Математическая физика, анализ, геометрия
2001, т. 8, № 2, с. 115–127

Об одной теореме типа Фрагмена–Линделефа в полосе

И.И. Антыпко

Механико-математический факультет
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина

Статья поступила в редакцию 21 июня 1999 г.

Представлена И.В. Островским

Пусть $u(x,t)$ — решение уравнения $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t) = 0$ в полосе $\Pi(T) = \{(x,t) : x \in \mathbb{R} \wedge t \in [0,T]\}$, где $Q(s)$ — произвольный многочлен относительно $s \in \mathbb{C}$ с постоянными комплексными коэффициентами. В работе изучается зависимость поведения $u(x,t)$ от поведения на бесконечности функций

$$u_1(x) = u(x,0), \quad u_2(x) = \frac{\partial u(x,T)}{\partial t}$$

или

$$u_1(x) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}, \quad u_2(x) = u(x,T).$$

.

Аналитическая функция $u(z) = u(x,y)$ $(z = x + iy)$ является решением уравнения Коши–Римана

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = i \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\,.$$

Классическую теорему Фрагмена–Линделефа можно сформулировать следующим образом: *если аналитическая в полуплоскости $y \geq 0$ функция $u(z) = u(x+iy)$ удовлетворяет при $y > 0$ оценке*

$$|u(z)| \leq C_1 \exp\{C_2 |z|^\alpha\}, \quad C_1 > 0,\ C_2 > 0,\ \alpha \in (0,1),$$

Mathematics Subject Classification 2000: 35B05, 35G15.

а при $y = 0$ оценке

$$|u(x)| \leq C_3(1 + |x|)^h, \quad C_3 > 0, \ h > 0,$$

то и во всей полуплоскости верна аналогичная последней оценка

$$|u(z)| \leq C_4(1 + |z|)^h, \quad C_4 > 0.$$

Теорема типа Фрагмена–Линделефа — это утверждение о поведении в некоторой бесконечной области решений дифференциального уравнения, принадлежащих заданному классу функций, по информации относительно поведения этих решений (или их производных) на границе или в некоторой подобласти рассматриваемой области. Хорошо известны работы ([1–9] и др.), посвященные теоремам типа Фрагмена–Линделефа. Имеется лишь небольшое число работ по данной тематике (теоремы типа Фрагмена–Линделефа), в которых не налагаются какие-либо алгебраические (скажем, принадлежность к параболическому или эллиптическому типу, [2–7]) ограничения на рассматриваемые дифференциальные операторы, а также на порядок рассматриваемых уравнений (в приведенном списке литературы [1, 8, 9, 15]). В последние годы появился ряд статей ([10–15]), посвященных данной тематике. Работы [1, 9, 15] посвящены теоремам типа Фрагмена–Линделефа для решений нелокальных краевых задач в слое, причем в [1] исследуется решение задачи Дирихле, а в [15] — задачи Неймана для эволюционного уравнения второго порядка по временной переменной.

В настоящей работе изучается поведение решений уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t) = 0, \tag{1}$$

заданного в полосе $\Pi(T) = \mathbb{R} \times [0, T]$, в зависимости от поведения на бесконечности функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$, где

$$u_1(x) = u(x,0), \quad u_2(x) = \frac{\partial u(x,T)}{\partial t} \tag{2}$$

или

$$u_1(x) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}, \quad u_2(x) = u(x,T). \tag{2'}$$

Здесь $Q(s)$ — произвольный многочлен с постоянными комплексными коэффициентами относительно $s \in \mathbb{C}$; $u \in \mathbb{C}$.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть многочлен $Q(s)$ удовлетворяет условию*

$$4T^2 Q(i\sigma) \neq \pi^2(2k+1)^2 \tag{3}$$

для всех $\sigma \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пусть решение $u(x,t)$ *уравнения (1) в полосе* $\Pi(T)$ *удовлетворяет следующим оценкам:*

$$1)\quad |u(x,t)| \le C_1 exp\left\{C_2|x|^\nu\right\}, \quad C_1>0, \quad C_2>0, \quad \nu\in(0,1), \tag{4}$$

$$2)\quad \max_{q\le m}\left(\left|\frac{d^q u_1(x)}{dx^q}\right| + \left|\frac{d^q u_2(x)}{dx^q}\right|\right) \le C_3\,(1+|x|)^h, \quad C_3>0, \quad h\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Тогда если m *достаточно велико, то для функции* $u(x,t)$ *справедлива оценка*

$$|u(x,t)| \le C_4(1+|x|)^h, \quad C_4>0, \quad (x,t)\in\Pi(T). \tag{6}$$

При доказательстве этой теоремы использован метод преобразования Фурье [16]. Доказательство оценок решения рассматриваемого уравнения основано на анализе явной формулы для решений “двойственного" уравнения, полученного после преобразования Фурье (по x) уравнения вида (1). Ключевым пунктом доказательства основной теоремы (теоремы 1) является использование (см. лемму 1) теоремы Тарского–Зайденберга и ее следствий [17, Добавление А].

