Математическая физика, анализ, геометрия
2001, т. 8, № 2, с. 175–188

# О возможном ухудшении гладкости при операции свертки

А.И. Ильинский

*Механико-математический факультет*
*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина*
*пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина*
E-mail:iljinskii@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 12 февраля 2001 г.
Представлена И.В. Островским

Пусть $\mu$ — вполне конечная борелевская (неотрицательная) мера на вещественной прямой $\mathbf{R}$. В статье получены условия на меру $\mu$, необходимые и достаточные для того, чтобы существовала целая функция $p$, неотрицательная и интегрируемая на вещественной оси, такая что

$$\operatorname{ess\,sup}\{(p*\mu)(x) : x \in I\} = \infty \text{ для любого интервала } I \subset \mathbf{R}. \qquad (*)$$

Получены условия на меру $\mu$, достаточные для существования целой функции $p$ заданного роста в комплексной плоскости (в частности, целой конечного порядка $\varrho > 1$), неотрицательной и интегрируемой на вещественной оси и удовлетворяющей условию $(*)$. ·

*Посвящается 100-летию со дня рождения*
*Наума Ильича Ахиезера*

## 1. Введение и основные результаты

Хорошо известно, что для заданной на вещественной оси $\mathbf{R}$ интегрируемой функции $f$ с ограниченным носителем свертка $p*f$ является не менее гладкой функцией, чем $p$. В 1939 году Д.А. Райков [1] показал, что свертка может ухудшать гладкость $p$, если $f$ имеет неограниченный носитель. Этот

· Mathematics Subject Classification 2000: 30D10, 30D15, 60E05.
Работа выполнена при частичной поддержке гранта INTAS No. 96-0858.

эффект изучался позднее М. Улудагом [2, 3] и автором [4]. В [4] был доказан такой факт:

**Теорема А.** *Пусть* $t \in C^1[0, +\infty)$ *— любая функция, такая что* $t'(r) \uparrow +\infty$ *при* $r \uparrow \infty$.

*Существует целая неотрицательная на вещественной оси* $\mathbf{R}$ *функция* $p$, *удовлетворяющая условиям:*

1) $0 < \limsup\limits_{r\to\infty} M(r,p)\exp(-t(r)) < \infty$, *где* $M(r,p) = \max\{|p(z)| : |z| = r\}$;

2) $p \in L^1(\mathbf{R})$;

3) $\operatorname{ess\,sup}\{(p * p)(x) : x \in I\} = \infty$ *для любого интервала* $I \subset \mathbf{R}$.

В частности, для любого числа $\varrho > 1$ существует целая функция $p$ порядка $\varrho$ и нормального типа, интегрируемая и неотрицательная на вещественной оси, свертка которой с собой максимально негладкая в том смысле, что выполняется условие 3) теоремы А.

В связи с теоремой А возникает следующий вопрос. Пусть $\mu$ — фиксированная вполне конечная борелевская мера на прямой $\mathbf{R}$. При каких условиях на меру $\mu$ можно гарантировать существование целой (или целой и заданного роста в комплексной плоскости) неотрицательной и интегрируемой на вещественной оси функции $p$, свертка которой с мерой $\mu$

$$(p * \mu)(x) := \int_{\mathbf{R}} p(x-y)\mu(dy)$$

такова, что

$$\operatorname{ess\,sup}\{(p * \mu)(x) : x \in I\} = \infty \text{ для любого интервала } I \subset \mathbf{R}\,? \tag{1}$$

В статье указаны такие условия.

Не уменьшая общности, можно считать, что рассматриваемые меры $\mu$ — вероятностные, то есть $\mu(\mathbf{R}) = 1$, а функции $p$ имеют единичный интеграл на оси $\mathbf{R}$. Будем далее обозначать через $\mathcal{M}$ класс борелевских (неотрицательных) вероятностных мер на $\mathbf{R}$, и пусть

$$\mathcal{P} := \{p \in L^1(\mathbf{R}) : p(x) \geq 0 \ \ (x \in \mathbf{R}), \ \int_{\mathbf{R}} p(x)\,dx = 1\}.$$

Функции класса $\mathcal{P}$ будем называть *плотностями*.

В следующей теореме 1 указано условие на вероятностную меру $\mu$, необходимое и достаточное для существования целой плотности $p$ (то есть такой функции $p \in \mathcal{P}$, которая аналитически продолжается с вещественной оси на всю комплексную плоскость), для которой выполняется условие (1). Для формулировки теоремы введем такие обозначения. Если $x \in \mathbf{R}$ и $\varepsilon > 0$, то $I_\varepsilon(x) := (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Пусть

$$M_\mu(x) := \sup_{\varepsilon>0} \frac{\mu(I_\varepsilon(x))}{2\varepsilon}$$

— максимальная функция Харди–Литтлвуда меры $\mu$. Заметим, что если в точке $x$ сосредоточена положительная масса, т. е. $\mu(\{x\}) > 0$, то $M_\mu(x) = \infty$. Очевидно, если мера $\mu$ обладает плотностью $m(x)$, то $M_\mu(x) \geq m(x)$ почти всюду и, во всяком случае, во всех точках непрерывности $m(x)$. Для $\mu \in \mathcal{M}$ обозначим

$$U_\mu := \{p \in \mathcal{P} : \text{ выполняется (1) } \}.$$

Множество всех целых функций комплексного переменного $z$ будем обозначать $\mathcal{E}$.

