Математическая физика, анализ, геометрия
2001, т. 8, № 2, с. 189–204

Непрерывная зависимость решения задачи управляемости от начального и конечного состояний для треугольных, нелинеаризуемых систем

В.И. Коробов

Механико-математический факультет
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина

Institute of Mathematics, Szczecin University,
Wielkopolska str., 15, Szczecin, 70451 Poland

E-mail:vkorobov@univer.kharkov.ua
korobow@sus.univ.szczecin.pl

С.С. Павличков

Механико-математический факультет
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина

E-mail:pavl579@yahoo.com

Статья поступила в редакцию 27 декабря 2000 г.

Приводятся достаточные условия существования семейства управлений $u_{(x^0,x^T)}(\cdot)$, переводящих точку $x^0 \in \mathbf{R}^n$ в точку $x^T \in \mathbf{R}^n$ для всех $x^0 \in \mathbf{R}^n$ и $x^T \in \mathbf{R}^n$ и непрерывно зависящих от $x^0 \in \mathbf{R}^n$ и $x^T \in \mathbf{R}^n$, для класса треугольных систем, траектории которых в общем случае не отображаются на траектории линейной канонической системы диффеоморфной заменой координат и управлений. В качестве следствия получена полная управляемость равномерно ограниченных возмущений систем данного класса при условии глобальной липшицевости правой части по x и u.

Mathematics Subject Classification 2000: 93B05.

1. Введение и формулировка основных результатов

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \qquad t \in [t_0, T], \tag{1}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$ — фазовый вектор, $u \in \mathbf{R}^1$ — управление, а вектор-функция f имеет следующий вид:

$$f(x,u) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n, u) \end{pmatrix}.$$

Такой класс систем, далее называемый "треугольными" системами, широко используется при исследовании нелинейных управляемых процессов — см. [1–4]. В статьях [5] и [6] доказывается полная управляемость треугольных систем, соответственно, для случая интегро-дифференциальных систем Вольтерра и случая систем обыкновенных дифференциальных уравнений, когда система (1) не может быть приведена диффеоморфной заменой координат и управлений к каноническому виду глобально, во всех точках фазового пространства. Ясно, что свойство полной управляемости (даже, если оно выполнено на любом интервале времени $[a,b] \subset [t_0, T]$), вообще говоря, не гарантирует существования семейства процессов, соединяющих заданную начальную точку x^0 с заданной конечной x^T, глобально непрерывно зависящих от x^0 и x^T, и таких, что x^0 и x^T являются параметрами этого семейства. Последнее свойство может понадобиться, например, для доказательства полной управляемости систем с равномерно ограниченными возмущениями ([7]). Однако если в статье [7] такое свойство сразу получается после отображения траекторий треугольной системы на траектории линейной, то случай, когда такого отображения не существует, требует отдельного рассмотрения. Основная трудность здесь заключается в том, что построение управлений, переводящих заданную точку в заданную, существенно неконструктивно. Тем не менее, технику, примененную в работах [5] и [6], удается модифицировать требуемым образом. Основной результат данной работы — теорема 1 — утверждает, что такое построение возможно.

Пусть выполнены следующие условия:

(i) При каждом $i = 1, \dots, n$ функция $f_i(x_1, \dots, x_{i+1})$ принадлежит классу $C^1(\mathbf{R}^{i+1}; \mathbf{R}^1)$.

(ii) При каждом $i = 1, \dots, n$ и для любых $z \in \mathbf{R}^1$ и $(x_1, \dots, x_i)^T \in \mathbf{R}^i$ существует $\overline{x}_{i+1} \in \mathbf{R}^1$ такое, что $\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}(x_1, \dots, x_i, \overline{x}_{i+1}) \neq 0$ и $z = f_i(x_1, \dots, x_i, \overline{x}_{i+1})$.

Заметим, что в [8] и [9] были исследованы некоторые классы треугольных систем, для которых стандартные условия регулярности $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}(x,u)\right| \neq 0$ нарушаются в некоторых точках $(x,u) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^1$, и получены критерии эквивалентности таким классам в терминах скобок Ли. Класс систем, задаваемый условиями (i) и (ii), содержит треугольные системы, рассмотренные в [8] и [9], и является более широким, что видно из приведенного ниже примера.

Для заданных $x^0 \in \mathbf{R}^n$, $\tau \in [a,b] \subset [t_0,T]$ и $u(\cdot) \in C([a,b];\mathbf{R}^1)$ через $x(\cdot,\tau,x^0,u(\cdot))$ обозначим траекторию системы (1) с управлением $u(\cdot)$, удовлетворяющую начальному условию $x(\tau) = x^0$. (Она, вообще говоря, может не быть определенной на всем $[a,b]$, тогда в качестве $x(\cdot,\tau,x^0,u(\cdot))$ берем максимальное решение соответствующей задачи Коши.) Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *При сделанных предположениях (i), (ii) существует семейство управлений* $\{u_{(x^0,x^T)}(\cdot)\}_{(x^0,x^T)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n}$ *такое, что отображения* $(x^0,x^T) \longmapsto u_{(x^0,x^T)}(\cdot)$ *и* $(x^0,x^T) \longmapsto x(\cdot,t_0,x^0,u_{(x^0,x^T)}(\cdot))$ *принадлежат классам* $C(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n; C([t_0,T];\mathbf{R}^1))$ *и* $C(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n; C^1([t_0,T];\mathbf{R}^n))$ *соответственно, и* $x(T,t_0,x^0,u_{(x^0,x^T)}(\cdot)) = x^T$ *для всех* $(x^0,x^T) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

З а м е ч а н и е. Требования, которые мы здесь налагаем на функцию $f(x,u)$ для построения указанного семейства, являются более жесткими, чем те, которые сделаны в работе [6], при доказательстве полной управляемости треугольных нелинеаризуемых систем. Отметим также, что все рассуждения, изложенные ниже, легко переносятся на случай, когда $x_i \in \mathbf{R}^{m_i}$, $i = 1,\ldots,n$, $u \in \mathbf{R}^{m_{n+1}}$ $(m_i \leq m_{i+1})$.