§ 1. Вспомогательные факты

Рассмотрим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 v(s,t)}{dt^2} = -Q(is)v(s,t), \tag{7}$$

$$v(s,0)=v_1(s), \quad v_t'(s,T)=v_2(s) \tag{8}$$

или

$$v_t'(s,0)=v_1(s), \quad v(s,T)=v_2(s). \tag{8'}$$

Здесь $s\in\mathbb{C}$ — параметр, $s=\sigma+i\tau$, $\sigma,\tau\in\mathbb{R}$.

Нетрудно видеть, что решение $v(s,t)$ задачи (7), (8) ((7), (8′)) записывается в виде

$$v(s,t)=R_1(s,t)v_1(s)+R_2(s,t)v_2(s), \tag{9}$$

где если $Q(is)\neq 0$, для задачи (7), (8)

$$\begin{aligned} R_1(s,t) &= \frac{e^{-t\sqrt{-Q(is)}}\left(1+e^{-2(T-t)\sqrt{-Q(is)}}\right)}{1+e^{-2T\sqrt{-Q(is)}}}, \\ R_2(s,t) &= \frac{e^{-(T-t)\sqrt{-Q(is)}}\left(1-e^{-2t\sqrt{-Q(is)}}\right)}{\sqrt{-Q(is)}\left(1+e^{-2T\sqrt{-Q(is)}}\right)}, \end{aligned} \tag{10}$$

а для задачи (7), (8′)

$$
\begin{aligned}
R_1(s,t) &= \frac{e^{-t\sqrt{-Q(is)}}\left(e^{-2(T-t)\sqrt{-Q(is)}}-1\right)}{\sqrt{-Q(is)}\left(1+e^{-2T\sqrt{-Q(is)}}\right)},\\
R_2(s,t) &= \frac{e^{-(T-t)\sqrt{-Q(is)}}\left(1+e^{-2t\sqrt{-Q(is)}}\right)}{1+e^{-2T\sqrt{-Q(is)}}},
\end{aligned}
\tag{10′}
$$

если же $Q(is)=0$, то

$$R_1(s,t)=1, \quad R_2(s,t)=t \tag{11}$$

для задачи (7), (8) и

$$R_1(s,t)=t-T, \quad R_2(s,t)=1 \tag{11′}$$

для задачи (7), (8′).

Формулы (10), (10′) имеют смысл при всех $s\in\mathbb{C}$, для которых $4T^2Q(is)\neq \pi^2(2k+1)^2$, $k\in\mathbb{Z}$. В качестве $\sqrt{-Q(is)}$ выбрана та ветвь, на которой $\operatorname{Re}\sqrt{-Q(is)}\geq 0$.

В дальнейшем нам понадобятся оценки производных функций $R_j(\sigma,t)$, $j=1,2$, при $\sigma\in\mathbb{R}$.

Лемма 1. *Пусть многочлен $Q(s)$ удовлетворяет условию (3). Тогда при всех $\sigma\in\mathbb{R}$, $t\in[0,T]$ и для любого $q\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$ справедлива оценка*

$$|D_\sigma^q R_j(\sigma,t)|\leq M(q)(1+|\sigma|)^{\theta+q|\lambda|}, \quad j=1,2, \tag{12}$$

с некоторыми $\theta\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ и $M(q)>0$.

Доказательство. Докажем вначале для функции $\delta(s)\equiv 1+e^{-2T\sqrt{-Q(is)}}$ оценку

$$|\delta(\sigma+i\tau)|\geq M(1+|\sigma|)^m, \qquad (\sigma,\tau)\in\Omega_{L,\gamma}, \tag{13}$$

где $\Omega_{L,\gamma}=\left\{(\sigma,\tau)\in\mathbb{R}^2:|\tau|\leq L(1+|\sigma|)^\gamma\right\}$, здесь $M>0$, $L>0$, $m\in\mathbb{R}$, $\gamma\in\mathbb{R}$. Заметим, что $\delta(\sigma)\neq 0$ при всех $\sigma\in\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (3) при всех $\sigma\in\mathbb{R}$ и $k\in\mathbb{Z}$.