**Теорема 1.** *Пусть $\mu \in \mathcal{M}$ — вероятностное распределение на прямой. Для того чтобы класс $U_\mu \cap L^\infty_{loc}(\mathbf{R})$ был не пуст, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\limsup_{x\to\pm\infty} M_\mu(x) = \infty. \tag{2}$$

*Это же условие является достаточным для непустоты класса $U_\mu \cap \mathcal{E}$.*

В приводимом ниже следствии из теоремы 1 под $D(\mu)$ понимается дискретный спектр меры $\mu$, т.е. $D(\mu) := \{x \in \mathbf{R} : \mu(\{x\}) > 0\}$.

**Следствие 1.** *Пусть $\mu \in \mathcal{M}$ и $D(\mu)$ — непустое множество. Тогда для непустоты класса $U_\mu \cap \mathcal{E}$ достаточно, чтобы множество $D(\mu)$ было неограниченным.*

Теорема 2, которую сформулируем ниже, дает условия на меру $\mu$, достаточные для существования целой плотности класса $U_\mu$, имеющей заданный рост в комплексной плоскости. Введем необходимые обозначения. Обозначим $C^1(+\infty)$ — класс всех вещественнозначных функций $t$, непрерывно дифференцируемых на некотором луче $(r_t, +\infty) \subset (0, +\infty)$. Положим

$$\mathcal{T} := \{t \in C^1(+\infty) : t'(r) \uparrow +\infty \text{ при } r \uparrow +\infty\}. \tag{3}$$

Если $t \in \mathcal{T}$, то положим

$$\mathcal{E}_t := \left\{ f \in \mathcal{E} : \limsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r,f)}{t(r)} = 1 \right\}. \tag{4}$$

Класс $\mathcal{E}_t$ при $t(r) = r^\varrho$ обозначим $\mathcal{E}^\varrho$. Как известно, класс $\mathcal{P} \cap \mathcal{E}^\varrho$ пуст при $\varrho < 1$.

Если $t \in \mathcal{T}$ и $0 < \beta < 1$, то $T_\beta(v)$ будет обозначать функцию

$$T_\beta(v) = \min\{\beta t(r) - r/v : r \geq r_{t,\beta}\}\,, \tag{5}$$

определенную в некоторой правой полуокрестности нуля. Из (5) следует, что $T_\beta(v) \downarrow -\infty$ при $v \downarrow 0$. Для $t(r) = r^\varrho$, $\varrho > 1$, как легко проверить,

$$T_\beta(v) = -\beta^{-\frac{1}{\varrho-1}} C_\varrho v^{-\frac{\varrho}{\varrho-1}}, \quad \text{где} \quad C_\varrho := (\varrho - 1)\varrho^{-\frac{\varrho}{\varrho-1}}. \tag{6}$$

**Теорема 2.** *Пусть $\mu \in \mathcal{M}$ и $t \in \mathcal{T}$. Для непустоты класса $U_\mu \cap \mathcal{E}_t$ достаточно, чтобы существовали число $\beta \in (0,1)$, положительная функция $\Delta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, стремящаяся к нулю при $x \to \pm\infty$, и последовательность $x_n \to \infty$ такие, что*

$$\lim_{n\to\infty} (\Delta(x_n))^{-1} \mu\left(I_{\Delta(x_n)}(x_n)\right) = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} x_n^2 (\Delta(x_n))^{-1} \exp(T_\beta(\Delta(x_n)) = +\infty\,. \tag{7}$$

Из теоремы 2 и равенств (6) непосредственно получаем

**Следствие 2.** *Пусть $\mu \in \mathcal{M}$ и $\varrho > 1$. Для того чтобы класс $U_\mu \cap \mathcal{E}^\varrho$ был не пуст, достаточно, чтобы существовали постоянная $B > 1$, последовательность $x_n \to \infty$ и положительная последовательность $\Delta_n \to 0$, для которых выполняются условия*

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_n^{-1} \mu(I_{\Delta_n}(x_n)) = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} x_n^2 \Delta_n^{-1} \exp\left(-BC_\varrho \Delta_n^{-\frac{\varrho}{\varrho-1}}\right) = +\infty\,. \tag{8}$$

Отметим также частный случай, когда мера $\mu$ обладает неограниченным дискретным спектром.