П р и м е р. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = g(y) \\ \dot{y} = v \end{cases} \qquad t \in [0,\ T],$$

где $(x,y)^T \in \mathbf{R}^2$ — фазовый вектор, $v \in \mathbf{R}^1$ — управление и

$$g(y) = \begin{cases} y^3 \sin y & \text{при } y \geq 0 \\ 0 & \text{при } y < 0 \end{cases}.$$

Легко видеть, что эта система удовлетворяет условиям (i) и (ii), и для нее справедлива теорема 1. В то же время не существует глобально диффеоморфной замены координат и управлений

$$\begin{cases} \xi = \phi(x,y) \\ \eta = \psi(x,y) \\ u = \gamma(x,y,v) \end{cases},$$

взаимно однозначно отображающей траектории данной системы на траектории линейной полностью управляемой системы (записанной нами в каноническом виде)

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \eta \\ \dot{\eta} = u + a\xi + b\eta \end{cases} \qquad t \in [0,\ T].$$

Действительно, если бы такое отображение существовало, то оно гомеоморфно отображало бы множество точек покоя исходной системы (то есть всех точек $(x^*, y^*, v^*)^T \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^1$, в которых правая часть исходной системы равна $0 \in \mathbf{R}^2$) на множество точек покоя линейной системы. Но эти множества равны соответственно $\{(x^*, y^*, v^*)^T \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^1 |\ y^* \le 0;\ v^* = 0\} \bigcup \{(x^*, y^*, v^*)^T \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^1 |\ y^* = \pi k,\ k \in \mathbf{N};\ v^* = 0\}$ и $\{(\xi^*, \eta^*, u^*)^T \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^1 |\ \eta^* = 0;\ u^* = -a\xi^*\}$ и не могут быть гомеоморфны. Это же замечание показывает, что не существует отображения и на произвольную (не обязательно вполне управляемую) линейную систему, например, потому, что множество точек покоя линейной системы связно.

Предположим, что помимо выполнения условий (i) и (ii) правая часть системы (1) глобально липшицева по x и u, то есть выполнено следующее условие:

(iii) Существует $L > 0$ такое, что при всех $(x, u) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^1$ и $(x', u') \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^1$ выполнено неравенство: $|f(x, u) - f(x', u')| \le L(|x - x'| + |u - u'|)$.

Тогда из теоремы 1, пользуясь теоремой Брауэра о неподвижной точке (см., например, [7]), сразу получаем следующее утверждение.

Следствие. *Для любой, равномерно ограниченной на всем $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^1$ и глобально липшицевой по x и u функции $\phi(x, u) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^1 \longrightarrow \mathbf{R}^n$ система*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) + \phi(x(t), u(t)), \qquad t \in [t_0, T]$$

полностью управляема в классе управлений из $C([t_0, T]; \mathbf{R}^1)$.

Заметим, что аналогичные результаты справедливы и в случае интегро-дифференциальных систем Вольтерра, о чем было сообщено в [10].

2. Доказательство теоремы 1

Зафиксируем произвольную точку $(x^*, u^*) = ((x_1^*, \dots, x_n^*)^T, u^*) \cong (x_1^*, \dots, x_n^*, u^*)^T \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^1$, удовлетворяющую условиям:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}(x_1^*, \dots, x_{i+1}^*) \ne 0, \;\; i = 1, \dots, n-1; \qquad \frac{\partial f_n}{\partial u}(x^*, u^*) \ne 0, \qquad (2)$$

и момент времени $t_1 \in]t_0, T[$. Ясно, что для доказательства теоремы 1 достаточно построить требуемое семейство процессов по отдельности на отрезках $[t_1, T]$ и $[t_0, t_1]$, а именно, построить семейства управлений $\{u_{x^T}(\cdot) \in$

$C([t_1,T];\mathbf{R}^1)\}_{x^T\in\mathbf{R}^n}$ и $\{v_{x_0}(\cdot)\in C([t_0,t_1];\mathbf{R}^1)\}_{x^0\in\mathbf{R}^n}$ такие, что отображения $x^T\longmapsto u_{x^T}(\cdot)$ и $x^0\longmapsto v_{x^0}(\cdot)$ принадлежат классам $C(\mathbf{R}^n;C([t_1,T];\mathbf{R}^1))$ и $C(\mathbf{R}^n;C([t_0,t_1];\mathbf{R}^1))$ соответственно, и при всех $x^T\in\mathbf{R}^n$ и $x^0\in\mathbf{R}^n$ выполнены равенства $v_{x_0}(t_1)=u_{x^T}(t_1)=u^*$, а траектории $x(\cdot,t_1,x^*,u_{x^T}(\cdot))$ и $x(\cdot,t_0,x^0,v_{x^0}(\cdot))$ определены всюду на $[t_1,T]$ и $[t_0,t_1]$ соответственно, причем $x(T,t_1,x^*,u_{x^T}(\cdot))=x^T$ и $x(t_1,t_0,x^0,v_{x^0}(\cdot))=x^*$ (а тогда отображения $x^T\longmapsto x(\cdot,t_1,x^*,u_{x^T}(\cdot))$ и $x^0\longmapsto x(\cdot,t_0,x^0,v_{x^0}(\cdot))$ принадлежат $C(\mathbf{R}^n;C^1([t_1,T];\mathbf{R}^n))$ и $C(\mathbf{R}^n;C^1([t_0,t_1];\mathbf{R}^n))$ соответственно). Проведем построение требуемого семейства $u_{x^T}(\cdot)$ на отрезке $[t_1,T]$, для отрезка $[t_0,t_1]$ рассуждения аналогичны. Зафиксируем произвольное $k=1,\ldots,n$ и рассмотрим k-мерную управляемую систему, заданную на отрезке $[t_1,T]$:

$$\begin{cases}\dot{x}_i(t)=f_i(x_1(t),\ldots,x_{i+1}(t)),\\ \quad i=1,\ldots,k-1;\\ \dot{x}_k(t)=f_k(x_1(t),\ldots,x_k(t),v(t)),\end{cases}\qquad t\in[t_1,T],\tag{3}$$