Обозначим $Q_1(\sigma,\tau)\equiv\operatorname{Re}\left(-4T^2Q(is)\right)$, а $Q_2(\sigma,\tau)\equiv\operatorname{Im}\left(-4T^2Q(is)\right)$, $s=\sigma+i\tau$, $\sigma,\tau\in\mathbb{R}$. Тогда система

$$
\left\{
\begin{array}{l}
Q_1(\sigma,\tau)=\mu^2-\nu^2\\
Q_2(\sigma,\tau)=2\mu\nu\\
\mu\leq 0
\end{array}
\right.
\tag{14}
$$

для всех $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$ определяет функции $\mu(\sigma,\tau)$ и $\nu(\sigma,\tau)$ со значениями в $\mathbb{R}$ такие, что $\mu(\sigma,\tau) \equiv \mathrm{Re}\left(-2T\sqrt{-Q(is)}\right)$, $\nu(\sigma,\tau) \equiv \mathrm{Im}\left(-2T\sqrt{-Q(is)}\right)$. Поскольку $Q_1(\sigma,0)$ и $Q_2(\sigma,0)$ — полиномы, то множество

$$E = \left\{(\mu,\nu,\sigma) \in \mathbb{R}^3 : Q_1(\sigma,0) - \mu^2 + \nu^2 = 0 \wedge Q_2(\sigma,0) - 2\mu\nu = 0 \wedge \mu \le 0\right\}$$

полуалгебраично [17, Добавление A].

Функцию $\mu(\sigma,0)$ можно записать в виде

$$\mu(\sigma,0) \equiv \sup\left\{\mu \in \mathbb{R} : \exists \nu \in \mathbb{R} \quad (\mu,\nu,\sigma) \in E\right\}.$$

Пользуясь следствиями теоремы Тарского–Зайденберга, доказанными в работе [17, Добавление A], получаем, что функция $\mu(\sigma,0)$ полуалгебраична и

$$\mu(\sigma,0) = M_\pm|\sigma|^{m_\pm}\left(1 + o(1)\right), \qquad \sigma \to \pm\infty,$$

где $M_\pm \in \mathbb{R}$, $m_\pm \in \mathbb{Q}$.

Предположим вначале, что $\sigma \ge 0$. Тогда

$$\mu(\sigma,0) = M_+|\sigma|^{m_+}\left(1 + o(1)\right), \qquad \sigma \to +\infty.$$

Для $\mu(\sigma,0)$ выполняется одно из двух утверждений:

i) $\mu(\sigma,0) \equiv 0, \qquad \sigma > a;$

ii) $\mu(\sigma,0) \not\equiv 0, \qquad \sigma > a;$

где a достаточно велико.

Рассмотрим i). Из (14) получаем, что при $\sigma > a$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} Q_1(\sigma,0) \ne -\pi^2(2k+1)^2, \\ Q_2(\sigma,0) \equiv 0. \end{cases}$$

Значит, будучи полиномом, $Q_2(\sigma,0) \equiv 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Но тогда первое равенство системы (14) показывает, что полином $Q_1(\sigma,0)$ неположителен при всех значениях $\sigma \in \mathbb{R}$, а тогда из неравенств $Q_1(\sigma,0) \ne -\pi^2(2k+1)^2$, $k \in \mathbb{Z}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, следует, что $Q_1(\sigma,0) \equiv \mathrm{const}$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Значит, $Q(i\sigma) \equiv \mathrm{const}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, откуда получаем, что полином $Q(s) \equiv \mathrm{const} \le 0$, $s = \sigma + i\tau$. Следовательно, $\delta(s) \equiv \mathrm{const} \ne 0$, $s \in \mathbb{C}$, и оценка (13) выполняется при $m = 0$ и любых $L > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Далее рассмотрим ii). В этом случае $M_+ < 0$ и существует $b > 0$ такое, что для всех $\sigma \ge b$ выполняется неравенство