**Следствие 3.** *Пусть $\mu$ — вероятностное распределение с неограниченным дискретным спектром $D(\mu)$ и $\varrho > 1$. Тогда для непустоты класса $U_\mu \cap \mathcal{E}^\varrho$ достаточно, чтобы существовала последовательность точек $x_n \in D(\mu)$, $x_n \to \infty$, такая, что*

$$\mu(\{x_n\})(\log|x_n|)^{\frac{\varrho-1}{\varrho}} \to \infty \quad (n \to \infty)\,. \tag{9}$$

Приведем вывод следствия 3 из следствия 2. Выполнение условия (9) означает, что

$$\mu(\{x_n\})^{-\frac{\varrho}{\varrho-1}} = \varepsilon_n \log |x_n| \tag{10}$$

для некоторой последовательности $\varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Покажем, что если взять произвольное $B > 1$ и

$$\Delta_n := \mu(\{x_n\}) \varepsilon_n^{\frac{\varrho-1}{2\varrho}}\,, \tag{11}$$

то условие (8) будет выполняться. Проверим выполнение первого из условий (8). В силу (11)

$$\Delta_n^{-1} \mu\left(I_{\Delta_n}(x_n)\right) \geq \Delta_n^{-1} \mu\left(\{x_n\}\right) = \varepsilon_n^{-\frac{\varrho-1}{2\varrho}} \to \infty \quad (n \to \infty)\,.$$

Проверим выполнение второго из условий (8). В силу (11) оно эквивалентно такому условию:

$$2\log|x_n| + \log\frac{1}{\mu(\{x_n\})} + \frac{\varrho-1}{2\varrho}\log\frac{1}{\varepsilon_n} - BC_\varrho\left(\frac{1}{\mu(\{x_n\}}\right)^{\frac{\varrho}{\varrho-1}} \varepsilon_n^{-1/2} \to +\infty,\ n \to \infty\,. \tag{12}$$

Так как второе и третье слагаемые в левой части (12) неотрицательны, то, учитывая (10), видим, что (12) является следствием того, что

$$(2 - BC_\varrho \varepsilon_n^{1/2}) \log|x_n| \to +\infty \quad (n \to \infty)\,.$$

## 2. Доказательство теоремы 1

Необходимость. Пусть условие (2) не выполняется. То есть существуют такие числа $A > 1$ и $B > 1$, что

$$M_\mu(x) \leq B \text{ при всех } |x| \geq A.$$

Из определения функции $M_\mu(x)$ следует, что $\mu\left((x-\varepsilon, x+\varepsilon)\right) \leq B \cdot 2\varepsilon$ при всех $|x| \geq A$ и $\varepsilon > 0$. Значит,

$$\mu(E) \leq B\mathrm{mes}E \text{ для любого борелевского множества } E \subset \mathbf{R} \setminus (-A, A), \tag{13}$$

где $\mathrm{mes}(E)$ означает лебегову меру множества $E$. Пусть $p \in \mathcal{P}$ — произвольная локально ограниченная плотность и $I \subset \mathbf{R}$ — произвольный интервал прямой $\mathbf{R}$. Обозначим

$$B' := \operatorname{ess\,sup}\{p(x-y) : x \in I,\ |y| \leq A\}\,.$$

Так как $p \in L^{\infty}_{loc}(\mathbf{R})$, то $B' < \infty$. Поэтому, учитывая (13), при любом $x \in I$ имеем

$$\begin{aligned}(p*\mu)(x) &= \left(\int\limits_{(-A,A)} + \int\limits_{\mathbf{R}\setminus(-A,A)}\right) p(x-y)\mu(dy)\\ &\le B'\cdot\mu((-A,A)) + B\cdot \int\limits_{R\setminus(-A,A)} p(x-y)\,dy \le B' + B\,.\end{aligned}$$

Следовательно, $p \notin U_\mu$, что и требовалось доказать.

Достаточность. Для определенности будем считать, что $\limsup\limits_{x\to-\infty} M_\mu(x) = \infty$. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — такая последовательность, что

$$x_k < 0 \text{ при всех } k = 1,2,\dots,\ x_k \downarrow -\infty\,,\ h_k := M_\mu(x_k) \to +\infty\,(k\to\infty).$$

Можно считать, что $h_k \ge 1$ при всех $k$. Числа $h_k$ могут равняться $+\infty$. Введем последовательность $\{h_k^*\}$:

$$h_k^* := \begin{cases} h_k, & \text{если } \ h_k < +\infty\,,\\ k, & \text{если } \ h_k = +\infty\,.\end{cases}$$

Последовательность $\{h_k^*\}$, очевидно, обладает свойствами: $h_k^* < \infty$ для всех $k$, $h_k^* \to \infty$ при $k\to\infty$, $M_\mu(x_k) \ge h_k^*$ при всех $k$. Фиксируем произвольную последовательность чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что $a_n > 0$ при $n = 1,2,\dots$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Так как $h_k^* \to \infty$ $(k\to\infty)$, то существует такая последовательность номеров $k(n)\uparrow\infty$ $(n\to\infty)$, что при всех $n = 1,2,\dots$ выполняется неравенство

$$a_n h^*_{k(n)} \ge 1. \tag{14}$$

Далее будем обозначать $y_n := x_{k(n)}$, $g_n := h^*_{k(n)}$ и $\Delta_n$ — любое положительное число, для которого выполняется неравенство

$$\mu(I_{\Delta_n}(y_n)) \ge g_n\Delta_n\,. \tag{15}$$

Заметим, что поскольку $g_n \ge 1$, а $\mu$ — вероятностная мера, то $\Delta_n \le 1$ при всех $n$. Обозначим