где $(x_1,\ldots,x_k)^T\in\mathbf{R}^k$ — фазовый вектор, $v\in\mathbf{R}^1$ — управление. Нам удобно ввести следующие переобозначения: символом $x(\cdot,\tau,y,v(\cdot))$ далее будем обозначать траекторию системы (3), выходящую в момент времени $\tau\in[t_1,T]$ из заданной точки $y\in\mathbf{R}^k$ и отвечающую заданному управлению $v(\cdot)\in L_\infty([t_1,T];\mathbf{R}^1)$, а через $f(x,v)$ будем обозначать k-мерную вектор-функцию $f(x,v):=(f_1(x_1,x_2),\ldots,f_k(x_1,\ldots,x_k,v))^T$. Всюду далее эти переобозначения сохраняют силу. Для заданных $r>0$ и $y\in\mathbf{R}^k$ через $B_r(y)$ будем обозначать открытый шар $B_r(y):=\{\eta\in\mathbf{R}^k|\ |\eta-y|<r\}$. Кроме того, обозначим $y^*:=(x_1^*,\ldots,x_k^*)^T\in\mathbf{R}^k$, $x_{n+1}^*:=u^*$. Построение искомого семейства $\{u_{x^T}(\cdot)\}_{x^T\in\mathbf{R}^n}$ сводится к доказательству следующего утверждения.

Утверждение 1. *Пусть задано семейство k-мерных вектор-функций $\{x(\xi,\cdot)\}_{\xi\in\mathbf{R}^k}$ таких, что выполнены следующие условия:*

1) При каждом $\xi\in\mathbf{R}^k$ имеем

$$x(\xi,\cdot):=(x_1(\xi,\cdot),\ldots,x_k(\xi,\cdot))^T\in C^1([t_1,T];\mathbf{R}^k),$$

и справедливы тождества

$$\frac{d}{dt}x_i(\xi,t)=f_i(x_1(\xi,t),\ldots,x_{i+1}(\xi,t)),\ i=1,\ldots,k-1,\ \ t\in[t_1,T].$$

2) Отображение $\xi\mapsto x(\xi,\cdot)$ принадлежит классу $C(\mathbf{R}^k;C^1([t_1,T];\mathbf{R}^k))$.

3) $\dot{x}_k(\xi,t_1)=f_k(y^*,x_{k+1}^*)$, $x(\xi,t_1)=y^*$, $x(\xi,T)=\xi$.

Тогда существует семейство управлений $\{\hat{v}_{(\xi,\beta)}(\cdot)\}_{(\xi,\beta)\in\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^1}$ такое, что выполнены следующие условия:

4) При любом $(\xi,\beta)\in\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^1$ имеем $\hat{v}_{(\xi,\beta)}(\cdot)\in C^1([t_1,T];\mathbf{R}^1)$ и $\hat{v}_{(\xi,\beta)}(T)=\beta$, $\hat{v}_{(\xi,\beta)}(t_1)=x_{k+1}^*$, $\frac{d}{dt}\hat{v}_{(\xi,\beta)}(t_1)=f_{k+1}(y^*,x_{k+1}^*,x_{k+2}^*)$.

5) Отображение $(\xi,\beta) \longmapsto \hat{v}_{(\xi,\beta)}(\cdot)$ *принадлежит классу* $C(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^1; C^1([t_1,T];\mathbf{R}^1))$.

6) При любом $(\xi,\beta) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^1$ *траектория* $t \longmapsto x(t,t_1,y^*,\hat{v}_{(\xi,\beta)}(\cdot))$ *определена на всем* $[t_1,T]$ *и* $x(T,t_1,y^*,\hat{v}_{(\xi,\beta)}(\cdot)) = \xi$.

Другими словами, утверждается, что если требуемое семейство управлений $\hat{v}_{(\xi,\beta)}(\cdot)$ существует для $(k-1)$-мерной подсистемы системы (3), то его можно построить и для k-мерной системы (3). При $k=1$ построение семейства $\{x(\xi,\cdot)\}_{\xi\in\mathbf{R}^k}$, удовлетворяющего условиям 1)–3) утверждения 1 тривиально: в условии 1) в этом случае должно быть выполнено $k-1=0$ тождеств. Тогда, применяя индукцию по $k=1,\ldots,n$ и утверждение 1, получаем при $k=n$ существование требуемого семейства $\{u_{x^T}(\cdot)\}_{x^T\in\mathbf{R}^n}$ для n-мерной системы (1). (Для определенности можно положить, например, $f_{n+1} := x_{n+2}$, $x^*_{n+2} := 0$ для случая $k=n$.)

Итак, цель всех нижеследующих рассуждений — доказать утверждение 1. В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть задано семейство систем*

$$\begin{cases} \dot{z}_i(t) = \sum\limits_{j=1}^{i+1} \alpha_{ij}(\xi,t) z_j(t), \\ \quad i = 1,\ldots,k-1; \\ \dot{z}_k(t) = \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_{kj}(\xi,t) z_j(t) + \alpha_{k\,k+1}(\xi,t) w(t), \end{cases} \qquad t \in [t_1,T], \tag{4}$$

где $\xi \in \mathbf{R}^k$ *— параметр семейства,* $(z_1,\ldots,z_k)^T \in \mathbf{R}^k$ *— фазовый вектор,* $w \in \mathbf{R}^1$ *— управление, а функции* $\alpha_{ij}(\xi,\cdot)$ *при каждом* $\xi \in \mathbf{R}^k$ *определены и кусочно-непрерывны на* $[t_1,T]$, *и отображения* $\xi \mapsto \alpha_{ij}(\xi,\cdot)$ *принадлежат классу* $C(\mathbf{R}^k; L_1([t_1,T];\mathbf{R}^1))$. *Пусть сущетвует функция* $\sigma(\xi)$ *класса* $C(\mathbf{R}^k;]0,T-t_1])$ *такая, что все* $\alpha_{ij}(\cdot,\cdot)$ *непрерывны всюду в полосе* $\{(\xi,t) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R} \mid t_1 \le t \le t_1+\sigma(\xi)\}$ *и при любых* $\xi \in \mathbf{R}^k$ *и* $t \in [t_1,\ t_1+\sigma(\xi)]$ *выполнены неравенства:* $|\alpha_{i\,i+1}(\xi,t)| > 0$, $i = 1,\ldots,k$.