$$|\mu(\sigma)| > \frac{|M_+|}{2}(1+\sigma)^{m_+}.$$

Введем в рассмотрение полуалгебраическое множество

$$\Omega = \left\{(\sigma,\tau)\in\mathbb{R}^2 : \sigma\ge b \wedge |\mu(\sigma,\tau)| \ge \frac{|M_+|}{3}(1+\sigma)^{m_+}\right\}$$

$$= \left\{(\sigma,\tau)\in\mathbb{R}^2 : \sigma\ge b \wedge \left[\exists\mu\in\mathbb{R}\quad \exists\nu\in\mathbb{R}\quad Q_1(\sigma,\tau)=\mu^2-\nu^2\right.\right.$$

$$\left.\left.\wedge Q_2(\sigma,\tau) = 2\mu\nu \wedge \mu^{2p} > \left(\frac{|M_+|}{3}\right)^{2p}(1+\sigma)^{2l}\right]\right\},$$

где $m_+ = \frac{l}{p}$.

Дополнение полуалгебраического множества является полуалгебраическим множеством, поэтому функция $\xi(\sigma) = \inf\{|\tau| : (\sigma,\tau)\notin\Omega\}$ полуалгебраическая и

$$\xi(\sigma) = \Gamma\sigma^\gamma\left(1+\overline{o}(1)\right), \qquad \sigma\longrightarrow+\infty,$$

или

$$\xi(\sigma) = +\infty, \qquad \sigma\longrightarrow+\infty,$$

где $\Gamma>0$ и $\gamma\in Q$ [17, Добавление A], откуда следует, что существует $c\ge b$ такое, что для всех $\sigma\ge c$

$$\xi(\sigma)\ge\frac{\Gamma}{2}(1+\sigma)^\gamma.$$

Множество

$$W = \left\{(\sigma,\tau)\in\mathbb{R}^2 : \sigma\ge c\wedge|\tau|\le\frac{\Gamma}{2}(1+\sigma)^\gamma\right\}\subset\Omega\,;$$

следовательно, для всех $(\sigma,\tau)\in W$

$$|\mu(\sigma,\tau)|\ge\frac{|M_+|}{3}(1+\sigma)^{m_+}.$$

Оценим снизу функцию $|1+e^\omega|$ при всех $\omega\in\mathbb{C}$. Рассмотрим два случая.

1) Так как $\lim\limits_{\omega\to\pi i}\frac{1+e^\omega}{\omega-\pi i} = -1$, то существует $\delta>0$ такое, что $\left|\dfrac{1+e^\omega}{\omega-\pi i}\right|\ge\dfrac{1}{2}$, если $|\omega-\pi i|<\delta$. Тогда для любого $k\in\mathbb{Z}$ выполняется неравенство

$$|1+e^\omega|\ge\frac{1}{2}|\omega-(2k+1)\pi i|,$$

когда $|\omega-(2k+1)\pi i|<\delta$.

2) Пусть $|\omega-(2k+1)\pi i|\geq\delta$ при любом $k\in\mathbb{Z}$. Очевидно, достаточно рассмотреть компакт $|\operatorname{Re}\omega|\leq 1$, $0\leq\operatorname{Im}\omega\leq 2\pi$, из которого изъят круг $|\omega-\pi i|\leq\frac{\delta}{2}$, где непрерывная, не обращающаяся в нуль функция $|1+e^{\omega}|$ ограничена снизу положительной константой, т.е. существует $K_1>0$ такое, что $|1+e^{\omega}|\geq K_1$, а также $|1+e^{\omega}|\geq K_1$ при $|\operatorname{Re}\omega|\geq 1$, $0\leq\operatorname{Im}\omega\leq 2\pi$.

Следовательно, для любых $(\sigma,\tau)\in W$ таких, что при некотором $k\in\mathbb{Z}$ $\left|-2T\sqrt{-Q(is)}-(2k+1)\pi i\right|<\delta$, получаем

$$|\delta(s)|\geq\frac{1}{2}\left|-2T\sqrt{-Q(is)}-(2k+1)\pi i\right|\geq\frac{1}{2}|\mu(s)|\geq\frac{|M_+|}{3}(1+\sigma)^{m_+},\tag{15}$$