$$\eta(z) := \pi^{-1/2}\exp(-z^2) \quad (z \in \mathbf{C}).$$

Имеем $\eta \in \mathcal{P}\cap\mathcal{E}$. Пусть $\varepsilon_0 > 0$ таково, что

$$\eta(x) \ge \varepsilon_0 \text{ при } -1 \le x \le 1. \tag{16}$$

Возьмем произвольное счетное, всюду плотное в $\mathbf{R}$ множество $\{s_j\}_{j=1}^{\infty}$. Построим сначала функцию $p_j \in \mathcal{P} \cap \mathcal{E}$ такую, что

$$(p_j * \mu)(s_j) = \infty\,. \tag{17}$$

Положим

$$p_j(z) := c_j \sum_{m=1}^{\infty} a_{n(m)} \Delta_{n(m)}^{-1} \eta\left((z + y_{n(m)} - s_j)\Delta_{n(m)}^{-1}\right), \tag{18}$$

где $c_j^{-1} = \sum_{m=1}^{\infty} a_{n(m)}$ и $n(m) \uparrow \infty$ — последовательность натуральных чисел, вообще говоря, зависящая от $j$, выбор которой уточним ниже. Очевидно, $p_j \in \mathcal{P}$. Покажем, что как бы ни была взята последовательность $n(m)$, выполняется условие (17). Имеем

$$\begin{aligned}
(p_j * \mu)(s_j) &\overset{(18)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} c_j \sum_{m=1}^{\infty} a_{n(m)} \Delta_{n(m)}^{-1} \eta\left((-t + y_{n(m)})\Delta_{n(m)}^{-1}\right) \mu(dt) \\
&\geq c_j \sum_{m=1}^{\infty} a_{n(m)} \Delta_{n(m)}^{-1} \int_{y_{n(m)}-\Delta_{n(m)}}^{y_{n(m)}+\Delta_{n(m)}} \eta\left((y_{n(m)} - t)\Delta_{n(m)}^{-1}\right) \mu(dt) \\
&\overset{(16)}{\geq} c_j \varepsilon_0 \sum_{m=1}^{\infty} a_{n(m)} \Delta_{n(m)}^{-1} \mu\left(I_{\Delta_{n(m)}}(y_{n(m)})\right) \\
&\overset{(15)}{\geq} c_j \varepsilon_0 \sum_{m=1}^{\infty} a_{n(m)} g_{n(m)} \overset{(14)}{=} \infty\,.
\end{aligned}$$

Покажем, что последовательность $n(m)$ можно взять столь быстро стремящейся к бесконечности, что функция $p_j$ будет целой. Сначала покажем, что существует постоянная $v_0$ такая, что при всех $|x| \geq v_0$, $|y| \leq |x|/2$ и $0 < \Delta \leq 1$ выполняется неравенство

$$|\Delta^{-1}\eta((x+iy)\Delta^{-1})| \leq \pi^{-1/2} \exp\left(-3x^2/8\right)\,. \tag{19}$$

Так как при всех $x, y \in \mathbf{R}$ таких, что $|y| \leq |x|/2$ имеет место $|\eta(x+iy)| \leq \pi^{-1/2}\exp(-3x^2/4)$, то при $|y| \leq |x|/2$ и всех $\Delta > 0$

$$|\Delta^{-1}\eta((x+iy)\Delta^{-1})| \leq \pi^{-1/2}\Delta^{-1} \exp\left(-3x^2/(4\Delta^2)\right)\,.$$

Для того чтобы выполнялось (19), достаточно, чтобы $\Delta^2 \log \Delta^{-1} \leq (3/8)(2 - \Delta^2)x^2$, т.е. поскольку $0 < \Delta \leq 1$, чтобы $(8/3)\Delta^2 \log \Delta^{-1} \leq x^2$. Этим установлено существование искомого $v_0$. Отсюда вытекает, что последовательность $n(m)$ можно взять столь быстро возрастающей (благодаря тому, что

$y_n \downarrow -\infty$ при $n \to \infty$), что в круге $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \le m$ выполняется неравенство

$$|\Delta_{n(m)}^{-1}\eta((z+y_{n(m)}-s_j)\Delta_{n(m)}^{-1})| \le 1\,. \tag{20}$$

В силу (20) и сходимости ряда из $a_n$ будем иметь равномерную на каждом компакте в $\mathbf{C}$ сходимость ряда (18). Значит, $p_j \in \mathcal{E}$. Этим функция $p_j$ построена.

Переходим к построению плотности $p$. Фиксируем произвольную последовательность $\{\gamma_j\}_{j=1}^{\infty}$ такую, что

$$\gamma_j > 0\,(j=1,2,\dots)\,, \quad \sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j = 1\,, \quad \gamma_j \max\{|p_j(z)| : |z| \le j\} \le 2^{-j} \text{ при } j \ge 2\,.$$

Положим

$$p(x) := \sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j p_j(x).$$

Очевидно, $p \in \mathcal{P} \cap \mathcal{E}$. В силу (17) функция $p * \mu$ равна бесконечности на всюду плотном множестве $\{s_j\}$. Покажем, что выполняется условие (1). Заметим, что функция $(p*\mu)(x)$ является поточечным пределом неубывающей последовательности непрерывных функций

$$f_n(x) := \int_{-n}^{n} p(x-y)\,\mu(dy).$$

Поэтому для любого $M > 0$ и любого интервала $I$ множество $\{x \in \mathbf{R} : (p*\mu)(x) > M\} \cap I$ открыто. Так как оно содержит все точки $s_j \in I$, то оно непусто и поэтому его мера Лебега положительна. Так как $M$ произвольно, то это означает справедливость (1). ■

## 3. Доказательство теоремы 2

Теорема 2 легко вытекает из следующих теорем $2'$ и $2''$.