Тогда для любого $z^T \in \mathbf{R}^k$ *и любого* $\mu \in \mathbf{N}$ *существует семейство управлений* $\{w(\xi,\cdot)\}_{\xi\in\mathbf{R}^k}$, *удовлетворяющее условиям:*

1) При каждом $\xi \in \mathbf{R}^k$ *имеем*

$$w(\xi,\cdot) \in C^\mu([t_1,T];\mathbf{R}^1) \quad \text{и} \quad w^{(p)}(\xi,t_1) = 0, \;\; p = 0,1,\ldots,\mu;$$

$$w(\xi,s) = 0 \quad \text{при} \quad s \in [t_1+\sigma(\xi),T].$$

2) Отображение $\xi \mapsto w(\xi,\cdot)$ *принадлежит классу* $C(\mathbf{R}^k; C^\mu([t_1,T];\mathbf{R}^1))$.

3) При каждом $\xi \in \mathbf{R}^k$ *управление* $w = w(\xi,\cdot)$ *переводит* $0 \in \mathbf{R}^k$ *в* z^T *за время* $[t_1,T]$ *в силу системы (4).*

Доказательство леммы 1 проводится тем же методом, что и доказательство теоремы 2 из работы [5]. Отличие заключается в том, что в нашем случае условия $|\alpha_{i\,i+1}(\xi,t)| > 0$ выполняются не на всем отрезке $[t_1, T]$, а на $[t_1, t_1+\sigma(\xi)]$. Поэтому, на отрезке $[t_1, t_1+\sigma(\xi)]$ проводятся те же построения, что и в теореме 2 и лемме 2 из работы [5] (непрерывная зависимость получаемых управлений от $\xi \in \mathbf{R}^k$ следует из условий на $\alpha_{ij}(\cdot,\cdot)$), а затем пользуемся тем, что при каждом $\xi \in \mathbf{R}^k$ линейная система (4) с управлением $w \equiv 0$ за время $[t_1+\sigma(\xi), T]$ переводит фазовое пространство $\mathbf{R}^k$ на $\mathbf{R}^k$ линейным невырожденным преобразованием координат, коэффициенты которого непрерывно зависят от ξ (в силу условий на $\alpha_{ij}(\cdot,\cdot)$). Эти рассуждения мы опускаем.

Следующая лемма в наших построениях является ключевой. Она позволяет приспособить доказательство, приведенное в [6], к случаю семейств траекторий. Отметим, что требование (ii), более жесткое, чем его аналог в работе [6], используется нами именно в доказательстве леммы 2.

Лемма 2. *Пусть $\{x(\xi,\cdot)\}_{\xi\in\mathbf{R}^k}$ — семейство траекторий из условий утверждения 1. Существуют семейство управлений $\{v(\xi,\cdot)\}_{\xi\in\mathbf{R}^k}$, заданных на отрезке $[t_1,T]$, функция $\sigma(\xi)$ класса $C(\mathbf{R}^k;]0, T-t_1])$ и функция $\overline{R}(\xi)$ класса $C(\mathbf{R}^k;]0,+\infty[)$ такие, что выполнены условия:*

1) При каждом $\xi \in \mathbf{R}^k$ управление $v(\xi,\cdot)$ определено и кусочно-непрерывно на отрезке $[t_1,T]$, отображение $\xi \mapsto v(\xi,\cdot)$ принадлежит классу $C(\mathbf{R}^k; L_1([t_1,T];\mathbf{R}^1))$, а функция $v(\cdot,\cdot)$ непрерывна всюду в полосе $\{(\xi,t)\in\mathbf{R}^k\times\mathbf{R} |\ t_1\le t\le t_1+\sigma(\xi)\}$

2) При каждом $\xi \in \mathbf{R}^k$ выполнены условия:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}(x(\xi,t),v(\xi,t)) \neq 0,\ \ i=1,\dots,k, \quad \textit{при всех}\ \ t\in[t_1,t_1+\sigma(\xi)];$$

$$v(\xi,t_1) = x^*_{k+1}, \quad \textit{и} \quad \frac{d}{dt}x_k(\xi,t) = f_k(x(\xi,t),v(\xi,t)) \quad \textit{при всех}\ \ t\in[t_1,T]$$

(кроме, быть может, точек разрыва функции $v(\xi,\cdot)$).

3) При каждом $\xi\in\mathbf{R}^k$ верно неравенство $\max\limits_{t\in[t_1,T]}|v(\xi,t)| \le \overline{R}(\xi)$.

2.1. Доказательство леммы 2

Пусть задано семейство $x(\xi,\cdot)$, удовлетворяющее условиям 1)–3) утверждения 1.

Из предположения (ii) следует, что для каждой точки $(y,z)\in\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^1$ существует $v_z\in\mathbf{R}^1$ и окрестность $E_{y,z}$ точки (y,v_z) вида $E_{y,z} = B_{\sigma_y}(y)\times]v_z-$