$(s=\sigma+i\tau)$, а при остальных $(\sigma,\tau)\in W$ получаем $|\delta(s)|\geq K_1>0$. Поскольку функция $\delta(\sigma)\neq 0$ на $[0,c]$, то существует $D>0$ такое, что эта функция не обращается в нуль на $\widetilde{W}=\{(\sigma,\tau)\in\mathbb{R}^2\ :\ 0\leq\sigma\leq c\wedge|\tau|\leq D(1+|\sigma|)^{\gamma}\}$. Поскольку $\widetilde{W}$ — компакт, то существует $K_2>0$ такое, что

$$|\delta(\sigma+i\tau)|\geq K_2,\qquad(\sigma,\tau)\in\widetilde{W}.$$

Используя (15), получаем, что при $\sigma\geq 0$ выполняется оценка

$$|\delta(\sigma+i\tau)|\geq\widetilde{M}(1+|\sigma|)^{\widetilde{m}},\qquad(\sigma,\tau)\in\Omega_{L,\gamma}\,,\tag{16}$$

где $\widetilde{M}=\min\{|M_+|/6,K_1,K_2\}$, $\widetilde{m}=\min\{m_+,0\}$, $L=\min\{\Gamma/2,D\}$. Ясно, что при $\sigma\leq 0$ для $\delta(\sigma+i\tau)$ выполняется оценка вида (16) (с другими $\widetilde{M}$ и $\widetilde{m}$).

Таким образом, мы доказали справедливость оценки (13).

Оценим теперь производные функций $R_j(\sigma,t)$, $j=1,2$.

Легко видеть, что формулы (10)–(11′) и оценка (13) при всех $(\sigma,\tau)\in\Omega_{L,\gamma}$ приводят к оценке

$$|R_j(s,t)|\leq C(1+|\sigma|)^{\theta}\exp\Big\{-C(t)\operatorname{Re}\sqrt{-Q(is)}\Big\},\qquad j=1,2,\tag{17}$$

при некоторых $\theta\geq 0$, $C>0$, $0\leq C(t)\leq T$.

Оценим $D_\sigma^q R_j(\sigma,t)$, $j=1,2$, используя (17) и формулу Коши и выбирая в качестве контура интегрирования границу круга с центром в точке $\sigma\in\mathbb{R}$, лежащего в области $\Omega_{L,\gamma}$:

$$D_\sigma^q R_j(\sigma,t)=\frac{q!}{2\pi i}\int\limits_{l_\sigma}\frac{R_j(s,t)}{(s-\sigma)^{q+1}}ds,$$

$$l_\sigma=\Big\{s\in\mathbb{C}:|s-\sigma|=R_\sigma=L'(1+|\sigma|)^{\lambda}\Big\},\quad\lambda=\min\{0;\gamma\}.$$

Ясно, что если L' достаточно мало, то $l_\sigma \subset \Omega_{L,\gamma}$. Используя (17), заключаем, что для любого q справедливы неравенства

$$|D_\sigma^q R_j(\sigma,t)| \le M(q)(1+|\sigma|)^{\theta+|\lambda|q}, \quad j=1,2.$$

Лемма доказана.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Обозначим через $u(x,t)$ решение краевой задачи (1), (2), удовлетворяющее условиям (4), (5) (величина m будет указана ниже).

Идея доказательства заключается в следующем. Представим функции $u_j(x)$, $j=1,2$, в виде рядов финитных функций

$$u_j(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_{jk}(x-k),$$

где функции $u_{jk}(x)$ обращаются в нуль при $|x|\ge 1$. Решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям $u_{jk}(x)$, обозначим $u_k(x,t)$. Покажем, что ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k(x,t),$$

сходится и представляет искомое решение.

Обозначим через $e(x)$ функцию со следующими свойствами:

a) $e(x)\in C_0^\infty$ (финитная бесконечно дифференцируемая функция, $x\in\mathbb{R}$);

b) $e(x)\equiv 0$ при $|x|>\frac{3}{4}$;

c) $e(x)\equiv 1$ при $|x|<\frac{1}{4}$;

d) $e(x-1)\equiv 1-e(x)$ при $x\in(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$;

e) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} e(x-k)\equiv 1$.

Тогда

$$u_j(x) = u_j(x)\sum_{k\in\mathbb{Z}} e(x-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_{jk}(x-k),$$

где $u_{jk}(x)=u_j(x+k)e(x)$, $k\in\mathbb{Z}$, $j=1,2$.