**Теорема** $2'$**.** *Для любой функции $t \in \mathcal{T}$ класс $\mathcal{P} \cap \mathcal{E}_t$ не пуст.*

**Теорема** $2''$**.** *Пусть $\mu \in \mathcal{M}$, $t \in \mathcal{T}$ и выполняются условия* (7) *теоремы* 2. *Тогда существует плотность $p \in U_\mu \cap \mathcal{E}$ такая, что при некотором $0 < \beta < 1$ и всех $r \ge 1$ выполняется неравенство $M(r,p) \le \exp(\beta t(r))$.*

Действительно, пусть $q \in \mathcal{P} \cap \mathcal{E}_t$ — плотность, существование которой утверждается в теореме $2'$, а $p$ — плотность из теоремы $2''$. Тогда плотность $f = (q+p)/2$ будет принадлежать классу $U_\mu \cap \mathcal{E}_t$.

Доказательство теоремы $2'$. Существование таких плотностей доказано в [4], причем даже с более точной асимптотикой, чем в (4). Однако приводимое ниже доказательство более простое, по сравнению с приведенным в [4].

В дальнейшем будем считать, что функция $t(r)$ задана на всей полуоси $[0,+\infty)$, причем $t(0)=0$, $t'(r)\uparrow$ на всей полуоси $[0,+\infty)$. Это предположение не уменьшает общности. Пусть $\theta(z)$ — плотность, равная

$$\theta(z) := \frac{1-\cos z}{\pi z^2}\,. \tag{21}$$

Так как $M(r,\theta)\sim(2\pi r^2)^{-1}e^r$ при $r\to\infty$, то существуют постоянные $c$ и $C$, $0<c<C<\infty$, такие что

$$ce^r r^{-2}\le M(r,\theta)\le Ce^r r^{-2} \text{ при } r\ge 1. \tag{22}$$

Функцию $p$ будем строить в виде

$$p(z)=A^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sigma_n^{-1}\theta\left(z\sigma_n^{-1}\right), \tag{23}$$

где $\{a_n\}$ и $\{\sigma_n\}$ — последовательности параметров, удовлетворяющие условиям: $a_n>0$ при всех $n$, $A:=\sum_{n=1}^{\infty}a_n<\infty$, $0<\sigma_n\le 1$, $\sigma_n\downarrow 0$ при $n\uparrow\infty$. Очевидно, при указанных условиях на $\{a_n\}$ и $\{\sigma_n\}$ функция $p$ является плотностью. Мы покажем, что параметры $a_n$ и $\sigma_n$ можно выбрать так, что $p$ будет целой функцией из класса $\mathcal{E}_t$.

Прежде всего заметим, что при всяком $\sigma>0$ выполняется равенство $M\left(r,\theta(z/\sigma)\right)=M\left(r/\sigma,\theta\right)$. Поэтому, если $\sigma\le 1$, а $r\ge 1$, то в силу (22)

$$c\sigma^2e^{r/\sigma}r^{-2}\le M\left(r,\theta(z/\sigma)\right)\le C\sigma^2e^{r/\sigma}r^{-2}. \tag{24}$$

Обозначим для $r\ge 1$

$$\varphi_n(r):=\varphi(a_n,\sigma_n;r):=a_n\sigma_ne^{r/\sigma_n}. \tag{25}$$

Тогда в силу (24)

$$c\varphi_n(r)r^{-2}\le M\left(r,a_n\sigma_n^{-1}\theta\left(z\sigma_n^{-1}\right)\right)\le C\varphi_n(r)r^{-2} \tag{26}$$

при всех $r\ge 1$, если $a_n$ и $\sigma_n$ удовлетворяют указанным выше условиям. Докажем такое утверждение:

*Пусть* $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— произвольная последовательность, удовлетворяющая условиям* $\delta_n\downarrow 0$ $(n\to\infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n\le c/(4C)$, *где* $c$ *и* $C$ *— постоянные из неравенства* (22). *Предположим, что последовательности* $\{a_n\}$ *и* $\{\sigma_n\}$ *таковы,* *что существует последовательность* $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$, $R_0 = 1$, $R_n \uparrow +\infty$ $(n \uparrow \infty)$, *для которой выполняются условия:*

$$\begin{array}{llll} \varphi_n(R_n) & = e^{t(R_n)} & & (n = 1, 2, \ldots); \\ \varphi_n(r) & \leq e^{t(r)} & \textit{при } r \in [R_{n-1}, R_{n+1}] & (n = 1, 2, \ldots); \\ \varphi_n(r) & \leq \delta_j e^{t(r)} & \textit{при } r \in [R_{n+j}, R_{n+j+1}] & (n = 1, 2, \ldots,\ j = 1, 2, \ldots); \\ \varphi_n(r) & \leq \delta_j e^{t(r)} & \textit{при } r \in [R_{n-j-1}, R_{n-j}] & (n = 2, 3, \ldots,\ 1 \leq j \leq n-1). \end{array} \tag{27}$$

*Тогда функция* $p$, *определяемая в* (23), *принадлежит классу* $\mathcal{E}_t$.

