Математическая физика, анализ, геометрия
2001, т. 8, № 2, с. 143–147

Дополнение к одной теореме Дж. Клуни

А.А. Гольдберг

Department of Mathematics, Bar-Ilan University
Ramat-Gan, 52900 Israel
E-mail:goldbea@macs.biu.ac.il

Статья поступила в редакцию 15 января 2001 г.
Представлена И.В. Островским

В 1962 году Дж. Клуни доказал, что если мероморфная в конечной плоскости функция имеет конечное число полюсов и нулей и вторая производная от нее имеет конечное число нулей, то функция имеет конечный порядок. В заметке выводится формула для этого порядка, выражающая его через числа нулей и полюсов функции и ее первой и второй производной. ·

Известна следующая теорема Дж. Клуни [1; 2, гл. 3, §3.5].

Теорема. *Предположим, что функция $f(z)$ мероморфна и имеет конечное число полюсов в конечной плоскости и что $f(z)$, $f^{(k)}(z)$ имеют только конечное число нулей при некотором $k \geq 2$. Тогда*

$$f(z) = \frac{P_1(z)}{P_2(z)} e^{P_3(z)}, \tag{1}$$

где P_1, P_2, P_3 — многочлены. Далее, если $f(z)$ и $f^{(k)}(z)$ совсем не имеют нулей, то $f(z) = e^{Az+B}$ или $f(z) = (Az+B)^{-n}$.

В этой заметке утверждение теоремы дополняется указанием на степень многочлена P_3, т.е. указанием порядка функции $f(z)$. Это дополнение было установлено автором [3], но в доказательстве были существенные пробелы.

Будем считать, что f — трансцендентная функция, удовлетворяющая условиям теоремы Клуни и, следовательно, допускающая представление (1). Из (1) следует, что $f^{(l)}(z)$ имеет конечное число нулей при всех $l \in \mathbf{N}$. Обозначим через $\varphi(z)$ функцию $f^{(k-1)}(z)$. Пусть $w = \varphi(z)$ отображает $\mathbf{C}$ на

·Mathematics Subject Classification 2000: 30D35, 30F10.

некоторую риманову поверхность S. По теореме Клуни f, а следовательно, и φ имеют конечный порядок. Так как φ' имеет конечное число нулей, то S имеет конечное число алгебраических точек ветвления. Производная Шварца от φ

$$\frac{\varphi'''}{\varphi'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2 = \mathcal{R} \tag{2}$$

имеет в $\mathbf{C}$ полюсы (все второго порядка) в нулях φ' и в полюсах φ и только в этих точках [4]. Следовательно, $N(r, \mathcal{R}) = O(\log r)$, $r \to \infty$. По лемме о логарифмической производной

$$m(r, \mathcal{R}) \le m(r, \frac{\varphi'''}{\varphi'}) + 2m(r, \frac{\varphi''}{\varphi'}) + O(1) = O(\log r), \quad r \to \infty\,.$$