$\Delta_{1,y}, v_z + \Delta_{2,y}[$, где $\sigma_y > 0$, $\Delta_{1,y} > 0$ $\Delta_{2,y} > 0$ — некоторые числа такие, что $f_k(y, v_z) = z$ и при всех $(\eta, v) \in \overline{E}_{y,z}$ выполнено условие $\frac{\partial f_k}{\partial x_{k+1}}(\eta, v) \neq 0$ и отображение $\Phi_{y,z}(\cdot)$, действующее по правилу $\Phi_{y,z} : (\eta, v) \longmapsto (\eta, f_k(\eta, v))$, есть диффеоморфизм $E_{y,z}$ на некоторую открытую окрестность $G_{y,z}$ точки (y, z). При каждом $l \in \mathbf{N}$ определим множества $\Gamma_l := \bigcup\limits_{|\xi| \le l} \{(x(\xi, t), \dot{x}_k(\xi, t)) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^1 |\ t \in [t_1, T]\}$. По построению, $\Gamma_l \subset \Gamma_{l+1}$ и Γ_l — ограниченное множество при каждом $l \in \mathbf{N}$. Поскольку семейство открытых множеств $\{G_{y,z}\}_{y \in \mathbf{R}^k, z \in \mathbf{R}^1}$ покрывает каждое из $\overline{\Gamma_l}$, то существует монотонная последовательность натуральных чисел $0 < m_1 \le m_2 \le \ldots \le m_l \le \ldots$ и последовательность $\{(y_m, z_m)\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^1$ такие, что $\overline{\Gamma_l} \subset \bigcup\limits_{m=1}^{m_l} G_{y_m, z_m}$ при всех $l \in \mathbf{N}$. По определению, будем считать, что $y_1 = y^*$, $z_1 = f_k(y^*, x^*_{k+1})$, $v_{z_1} = x^*_{k+1}$ и что E_{y_1,z_1} и G_{y_1,z_1} выбраны так, что $\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}(\eta, v) \neq 0$ при всех $(\eta, v) \in \overline{E}_{y_1,z_1}$ и всех $i = 1, \ldots, k$.

Построим непрерывную функцию $\sigma(\xi) > 0$ такую, что $(x(\xi, s), \dot{x_k}(\xi, s)) \in G_{y_1,z_1}$ при всех $\xi \in \mathbf{R}^k$, $s \in [t_1, t_1 + \sigma(\xi)]$. (Она и будет требуемой в формулировке леммы функцией). Для этого достаточно доказать существование последовательности $\{\delta_l\}_{l=1}^{\infty}$ $(0 < \delta_{l+1} < \delta_l < T - t_1)$ такой, что при каждом $l \in \mathbf{N}$ и при любом $\xi \in \mathbf{R}^k$ таком, что $|\xi| \le l$, имеем $(x(\xi, s), \dot{x_k}(\xi, s)) \in G_{y_1,z_1}$ при всех $s \in [t_1, t_1 + \delta_l]$. Тогда непрерывная функция

$$\sigma(\xi) = \begin{cases} \delta_{[|\xi|+1]} + (\delta_{[|\xi|+1]+1} - \delta_{[|\xi|+1]})(|\xi| - [|\xi|]) \ \text{ при } \ |\xi| \notin \mathbf{Z}_+ \\ \delta_{|\xi|+1} \quad |\xi| \in \mathbf{Z}_+ \end{cases},$$

где $[r]$ — целая часть числа $r \in \mathbf{R}$, а $\mathbf{Z}_+ = \mathbf{N} \bigcup \{0\}$, будет искомой. Предположим, что такой последовательности $\{\delta_l\}$ не существует, тогда при каком-то $l_0 \in \mathbf{N}$ существует последовательность $\{\overline{\xi}_q\}_{q=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}^k$, удовлетворяющая условиям $|\overline{\xi}_q| \le l_0$, $q \in \mathbf{N}$, и последовательность $\{\overline{\delta}_q\}_{q=1}^{\infty}$ такая, что $\overline{\delta}_q > 0$ при $q \in \mathbf{N}$ и $\overline{\delta}_q \longrightarrow 0$ при $q \longrightarrow +\infty$, и такие, что для каждого $q \in \mathbf{N}$ множество $\{(x(\overline{\xi}_q, s), \dot{x_k}(\overline{\xi}_q, s)) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^1 |\ s \in [t_1, t_1 + \overline{\delta_q}]\}$ не содержится целиком в G_{y_1,z_1}. С другой стороны, так как $|\overline{\xi}_q| \le l_0$, то, переходя, если нужно, к подпоследовательности, не ограничивая общности, считаем, что существует $\overline{\xi} \in \mathbf{R}^k$ такое, что $\overline{\xi_q} \longrightarrow \overline{\xi}$ при $q \longrightarrow +\infty$. Для $\overline{\xi}$ существует $\delta(\overline{\xi}) > 0$ такое, что $(x(\overline{\xi}, s), \dot{x_k}(\overline{\xi}, s)) \in G_{y_1,z_1}$ при всех $s \in [t_1, t_1 + \delta(\overline{\xi})]$. Тогда из условия 2 утверждения 1 следует существование $\rho > 0$ такого, что для каждого $\xi \in B_\rho(\overline{\xi})$ включение $(x(\xi, s), \dot{x_k}(\xi, s)) \in G_{y_1,z_1}$ также справедливо при всех $s \in [t_1, t_1 + \delta(\overline{\xi})]$. В частности, это верно и при всех $\xi = \overline{\xi_q}$ при $q \ge q_0$, где $q_0 \in \mathbf{N}$ — некоторое натуральное число, что противоречит выбору $\overline{\delta_q}$ и последовательности $\{\overline{\xi_q}\}_{q=1}^{\infty}$. Таким образом, требуемая непрерывная функция $\sigma(\xi)$ построена.