Обозначим через $v_{jk}(\sigma)\equiv F\{u_{jk}(x)\}$ преобразование Фурье функций $u_{jk}(x)$. Если $u_j(x)\in C^m(\mathbb{R})$, то для любых натуральных $\alpha\le m$ и β

$$|\sigma^\alpha D_\sigma^\beta v_{jk}(\sigma)| = \left|\int\limits_{|x|\le 1} D_x^\alpha\left(x^\beta u_{jk}(x)\right)e^{-i\sigma x}dx\right|. \tag{18}$$

Оценим (18), используя (5). Тогда

$$|\sigma^\alpha D_\sigma^\beta v_{jk}(\sigma)| \le \int\limits_{|x|\le 1} \left(\left|D_x^\alpha\left(x^\beta u_{1k}(x)\right)\right| + \left|D_x^\alpha\left(x^\beta u_{2k}(x)\right)\right|\right) dx$$

$$\le C_{\alpha\beta} \int\limits_{|x|\le 1} (1+|x+k|)^h\, dx \le C'\,(1+|k|)^h\ ; \qquad (19)$$

здесь $k \in \mathbb{Z}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, постоянная $C' = C'(m,\beta,h)$ не зависит от σ и k.

Далее оценим при любом $\alpha \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ функции $D_\sigma^\alpha v_k(\sigma,t)$, $(\sigma,t) \in \Pi(T)$, где $v_k(\sigma,t) = R_1(\sigma,t)v_{1k}(\sigma) + R_2(\sigma,t)v_{2k}(\sigma)$, $k \in \mathbb{Z}$ — любое. Из (12) и (19) имеем

$$|D_\sigma^\alpha v_k(\sigma,t)| \le A(m,\alpha,h)(1+|\sigma|)^{\theta+\alpha|\lambda|-m}(1+|k|)^h,$$

откуда для любых $\alpha \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ и $\rho \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ заключаем, что

$$|D_\sigma^\alpha\{\sigma^\rho v_k(\sigma,t)\}| \le B(m,\alpha,h,\rho)(1+|\sigma|)^{\theta+\alpha|\lambda|-m+\rho}(1+|k|)^h. \qquad (20)$$

Теперь для функции $u_k(x,t)$, $k \in \mathbb{Z}$ (преобразования Фурье функции $v_k(\sigma,t)$) в предположении $m > 2+\theta+\alpha|\lambda|+\rho$ получаем оценку

$$|x^\alpha D_x^\rho u_k(x,t)\}| \le C(1+|k|)^h, \qquad (21)$$

где $(x,t) \in \Pi(T)$, а C не зависит от k, x, и t.

Из (21) имеем

$$|D_x^\rho u_k(x,t)\}| \le C'(1+|k|)^h(1+|x|)^{-\alpha}. \qquad (22)$$

Зафиксируем теперь $\rho_1 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ и $\rho_2 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\rho_1 \ge \deg Q(s), \quad \rho_2 > 1+|h|,$$

и выберем m из условия: $m > \rho_1+\theta+\rho_2|\lambda|+1$. В силу легко проверяемого неравенства при любых $h \in \mathbb{R}$

$$(1+|k|)^h(1+|x|)^{-h} \le (1+|k-x|)^{|h|}$$

и оценки (22) при $\rho \le \rho_1$ и $\alpha = \rho_2$ получаем

$$|D_x^\rho u_k(x-k,t)| \le C''(1+|k|)^h(1+|x-k|)^{-\rho_2}$$

$$\le C''(1+|x|)^h(1+|x-k|)^{|h|-\rho_2},$$

откуда следует, что ряд

$$\widetilde{u}(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k(x-k,t),$$

а также ряды, получаемые его почленным дифференцированием до порядка ρ_1, сходятся равномерно на каждом компакте в $\Pi(T)$. Поэтому функция $\widetilde{u}(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) и оценке

$$|\widetilde{u}(x,t)| \leq C''(1+|x|)^h \sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|x-k|)^{|h|-\rho_2} \leq\leq C'''(1+|x|)^h. \qquad (23)$$

Наконец,

$$\widetilde{u}(x,0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k(x-k,0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_{1k}(x-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e(x-k)u_1(x) = u_1(x)$$

и

$$\frac{\partial\widetilde{u}(x,T)}{\partial t} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\partial u_k(x-k,T)}{\partial t} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_{2k}(x-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e(x-k)u_2(x) = u_2(x),$$

откуда

$$\widetilde{u}(x,0) = u_1(x), \quad \frac{\partial\widetilde{u}(x,T)}{\partial t} = u_2(x).$$

Следовательно, функция $\widetilde{u}(x,t)$ является решением краевой задачи (1), (2). Но условие (3) теоремы обеспечивает единственность решения краевой задачи в классе функций, удовлетворяющих оценке (4) (см. теорему 9 в [18]).