Действительно, пусть $r \in [R_l, R_{l+1}]$ для некоторого $l = 0, 1, 2, \ldots$ . Тогда, используя (26), (27) и условия на числа $\delta_n$, получим

$$\begin{aligned} Ar^2 M(r,p) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} r^2 M\left(r, a_n \sigma_n^{-1} \theta(z\sigma_n^{-1})\right) \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(r) \\ &= C(\varphi_l(r) + \varphi_{l+1}(r) + \sum_{n \neq l, l+1} \varphi_n(r)) \\ &\leq 2Ce^{t(r)} + 2C \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j e^{t(r)} \leq 3Ce^{t(r)}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $(\log r)/t(r) \to 0$ $(r \to \infty)$ в силу (3), получаем неравенство

$$\limsup_{r \to \infty} \log M(r,p)/t(r) \leq 1\,.$$

Докажем противоположное неравенство, оценив $M(r,p)$ снизу на последовательности $R_n$. Используя (26), (27), имеем

$$\begin{aligned} AR_k^2 M(R_k, p) &\geq R_k^2 M\left(R_k, a_k \sigma_k^{-1} \theta(z\sigma_k^{-1})\right) - \sum_{n \neq k} R_k^2 M\left(R_k, a_n \sigma_n^{-1} \theta(z\sigma_n^{-1})\right) \\ &\geq c\varphi_k(R_k) - C \sum_{n \neq k} \varphi_n(R_k) \\ &\geq ce^{t(R_k)} - C \cdot 2 \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j e^{t(R_k)} \geq \frac{c}{2} e^{t(R_k)}\,. \end{aligned}$$

Так как $(\log r)/t(r) \to 0$ $(r \to \infty)$, то отсюда вытекает неравенство

$$\limsup_{r \to \infty} \log M(r,p)/t(r) \geq 1\,,$$

что завершает доказательство утверждения.

Покажем, как следует определять $a_n$ и $\sigma_n$, если последовательность $\{R_m\}$ уже выбрана, а возможность надлежащего выбора $\{R_m\}$ установим позднее. Обозначим (ср. (25))

$$\psi_n(r) := \log \varphi_n(r) = \log(a_n \sigma_n) + r/\sigma_n\,.$$

Условия (27) эквивалентны таким:

$$\begin{array}{lll} \psi_n(R_n)=t(R_n) & & (n=1,2,\ldots); \\ \psi_n(r)\le t(r) & \text{при } r\in[R_{n-1},R_{n+1}] & (n=1,2,\ldots); \\ \psi_n(r)\le \log\delta_j+t(r) & \text{при } r\in[R_{n+j},R_{n+j+1}] & (n=1,2,\ldots,j=1,2,\ldots); \\ \psi_n(r)\le \log\delta_j+t(r) & \text{при } r\in[R_{n-j-1},R_{n-j}] & (n=2,3,\ldots,1\le j\le n-1). \end{array} \tag{28}$$

Покажем, что $a_n$ и $\sigma_n$ однозначно определяются условием, состоящим в том, что $y=\psi_n(r)$ является уравнением касательной к кривой $y=t(r)$ в точке $(R_n,t(R_n))$. Действительно, из равенства

$$\log(a_n\sigma_n)+r/\sigma_n\equiv t'(R_n)(r-R_n)+t(R_n)$$

следует, что

$$\begin{aligned} &\sigma_n=1/t'(R_n)\,, \\ &a_n=t'(R_n)\exp\left(-(R_nt'(R_n)-t(R_n))\right)\,. \end{aligned} \tag{29}$$

(Отметим, что $R_nt'(R_n)-t(R_n)$ — это длина отрезка, отсекаемого от луча $(-\infty,0)$ оси $y$ касательной к кривой $y=t(r)$ в точке $(R_n,t(R_n))$. Так как

$$Rt'(R)-t(R)=\int_0^R(t'(R)-t'(r))\,dr\ge\int_0^{R_0}(t'(R)-t'(r))\,dr\ge R_0(t'(R)-t'(R_0)),$$

то в силу второго из равенств (29) $a_n$ быстро стремится к 0, если последовательность $R_n$ быстро стремится к $+\infty$. Из первого равенства (29) и из (3) следует, что $\sigma_n\to0$ при $n\to\infty$.)

Из того, что прямая $y=\psi_n(r)$ является касательной к выпуклой кривой $y=t(r)$ (см. условие (3)) в точке $(R_n,t(R_n))$, следует, что первое и второе из условий (28) выполняются при любом выборе $\{R_n\}$.

