl}\, H$ содержит однопараметрическую группу сдвигов $\exp(t[D,\, D'])$. Из $a\theta' - a'\theta = 0$ следует, что $A_j' = tA_j$ для $t = a'a^{-1}$, т.е. $\gamma' = \gamma^{(t)}$.

Теперь $H \subset \langle M_4 \cup M_0 \rangle \subset \mathrm{cl}\, H$. Но $\langle M_4 \cup M_0 \rangle$ аффинно эквивалентна $H_4[\omega]$ и поэтому замкнута. Следовательно, $\mathrm{cl}\, H = \langle M_4 \cup M_0 \rangle$.

Список литературы

[1] *В.Ф. Игнатенко*, Некоторые вопросы геометрической теории инвариантов групп, порожденных ортогональными и косыми отражениями. — Итоги науки и техники. Пробл. геометрии. ВИНИТИ, Москва (1984), т. 16, с. 195–229.

[2] *В.Ф. Игнатенко*, О геометрической теории инвариантов групп, порожденных отражениями. — Итоги науки и техники. Пробл. геометрии. ВИНИТИ, Москва (1989), т. 21, с. 155–208.

[3] *В.Ф. Игнатенко*, Алгебраические поверхности с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии. I. — Укр. геом. сб. (1989), вып. 32, с. 20–39.

[4] *А.И.Криворучко*, Об инвариантах бесконечных групп, порожденных отражениями относительно прямых. — Укр. геом. сб. (1990), вып. 33, с. 65–69.

[5] *А.И.Криворучко*, О непрерывных группах, порожденных отражениями относительно прямых. — (1987), 7 с. Деп. в УкрНИИНТИ, № 2571–Ук 87.

[6] *Р.Ф. Гантмахер*, Теория матриц. Наука, Москва (1988).

On invariant rings of the groups generated by reflections with respect to the skewstrate lines

A.I. Krivoruchko

The basic polinomial invariants of a transformation group H of the affine space V are found in the case when H satisfies the following conditions:

a) H acts on some non-cylindrical algebraic gypersuface $F \subset V$;

b) H is generated by affine reflections with respect to strate lines, some two of which are skew;

c) for every gyperplane $P \subset V$ there exist at most one strate line L such that the reflection with respect to L in the direction of P belongs to H.

Про кільця інваріантів груп, які породжені віддзеркаленням відносно мимобіжних прямих

О.І. Кріворучко

Знайдено базисні поліноміальні інваріанти групи перетворювань H афінного простору V в випадку, коли H задовольняє наступним умовам:

a) H діє на нециліндричній алгебраїчній гіперповерхні $F \subset V$;

b) H породжена віддзеркаленнями відносно прямих, серед яких хоча б дві мимобіжні;

c) для кожної гиперплощини $P \subset B$ існує не більш однієї прямої, віддзеркалення відносно якої в напрямку P належить H.