В силу условия 2) утверждения 1, при любом $l \in \mathbf{N}$ и произвольных фиксированных $\xi \in \overline{B_{l-1}(0)} \subset \mathbf{R}^k$ и $t \in]t_1, T]$ существуют открытый интервал $I_{\xi,t} =]\overline{\tau}_{\xi,t},\ \overline{\theta}_{\xi,t}[\subset]2t_1 - T, 2T - t_1[$ и шар $B_{r_{\xi,t}}(\xi)$, где $t = \frac{1}{2}(\overline{\tau}_{\xi,t} + \overline{\theta}_{\xi,t})$ и $\frac{1}{2} > r_{\xi,t} > 0$, такие, что для некоторого $i(\xi,t) \in \{1, 2, \ldots, m_l\}$ справедливо включение $(x(\eta,s), \dot{x_k}(\eta,s)) \in G_{y_{i(\xi,t)},\, z_{i(\xi,t)}}$ при всех $s \in I_{\xi,t} \bigcap [t_1, T]$ и $\eta \in \overline{B_{r_{\xi,t}}(\xi)} \subset \overline{B_l(0)}$. Определим непрерывные функции $\tau_{\xi,t}(\eta)$ и $\theta_{\xi,t}(\eta)$ из $\mathbf{R}^k$ в $\mathbf{R}$ следующим образом:

$$\tau_{\xi,t}(\eta) = \overline{\tau}_{\xi,t} + \frac{\overline{\theta}_{\xi,t} - \overline{\tau}_{\xi,t}}{4} + 4(T - t_1) g\left(\frac{|\eta - \xi|}{r_{\xi,t}}\right),$$

$$\theta_{\xi,t}(\eta) = \overline{\theta}_{\xi,t} - \frac{\overline{\theta}_{\xi,t} - \overline{\tau}_{\xi,t}}{4} - 4(T - t_1) g\left(\frac{|\eta - \xi|}{r_{\xi,t}}\right),$$

где $g(\cdot)$ — функция из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$, заданная так: $g(z) := \max\{0, |z| - \frac{1}{2}\}$. Тем самым, каждому $(\xi, t) \in \mathbf{R}^k \times]t_1, T]$ мы сопоставили индекс $i(\xi,t) \in \{1, 2, \ldots, m_{[|\xi|]+2}\}$ такой, что включение $(x(\eta,s), \dot{x_k}(\eta,s)) \in G_{y_{i(\xi,t)},\, z_{i(\xi,t)}}$ справедливо при всех $(\eta, s) \in \mathbf{R}^k \times [t_1, T]$, принадлежащих замыканию множества $T_{\xi,t} := \{(\eta,s) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R} |\ \tau_{\xi,t}(\eta) < s < \theta_{\xi,t}(\eta)\}$. Далее, из семейства открытых множеств $\{T_{\xi,t}\}_{\xi \in \mathbf{R}^k,\, t \in [t_1 + \sigma(\xi), T]}$, покрывающего полосу $P_\sigma := \{(\eta, s) \in \mathbf{R}^k \times [t_1, T] |\ t_1 + \sigma(\eta) < s \le T\}$ и ее замыкание, выберем счетное, локально конечное подпокрытие $T_p := T_{\xi_p, t_p} = \{(\eta, s) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R} | \tau_p(\eta) < s < \theta_p(\eta)\}$, $p \ge 2$, $p \in \mathbf{N}$ (мы для удобства записи переобозначили $\tau_p(\cdot) := \tau_{\xi_p,t_p}(\cdot)$, $\theta_p(\cdot) := \theta_{\xi_p,t_p}(\cdot)$) следующим образом: пусть множества $T_p = T_{\xi_p,t_p}$, $p = 2 = p_1 + 1, \ldots, p_2$ образуют конечное покрытие компакта $K_{l_1} := \left(\overline{B_{l_1}(0)} \times [t_1, T]\right) \bigcap \overline{P_\sigma}$, где l_1 — некоторое натуральное число, причем $K_{l_1} \bigcap T_p \ne \emptyset$, $p = 2, \ldots, p_2$; далее пусть индукцией по $q \in \mathbf{N}$ для некоторых $q \ge 2$ и $l_{q-1} \in \mathbf{N}$ мы построили конечное покрытие $\{T_p\}_{p=2=p_1+1}^{p_q}$ компакта $K_{l_{q-1}} := \left(\overline{B_{l_{q-1}}(0)} \times [t_1, T]\right) \bigcap \overline{P_\sigma}$ такое, что $K_{l_{q-1}} \bigcap T_p \ne \emptyset$, $p = 2, \ldots, p_q$; выберем $l_q \in \mathbf{N}$ такое, что $l_q > l_{q-1} + 1$, тогда, поскольку $r_{\xi,t} < \frac{1}{2}$, компакт $\left(\left(\overline{B_{l_q}(0)} \times [t_1, T]\right) \bigcap \overline{P_\sigma}\right) \setminus \bigcup\limits_{p=p_1+1}^{p_q} T_p$ будет непуст. Далее выбираем некоторое конечное покрытие этого компакта множествами $T_p := T_{\xi_p,t_p}$, $p = p_q + 1, \ldots, p_{q+1}$, каждое из которых имеет с ним непустое пересечение, и получаем конечное покрытие компакта $K_{l_q} := \left(\overline{B_{l_q}(0)} \times [t_1, T]\right) \bigcap \overline{P_\sigma}$ множествами T_p $(p = 2, 3, \ldots, p_{q+1})$, удовлетворяющими условиям $K_{l_q} \bigcap T_p \ne \emptyset$ при $p = 2, 3, \ldots, p_{q+1}$. Так как, по построению, при $p \ge p_{q+2} + 1$ $(q \in \mathbf{N})$ T_p пересекается с одним из множеств $K_{l_{q+m+1}} \setminus K_{l_{q+m}}$, где $m \in \mathbf{N}$, и $r_{\xi,t} < \frac{1}{2}$, то $T_p \bigcap \left(\overline{B_{l_q}(0)} \times \mathbf{R}\right) = \emptyset$, а значит,

$$T_p \bigcap \left(\bigcup_{\kappa=2}^{p_q} T_\kappa\right) = \emptyset \text{ при } p \ge p_{q+2} + 1,\ q = 2, 3, \ldots, +\infty, \tag{5}$$

откуда следует и локальная конечность покрытия множества P_σ множествами T_p. Положим также по определению $\tau_1(\eta) := t_1$, $\theta_1(\eta) := t_1 + \sigma(\eta)$, $\eta \in \mathbf{R}^k$, $T_1 := \{(\eta, s) \in \mathbf{R}^k \times [t_1, T]|\ \tau_1(\eta) \le s \le \theta_1(\eta)\}$.