Таким образом, оценка (23) убеждает в справедливости утверждения теоремы.

Для краевой задачи (1), (2′) доказательство теоремы проводится аналогично.

§ 3. Анализ условий теоремы 1

Покажем необходимость условия (3).

П р и м е р 1. Пусть при некоторых $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ и $k_0 \in \mathbb{Z}$ $\quad 4T^2Q(i\sigma_0) = \pi^2(2k_0+1)^2$. Тогда функция

$$u_1(x,t) = e^{i\sigma_0 x}\operatorname{sh}\sqrt{-Q(i\sigma_0)}t$$

является решением уравнения (1), удовлетворяющим краевым условиям

$$u(x,0) \equiv 0, \quad \frac{\partial u(x,T)}{\partial t} \equiv 0,$$

а функция

$$u_2(x,t) = e^{i\sigma_0 x}\operatorname{ch}\sqrt{-Q(i\sigma_0)}t -$$

решением уравнения (1), удовлетворяющим краевым условиям

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} \equiv 0, \quad u(x,T) \equiv 0.$$

Функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ удовлетворяют условию (4), а условие (5) выполняется при любых $h \in \mathbb{R}$ и $m \in \mathbb{N}$. Однако при $h < 0$ теорема не верна.

В заключение покажем, что условие (4) теоремы существенно ослабить нельзя, заменив его оценкой

$$|u(x,t)| \leq C \exp\{a|x|\}, \quad a > 0, \quad C > 0. \tag{24}$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + iu(x,t) \tag{25}$$

в полосе $\mathbb{R} \times [0, \frac{1}{2}]$. Условие (3) теоремы выполнено. Найдем $k \in \mathbb{N}$ из условия $\left|\operatorname{Im}\sqrt{\pi^2(2k+1)^2 + i}\right| < a$. Нетрудно проверить, что функция

$$u(x,t) = \sin(\pi t(2k+1)) \exp\left\{-ix\sqrt{\pi^2(2k+1)^2 + i}\right\}$$

удовлетворяет уравнению (25) и краевым условиям

$$u(x,0) \equiv 0, \quad \frac{\partial u(x,1/2)}{\partial t} \equiv 0.$$

Для этого решения выполнены условия (24) и (5) с любыми $m \in \mathbb{N}$ и $h \in \mathbb{R}$. Однако результат теоремы неверен для $u(x,t)$ при любом $h \in \mathbb{R}$.

Возможность такого примера обусловлена тем, что нули многочлена $4T^2Q(is) - \pi^2(2k+1)^2$ попадают в любую полоску, содержащую вещественную ось. В ситуации, когда это не так, теорему 1 можно усилить.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие (5) и при* $|\operatorname{Im} s| \leq \tau_0$, $\tau_0 > 0$, $k \in \mathbb{Z}$ *многочлен* $4T^2Q(is) - \pi^2(2k+1)^2$ *не обращается в нуль. Тогда теорема 1 справедлива для решений задачи (1), (2) ((1), (2′)), удовлетворяющих в полосе* $\Pi(T)$ *оценке*

$$|u(x,t)| \leq C \exp\{\tau_0|x|\}, \quad C > 0, \tag{26}$$

а на ее границе — оценкам (5) при достаточно большом m.

Доказательство теоремы 2 отличается от доказательства теоремы 1 лишь на завершающем этапе, когда вместо теоремы 9 из [18] следует воспользоваться теоремой 6 из той же работы, гарантирующей единственность решений в классе функций, удовлетворяющих оценке (26).

Список литературы

[1] *В.М. Борок*, Теорема типа Фрагмена–Линделефа для решений некоторых дифференциальных уравнений в бесконечном слое. — *Докл. АН СССР* (1969), т. 184, № 1, с. 9–11.

[2] *Е.М. Ландис*, Теоремы типа Фрагмена–Линделефа для решений эллиптических уравнений высокого порядка. — *Докл. АН СССР* (1970), т. 193, № 1, с. 32–35.

[3] *Е.М. Ландис*, О поведении решений эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченных областях. — *Тр. Моск. мат. о-ва* (1974), т. 31, с. 35–58.