Значит, $T(r, \mathcal{R}) = O(\log r)$, $r \to \infty$, и $\mathcal{R}$ — рациональная функция. Решения уравнения (2), где $\mathcal{R}$ — рациональная функция, подробно изучены [4, 5]. Можно утверждать, что S — риманова поверхность с конечным числом q логарифмических концов, с q логарифмическими точками ветвления над 0 и с q логарифмическими точками ветвления над ∞, $\deg P_3 = q$. Пусть $\mathcal{K}$ — комплекс отрезков, изображающий S, $\{a_1, \dots, a_s\}, a_{s-1} = 0, a_s = \infty$ — множество базисных точек S. Предположим, что в точку a_j проектируются ν_j алгебраических точек ветвления S с порядками * $\lambda_1(a_j), \dots, \lambda_{\nu_j}(a_j)$. Через μ_j обозначим число простых точек S, проектирующихся в a_j. Проведем на плоскости, в которой лежит комплекс отрезков $\mathcal{K}$, замкнутую жорданову кривую J так, что в ее внешности $\mathrm{ext}J$ лежат все узлы, входящие в логарифмические концы комплекса отрезков $\mathcal{K}$, за исключением конечного числа узлов, лежащих в $\mathrm{int}J$ — внутренности J, при этом, если оба конца отрезка лежат в $\mathrm{ext}J$, то и весь отрезок лежит в $\mathrm{ext}J$. Все узлы и отрезки, принадлежащие ядру комплекса $\mathcal{K}$, лежат в $\mathrm{int}J$. Что касается комплексов отрезков, то мы придерживаемся терминологии из [6, гл. 7, §4]. Отобразим $\mathrm{int}J$ гомеоморфно на $\mathbf{C}_- = \{z : \mathrm{Im} z < 0\}$ так, чтобы J гомеоморфно отображалась на $\{z : \mathrm{Im} z = 0\}$. Тогда $\mathcal{K} \bigcap (\mathrm{int}J)$ переходит в некоторый граф $\mathcal{K}_-$. Пусть $\psi(z) = \overline{z}$ переводит $\mathcal{K}_-$ в некоторый граф $\mathcal{K}_+$. Образы внутренних узлов в $\mathcal{K}_+$ будем считать внешними узлами, а образы внешних узлов — внутренними узлами (т.е. при отображении $\psi(z)$ точки на $\mathcal{K}_-$ переходят в крестики на $\mathcal{K}_+$, а крестики на $\mathcal{K}_-$ — в точки на $\mathcal{K}_+$). Нетрудно проверить, что граф $\mathcal{K}' = \mathcal{K}_- \bigcup \mathcal{K}_+$ является комплексом отрезков некоторой римановой поверхности S' (выполняются условия 1)–4) из [6, с. 460–461]. У S' то же множество базисных точек $\{a_1, a_2, \dots, a_s\}$, что и у S. Обозначения ν_j', $\lambda_i'(a_j)$, μ_j' имеют тот же смысл, что и ν_j, $\lambda_i(a_j)$, μ_j, но относятся к поверхности S', а не к S.

* Порядком алгебраической точки ветвления называем число соединяющихся в ней листов.

Каждый узел в логарифмических концах $\mathcal{K}$ лежит на границе двух элементарных областей, соответствующих логарифмическим точкам ветвления над 0 и ∞. Поэтому в логарифмические концы комплекса отрезков $\mathcal{K}$ не входят элементарные области, соответствующие a_j, $1 \le j \le s-2$, с $\lambda(a_j) \ge 2$. Нетрудно видеть, что $\nu'_j = 2\nu_j$, $\lambda'_i(a_j) = \lambda_i(a_j)$, $\lambda'_{i+\nu_j}(a_j) = \lambda_i(a_j)$, $1 \le i \le \nu_j$, $1 \le j \le s-2$, $\nu'_{s-1} = 2\nu_{s-1} + q, \nu'_s = 2\nu_s + q$ (по ν_s алгебраических точек ветвления возникают за счет $\mathcal{K}_-$ и $\mathcal{K}_+$, и q алгебраических точек ветвления над ∞ возникают за счет q логарифмических точек ветвления над ∞ у $\mathcal{K}$; те же соображения — при подсчете ν'_{s-1}, но вместо ∞ фигурирует 0). Далее, $\mu'_{s-1} = 2\mu_{s-1}, \mu'_s = 2\mu_s$. Риманова поверхность S' является замкнутой римановой поверхностью рода нуль. Пусть $w = r(z)$ — рациональная функция, отображающая $\overline{\mathbf{C}}$ на S', m — число листов S', т.е. m — число как внутренних, так и внешних узлов комплекса отрезков $\mathcal{K}'$, m — степень функции $r(z)$. Очевидно,

$$\sum_{i=1}^{\nu'_j} \lambda'_i(a_j) + \mu'_j = m\,.$$

По известной формуле Римана–Гурвица

$$2(m-1) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{\nu'_j} (\lambda'_i(a_j) - 1)\,. \tag{3}$$