Пусть Ξ — множество всех подмножеств пространства $\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}$, задаваемых в виде

$$\Sigma_{R(\cdot),r(\cdot),A_R,A_r} := \{(\eta, s) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}|\ r(\eta) \le s \le R(\eta)\}$$
$$\setminus \left(\{(\eta, r(\eta))|\ \eta \in A_r\} \bigcup \{(\eta, R(\eta))|\ \eta \in A_R\}\right),$$

где $A_R \subset \mathbf{R}^k$ и $A_r \subset \mathbf{R}^k$ пробегают множество всех подмножеств пространства $\mathbf{R}^k$, а $R(\cdot)$ и $r(\cdot)$ пробегают множества функций из $\mathbf{R}^k$ в $\mathbf{R}$ вида

$$R_{\xi,r,\rho_1(\cdot),\theta,\tau}(\eta) = \min\left\{\rho_1(\eta);\ \theta - \frac{\theta-\tau}{4} - 4(T-t_1)g(\frac{1}{r}|\eta-\xi|)\right\},$$

$$r_{\xi,r,\rho_2(\cdot),\theta,\tau}(\eta) = \max\left\{\rho_2(\eta);\ \tau + \frac{\theta-\tau}{4} + 4(T-t_1)g(\frac{1}{r}|\eta-\xi|)\right\},$$

соответственно, где $\rho_i(\cdot) \in C(\mathbf{R}^k; [2t_1 - T, 2T - t_1])$, $i = 1, 2,$ — произвольны, а набор $\xi \in \mathbf{R}^k$, $0 < r < \frac{1}{2}$, $\theta \in]2t_1 - T, 2T - t_1[$, $\tau \in]2t_1 - T, 2T - t_1[$, $(\tau < \theta)$ произвольно выбирается так, чтобы существовало $i = i(\xi, r, \theta, \tau) \in \mathbf{N}$ такое, что для всех $(\eta, s) \in \overline{B_r(\xi)} \times (]\tau,\ \theta[\bigcap[t_1, T])$ верно включение $(x(\eta, s), \dot{x_k}(\eta, s)) \in G_{y_{i(\xi,r,\theta,\tau)},\, z_{i(\xi,r,\theta,\tau)}}$. Заметим, что система множеств Ξ образует полукольцо множеств (см. [11], с. 39) и $T_p \bigcap P_\sigma \in \Xi$, $p = 2, \dots, +\infty$. Поэтому, пользуясь леммой 2 из [11] (с. 40), соотношением (5) и индукцией по $q \in \mathbf{N}$, получаем существование счетного набора множеств $\{\Sigma_\nu = \Sigma_{R_\nu(\cdot),r_\nu(\cdot),A_R^\nu,A_r^\nu}\}_{\nu=2}^{\infty} \subset \Xi$ таких, что $\Sigma_\nu \bigcap \Sigma_\mu = \emptyset$ при $\mu \ne \nu$, $\mu \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, $\nu \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, и $\bigcup\limits_{p=2}^{p_q} (T_p \bigcap P_\sigma) = \bigcup\limits_{\nu=2}^{\nu_q} \Sigma_\nu$, $q \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, где $\nu_1 = 1 < \nu_2 < \nu_3 < \dots < \nu_q < \dots$ — некоторая монотонная последовательность и для каждого натурального $p \ge 2$ существует конечное множество индексов $M_p \subset \mathbf{N} \setminus \{1\}$ такое, что $T_p \bigcap P_\sigma = \bigcup\limits_{\nu \in M_p} \Sigma_\nu$. Кроме того, положим по определению $\Sigma_1 := T_1$, $r_1(\eta) := t_1$, $R_1(\eta) := t_1 + \sigma(\eta)$, $\eta \in \mathbf{R}^k$, $M_1 := \{1\}$ (ясно, что $\Sigma_1 \notin \Xi$). Таким образом, от множеств $\{T_p\}$ мы перешли к попарно непересекающимся множествам $\{\Sigma_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ таким, что $\mathbf{R}^k \times [t_1, T] = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} \Sigma_\nu$.

Тогда, по построению,

$$(\{\eta\} \times [t_1, T]) \bigcap \Sigma_\nu = \emptyset \ \text{ при } \ \nu \notin \{1\} \bigcup \{\nu_q + 1, \dots, \nu_{q+3}\}$$
$$\text{и при } \ \eta \in \overline{B_{l_{q+1}}(0)} \setminus \overline{B_{l_q}(0)}, \qquad q \in \mathbf{N} \setminus \{1\};$$
$$(\{\eta\} \times [t_1, T]) \bigcap \Sigma_\nu = \emptyset \ \text{ при } \ \nu \notin \{1, 2, 3, \dots \nu_3\}, \ \ \eta \in \overline{B_{l_1}(0)}, \tag{6}$$

и, кроме того, для каждого $\nu \in \mathbf{N}$ существует $i(\nu) \in \mathbf{N}$, причем мы полагаем по определению $i(1) := 1$ для случая $\nu = 1$ такое, что $(x(\eta, s), \dot{x}_k(\eta, s)) \in G_{y_{i(\nu)}, z_{i(\nu)}}$ при всех $(\eta, s) \in \overline{\Sigma_\nu}$. Поэтому при каждом $\eta \in \mathbf{R}^k$ корректно определено управление

$$v(\eta, t) := \phi_{i(\nu)}^{-1}(x(\eta, t), \dot{x}_k(\eta, t)), \quad \text{при} \quad (\eta, t) \in \Sigma_\nu; \quad t \in [t_1, T],$$

где $\phi_{i(\nu)}^{-1}$ — последняя координатная функция диффеоморфизма $\Phi_{y_{i(\nu)}, z_{i(\nu)}}^{-1} : G_{y_{i(\nu)}, z_{i(\nu)}} \to E_{y_{i(\nu)}, z_{i(\nu)}}$, обратного к $\Phi_{y_{i(\nu)}, z_{i(\nu)}}$, который определен выше. (Ясно, что соотношение $(\eta, t) \in \Sigma_\nu$ однозначно задает $\nu = \nu(\eta, t) \in \mathbf{N}$.) Из вида множеств Σ_ν и из соотношений (6) сразу следует, что семейство управлений $\{v(\eta, \cdot)\}_{\eta \in \mathbf{R}^k}$ будет удовлетворять условиям 1) и 2) леммы 2. Ясно, что, по построению, $S_q := \sup\limits_{(\eta, t) \in \overline{B_{l_q}(0)} \times [t_1, T]} |v(\eta, t)| < +\infty$ при всех $q \in \mathbf{N}$, поэтому в качестве требуемой в утверждении леммы функции $\overline{R}(\xi)$ можно взять, например, любую непрерывную функцию из $\mathbf{R}^k$ в $]0, +\infty[$ такую, что $\overline{R}(\xi) \geq S_q + 1$ при всех $\xi \in \overline{B_{l_q}(0)}$, $q \in \mathbf{N}$. Тогда условие 3) леммы 2 также будет выполнено. Лемма 2 доказана.