[4] *О.А. Олейник, Е.В. Радкевич*, Аналитичность и теоремы Лиувилля и Фрагмена–Линделефа для общих эллиптических систем дифференциальных уравнений. — *Мат. сб.* (1974), т. 95, № 1, с. 130–145.

[5] *О.А. Олейник, Е.В. Радкевич*, Аналитичность и теоремы Лиувилля и Фрагмена–Линделефа для общих параболических систем. — *Функц. анализ и его прил.* (1974), т. 8, № 4, с. 59–70.

[6] *Е.М. Ландис*, Об одной теореме Фрагмена–Линделефа для решений эллиптических уравнений. — *Успехи мат. наук* (1975), т. 30, № 5, с. 213.

[7] *О.А. Олейник*, Теоремы Лиувилля и Фрагмена–Линделефа для эллиптических систем. — *Успехи мат. наук* (1980), т. 35, № 4, с. 171–172.

[8] *Н.Н Чаус*, Вариант теоремы Фрагмена–Линделефа для решений системы дифференциальных уравнений. — *Диф. ур.* (1977), т. 13, № 10, с. 1897–1899.

[9] *В.М. Борок,* Теорема типа Фрагмена–Линделефа для решений линейного дифференциального уравнения в слое. — *Изв. вузов. Сер. мат.* (1989), № 1, с. 25-32.

[10] *V. Kalantarow and F. Tahamtani*, Phragmen–Lindelöf principle for a class if fourth-order nonlinear eliptic equations. — *Bull. Iranian Math. Soc.* (1994), v. 20, No. 2, p. 41–52.

[11] *Francen Uwe*, On the equivalence of holomorphic and plurisubharmonic Phragmen–Lindelöf principles. — *Mich. Math. J.* (1995), v. 42, No. 1, p. 163–173.

[12] *Lin Chang Hao*, A Phragmen–Lindelöf alternative for a class of second order quasilinear equations in $\mathbb{R}^3$. — *Acta Math. Sci.* (1996), v. 16, No. 2, p. 181–191.

[13] *Cai Chong Xi*, A Phragmen–Lindelöf alternative theorem for the beharmonic equation. — *Acta Math. Sci. Natur. Univ. Sunyatseni* (1996), v. 35, No. 2, p. 15–20.

[14] *М.М. Бокало*, Апріорна оцінка розв'язку та теорема типу Фрагмена–Ліндельофа для деяких квазілінійних параболічних систем у необмежених областях. — *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* (1996), № 45, с. 26–35.

[15] *И.И. Антыпко*, Теорема типа Фрагмена–Линделефа для решений эволюционного уравнения второго порядка по временной переменной. — *Укр. мат. журн.* (1998), т. 50, № 5, с. 718–725.

[16] *И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов*, Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. Физматгиз, Москва (1958).

[17] *Л. Хермандер,* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 2. Мир, Москва (1986).

[18] *В.М. Борок,* Классы единственности решений краевой задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений. — *Мат. сб.* (1969), т. 49, № 2, с. 293–304.

On a Phragmen–Lindelöf type theorem in the strip

I.I. Antypko

Let $u(x,t)$ be a solution of the equation $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t) = 0$ in the strip $\Pi(T) = \{(x,t) : x \in \mathbb{R} \wedge t \in [0,T]\}$, where $Q(s)$ is an arbitrary polynomial with respect to $s \in \mathbb{C}$ with constant complex coefficients. In the paper the dependence of the behavior of $u(x,t)$ on the functions

$$u_1(x) = u(x,0), \quad u_2(x) = \frac{\partial u(x,T)}{\partial t}$$

or

$$u_1(x) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}, \quad u_2(x) = u(x,T),$$

at infinity is studied.

Про одну теорему типу Фрагмена-Ліндельофа на смузі

I.I. Антипко

Нехай $u(x,t)$ — розв'язок рівняння $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t) = 0$ на смузі $\Pi(T) = \{(x,t) : x \in \mathbb{R} \wedge t \in [0,T]\}$, де $Q(s)$ — довільний многочлен відносно $s \in \mathbb{C}$ із сталими комплексними коефіцієнтами. В роботі вивчається залежність поведінки $u(x,t)$ від поведінки на нескінченності функцій

$$u_1(x) = u(x,0), \quad u_2(x) = \frac{\partial u(x,T)}{\partial t}$$

або

$$u_1(x) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}, \quad u_2(x) = u(x,T).$$