Остается показать, что последовательность $R_n$ можно взять столь быстро возрастающей к $+\infty$, что третье и четвертое условия в (28) также будут выполнены. Нам потребуется следующее очевидное утверждение:

*Если $t(r)$ — заданная на полуоси $[0,\infty)$ функция, удовлетворяющая условиям $t(0)=0$, $t(r)\ge0$, $t'(r)\uparrow\infty$ $(r\uparrow+\infty)$, то предельное соотношение*

$$t(R)-t'(v)(R-v)\to+\infty \tag{30}$$

*выполняется в следующих двух случаях:* а) $v$ *— фиксировано,* $R\to+\infty$, б) $R$ *— фиксировано,* $v\to+\infty$. (Геометрический смысл левой части (30) — это длина отрезка прямой $x=R$ между кривой $y=t(x)$ и касательной к ней в точке $(v,t(v))$.)

Переходим к построению последовательности $\{R_n\}$. Берем $R_0=0$, $R_1=1$. Этим самым определены $a_1$, $\sigma_1$ и $\psi_1(r)$ (см. определение функций

$\psi_n(r)$ и (29)). Возьмем $R_2$ любым таким, чтобы выполнялось неравенство $\psi_1(R_2) \le \log\delta_1 + t(R_2)$. Такое $R_2$ существует в силу (30) (см. утверждение а)). Тогда неравенство $\psi_1(r) \le \log\delta_1 + t(r)$ будет выполняться при всех $r \ge R_2$, т.е. третье условие в (28) при $n = 1$ и $j = 1$ будет выполнено.

Пусть $R_1, R_2, \dots, R_n$ уже выбраны. Значит, определены $a_k, \sigma_k, \psi_k$ при $k = 1, 2, \dots, n$. Убедимся в возможности выбора числа $R_{n+1}$. Для того чтобы выполнялось третье условие в (28) для функций $\psi_1, \dots, \psi_n$ на интервале $[R_{n+1}, R_{n+2}]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{array}{ll} \psi_n(R_{n+1}) & \le \log\delta_1 + t(R_{n+1})\,, \\ \psi_{n-1}(R_{n+1}) & \le \log\delta_2 + t(R_{n+1})\,, \\ \dots\dots\dots & \\ \psi_1(R_{n+1}) & \le \log\delta_n + t(R_{n+1})\,. \end{array}$$

В силу (30) (утверждение а)) эти неравенства имеют место, если $R_{n+1}$ достаточно велико. Для того чтобы выполнялось четвертое условие в (28) для функции $\psi_{n+1}$ (определяемой заданием $R_{n+1}$) на отрезках $[R_0, R_1]$, $[R_1, R_2]$, $\dots$, $[R_{n-2}, R_{n-1}]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{array}{ll} \psi_{n+1}(R_n) & \le \log\delta_1 + t(R_n)\,, \\ \psi_{n+1}(R_{n-1}) & \le \log\delta_2 + t(R_{n-1})\,, \\ \dots\dots\dots & \\ \psi_{n+1}(R_1) & \le \log\delta_n + t(R_1)\,. \end{array}$$

Они имеют место при достаточно большом $R_{n+1}$ в силу (30) (утверждение б)). ■

Доказательство теоремы $2''$. Очевидно, можно считать, что $x_k < 0$ для всех $k$ и $x_k \downarrow -\infty$. Выберем подпоследовательность $\{y_n\} = \{x_{k(n)}\}$ последовательности $\{x_n\}$ такую, что числа $B_n$, определяемые как

$$B_n := (\Delta(y_n))^{-1}\mu\left(I_{\Delta(y_n)}(y_n)\right)\,, \tag{31}$$

обладают свойством: $\sum_{n=1}^{\infty} B_n^{-1} < \infty$. Полагаем для сокращения письма $\sigma_n := \Delta(y_n)$. Тогда в силу второго из условий (7) при некотором $0 < \beta < 1$ имеем $\lim_{n\to\infty} y_n^2 \sigma_n^{-1} \exp(T_\beta(\sigma_n)) = \infty$. Пусть $s$ — произвольное вещественное число. Построим целую плотность $p_s$ такую, что $(p_s * \mu)(s) = \infty$ и $M(r, p_s) \le \exp(\beta t(r))$ $(r \ge 1)$. Пусть $\theta(z)$ — целая плотность (21), $a_n = B_n^{-1}$, где $B_n$ определено в (31). Положим

$$p_s(x) := a^{-1} \sum_{n=N}^{\infty} a_n \sigma_n^{-1} \theta\left((x + y_n - s)\sigma_n^{-1}\right)\,, \tag{32}$$

где $a = \sum_{n=N}^{\infty} a_n$, а выбор номера $N$, вообще говоря, зависящего от $s$, будет уточнен ниже. Как и в теореме 1, показываем, что $(p_s * \mu)(s) = \infty$ при любом выборе номера $N$. Для доказательства целости функции $p_s$ и справедливости неравенства $M(r, p_s) \le \exp(\beta t(r))$ $(r > 1)$ достаточно доказать существование такого номера $N$, что при $r \ge 1$ и всех $n \ge N$ выполняются неравенства:

$$M\left(r, \sigma_n^{-1}\theta\left((z + y_n - s)\sigma_n^{-1}\right)\right) \le \exp(\beta t(r)) \quad (r \ge 1, \quad n \ge N). \qquad (33)$$