Так как при $1 \le i \le \nu_j$, $1 \le j \le s-2$ выполняется $\nu'_j = 2\nu_j$, $\lambda'_i(a_j) = \lambda_i(a_j)$, $\lambda'_{i+\nu_j}(a_j) = \lambda_i(a_j)$, то

$$\sum_{j=1}^{s-2} \sum_{i=1}^{\nu'_j} (\lambda'_i(a_j) - 1) = 2 \sum_{j=1}^{s-2} \sum_{i=1}^{\nu_j} (\lambda_i(a_j) - 1) = 2n_1\,, \tag{4}$$

где n_1 — число нулей $f^{(k)}(z)$, не являющихся нулями $f^{(k-1)}(z)$. Нули $f^{(k)}(z)$ засчитываются с учетом их порядков. Далее

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\nu'_{s-1}} (\lambda'_i(0) - 1) &= \sum_{i=1}^{\nu'_{s-1}} \lambda'_i(0) - \nu'_{s-1} = \sum_{i=1}^{\nu'_{s-1}} \lambda'_i(0) - 2\nu_{s-1} - q \\ &= m - \mu'_{s-1} - 2\nu_{s-1} - q = m - 2(\mu_{s-1} + \nu_{s-1}) - q. \end{aligned} \tag{5}$$

Аналогично

$$\sum_{i=1}^{\nu'_{s-1}} (\lambda'_i(\infty) - 1) = m - 2(\mu_s + \nu_s) - q. \tag{6}$$

Подставляя (4)–(6) в (3), получаем

$$2(m-1) = 2n_1 + 2m - 2(\mu_{s-1} + \nu_{s-1}) - 2(\mu_s + \nu_s) - 2q.$$

Отсюда

$$q = 1 + n_1 - (\mu_{s-1} + \nu_{s-1}) - (\mu_s + \nu_s).$$

Обозначим через n_2 число нулей $f^{(k-1)}(z)$ без учета их порядков, через p — число полюсов $f^{(k-1)}(z)$ (и $f(z)$) тоже без учета их порядков. Тогда $\mu_{s-1} + \nu_{s-1} = n_2$, $\mu_s + \nu_s = p$ и $q = 1 + n_1 - n_2 - p$, т.е. функция f, удовлетворяющая условиям теоремы Клуни, имеет порядок $\rho = 1 + n_1 - n_2 - p$.

Список литературы

[1] *J. Clunie*, On integral and meromorphic functions. — *J. London Math. Soc.* (1962), v. 37, p. 17–27.

[2] *W.K. Hayman*, Meromorphic functions. Oxford, Clarendon Press (1964).

[3] *А.А. Гольдберг*, Замечание к теореме Тумура–Клуни. — *Докл. и сообщ. Ужгородск. ун-та.* Сер. физ.-мат. (1961), № 4, с. 109–110.

[4] *G. Elfving*, Über eine Klasse von Riemannschen Flächen und ihre Uniformisierung. — *Acta Soc. Sci. Fennicae*, Nova series A (1934), Bd. 2, № 3, S. 1–60.

[5] *R. Nevanlinna*, Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten. — *Acta Math.* (1932), Bd. 58, S. 295–373.

[6] *А.А. Гольдберг, И.В. Островский*, Распределение значений мероморфных функций, Наука, Москва (1970).

A supplement to a theorem of J. Clunie

A.A. Goldberg

In 1962, J. Clunie had proved that, if a function meromorphic in the finite complex plane has a finite number of zeros and poles and its second derivative has a finite number of zeros, then the function has a finite order. In this note, a formula for the order in terms of the number of zeros and poles of the function and its second derivative is proved.

Доповнення до однієї теореми Дж. Клуні

А.А. Гольдберг

У 1962 році Дж. Клуні довів, що якщо мероморфна в скінченній площині функція має скінченну кількість полюсів та нулів і друга похідна від неї має скінченну кількість нулів, то функція має скінченний порядок. У замітці виведено формулу для цього порядку, що виражає його через кількість нулів і полюсів функції та її першої і другої похідної.