Воспользуемся такой оценкой функции $\theta$ (см. доказательство в [4]): существует константа $C$ такая, что при всех $v \in \mathbf{R}$ и $r \ge 1$ имеет место неравенство

$$M(r, \theta(z - v)) = \max_{|z| \le r} |\theta(z - v)| \le Ce^r v^{-2}. \qquad (34)$$

Пользуясь оценкой (34), видим, что (33) вытекает из условия

$$C\sigma_n e^{r/\sigma_n}(y_n - s)^{-2} \le \exp(\beta t(r)) \quad (r \ge 1, \quad n \ge N). \qquad (35)$$

Пусть натуральное $N'$ таково, что при всех $n \ge N'$ выполняется неравенство $|y_n - s| \ge |y_n|/2$. Если $N \ge N'$, то для выполнения условия (35) достаточно, чтобы

$$4C\sigma_n y_n^{-2} e^{r/\sigma_n} \le \exp(\beta t(r)), \quad r \ge 1, \quad n \ge N,$$

то есть

$$\log 4C + \log\left(\sigma_n y_n^{-2}\right) \le \beta t(r) - r/\sigma_n, \quad r \ge 1, \quad n \ge N. \qquad (36)$$

Функция $\beta t(r) - r/\sigma_n$ (см. правую часть неравенства (36)) достигает минимума на правой полуоси в точке $r_n$ такой, что $t'(r_n) = \beta^{-1}\sigma_n^{-1}$. То есть

$$\min_{r \ge 1}(\beta t(r) - r/\sigma_n) = t(r_n) - r_n/\sigma_n = T_\beta(\sigma_n),$$

где функция $T_\beta$ определена в (5). Поскольку $\lim_{n\to\infty} y_n^2 \sigma_n^{-1} \exp T_\beta(\sigma_n) = \infty$, то существует номер $N$ такой, что выполняется (36).

Теперь легко завершить доказательство теоремы. Возьмем произвольное счетное всюду плотное на прямой множество $\{s_j\}_{j=1}^{\infty}$ и произвольную последовательность $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что $\gamma_n > 0$ $(n \ge 1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = 1$, и положим

$$p(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j p_{s_j}(x).$$

Поскольку $(p * \mu)(s_j) > \gamma_j(p_{s_j} * \mu)(s_j) = \infty$, то, как и в теореме 1, доказываем, что $p \in U_\mu$. Неравенство $M(r, p) \le \exp(\beta t(r))$ вытекает из того, что $M(r, p) \le \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j M(r, p_{s_j})$ и $M(r, p_{s_j}) \le \exp(\beta t(r))$. ∎

Автор благодарит И.В. Островского за ряд полезных замечаний.

## Список литературы

[1] *Д.А. Райков,* О компонировании аналитических функций распределения. — *Докл. АН СССР* (1939), т. 23, № 6, с. 511–514.

[2] *M. Uludağ,* On possible deterioration of smoothness under the operation of convolution. — *C. R. Acad. Sci. Paris, Série 1* (1996), t. 322, p. 173–178.

[3] *M. Uludağ,* On possible deterioration of smoothness under the operation of convolution. — *J. Math. Anal. Appl.* (1998), v. 227, p. 335–358.

[4] *A. Il'inskii,* On convolution of entire probability densities. — *Complex Variables* (1998), v. 36, p. 165–181.

## On possible deterioration of smoothness under the operation of convolution

A.I. Il'inskii

Let $\mu$ be a completely finite Borel non-negative measure on the real line $\mathbf{R}$. We give condition on measure $\mu$ which is necessary and sufficient for the existence of a non-negative, integrable on the real line, and entire function $p$ such that

$$\operatorname{ess\,sup}\{(p*\mu)(x) : x \in I\} = \infty \text{ for every interval } I \subset \mathbf{R}. \qquad (*)$$

We give also conditions on measure $\mu$ which are sufficient for the existence of an entire function $p$ with prescribed growth in complex plane (for example, of finite order $\varrho > 1$) that is non-negative and integrable on the real line and satisfies condition $(*)$.

## Про можливе погіршення гладкості при взятті згортки

О.І. Ільїнський

Нехай $\mu$ — цілком скінченна борелівська (невід'ємна) міра на дійсній прямій $\mathbf{R}$. В статті отримано умови на міру $\mu$, які необхідні та достатні для того, щоб існувала ціла функція $p$, невід'ємна та ітегровна на дійсній осі, така що

$$\operatorname{ess\,sup}\{(p*\mu)(x) : x \in I\} = \infty \text{ для кожного проміжка } I \subset \mathbf{R}. \qquad (*)$$

Отримано умови на міру $\mu$, які достатні для існування цілої функції $p$ заданої швидкості зростання в комплексній площині (зокрема, скінченного порядку $\varrho > 1$), що невід'ємна та інтегровна на дійсній осі, яка задовольняє умову $(*)$.