2.2. Доказательство утверждения 1

Пусть семейство управлений $\{v(\xi, \cdot)\}_{\xi \in \mathbf{R}^k}$ и функции $\sigma(\xi)$ и $\overline{R}(\xi)$ получены из леммы 2. Рассмотрим семейство линейных управляемых систем ($\xi \in \mathbf{R}^k$ — параметр семейства)

$$\dot{z} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t, t_1, y^*, v(\xi, \cdot)), v(\xi, t))z + \frac{\partial f}{\partial v}(x(t, t_1, y^*, v(\xi, \cdot)), v(\xi, t))w, \tag{7}$$

где $z \in \mathbf{R}^k$ — фазовый вектор, $w \in \mathbf{R}^1$ — управление, $t \in [t_1, T]$. По построению, семейство систем (7) удовлетворяет условиям леммы 1. Пусть семейства управлений $\{w_i(\xi, \cdot) \in C^1([t_1, T]; \mathbf{R}^1)\}_{\xi \in \mathbf{R}^k}$, $i = 1, \ldots, k$, таковы, что отображения $\xi \longmapsto w_i(\xi, \cdot)$ принадлежат классу $C(\mathbf{R}^k; C^1([t_1, T]; \mathbf{R}^1))$, и при любых $\xi \in \mathbf{R}^k$ и $t \in \{t_1\} \bigcup [t_1 + \sigma(\xi), T]$ справедливы равенства $w_i(\xi, t) = 0$ и $\dot{w}_i(\xi, t) = 0$, $(i = 1, \ldots, k)$, а управление $w_i(\xi, \cdot)$ переводит $0 \in \mathbf{R}^k$ в базисный вектор $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbf{R}^k$ (единица на i-м месте) в силу системы (7) за время $[t_1, T]$. При каждом $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)^T \in \mathbf{R}^k$ зададим семейство управлений $v_\lambda(\xi, t) := v(\xi, t) + \sum_{j=1}^k \lambda_j w_j(\xi, t)$, $t \in [t_1, T]$, ($\xi \in \mathbf{R}^k$ — параметр семейства).

Определим семейство отображений $\{F(\xi, \cdot)\}_{\xi \in \mathbf{R}^k}$ из $\mathbf{R}^k$ в $\mathbf{R}^k$ следующим образом: при любом $\xi \in \mathbf{R}^k$ положим $F(\xi, \lambda) := x(T, t_1, y^*, v_\lambda(\xi, \cdot))$ при каждом $\lambda \in \mathbf{R}^k$, для которого траектория $t \mapsto x(t, t_1, y^*, v_\lambda(\xi, \cdot))$ определена на всем $[t_1, T]$. Заметим, что по построению, при каждом $\xi \in \mathbf{R}^k$, $F(\xi, 0)$ существует и равно ξ.

Лемма 3. *Существуют функции $\varepsilon_1(\xi)$ и $\varepsilon_2(\xi)$ класса $C(\mathbf{R}^k;]0, +\infty[)$ и константа $\rho > 0$ такие, что при каждом $\xi \in \mathbf{R}^k$ выполнены утверждения:*

1) При каждом $\lambda \in \overline{B_{2\varepsilon_1(\xi)}(0)}$ траектория $t \mapsto x(t, t_1, y^*, v_\lambda(\xi, \cdot))$ определена на всем $[t_1, T]$ и, следовательно, определено $F(\xi, \lambda)$.

2) $F(\xi, \cdot)$ есть диффеоморфизм открытого шара $B_{\varepsilon_1(\xi)}(0)$ на $F(\xi, B_{\varepsilon_1(\xi)}(0))$ и $\overline{B_{\varepsilon_2(\xi)}(\xi)} \subset F(\xi, B_{\varepsilon_1(\xi)}(0))$.

3) Для любого отображения $\hat{F}(\cdot) \in C^1(\overline{B_{\varepsilon_1(\xi)}(0)}; \mathbf{R}^k)$ из выполнения условий

$$|\hat{F}(\lambda) - F(\xi, \lambda)| < \frac{\varepsilon_2(\xi)}{2} \quad \text{при всех } \lambda \in B_{\varepsilon_1(\xi)}(0), \tag{8}$$

$$\| \frac{\partial \hat{F}}{\partial \lambda}(\lambda) - \frac{\partial F}{\partial \lambda}(\xi, \lambda) \| < \rho \quad \text{при всех} \quad \lambda \in B_{\varepsilon_1(\xi)}(0) \tag{9}$$

следует, что $\overline{B_{\frac{\varepsilon_2(\xi)}{2}}(\xi)} \subset \hat{F}(B_{\varepsilon_1(\xi)}(0))$, и $\hat{F}(\cdot)$ — диффеоморфизм $B_{\varepsilon_1(\xi)}(0)$ на $\hat{F}(B_{\varepsilon_1(\xi)}(0))$.

Доказательство. Зафиксируем любое $\xi \in \mathbf{R}^k$. Тот факт, что для некоторого числа $\varepsilon_1(\xi) > 0$ траектория $t \mapsto x(t, t_1, y^*, v_\lambda(\xi, \cdot))$ определена на всем $[t_1, T]$ при всех $\lambda \in \overline{B_{2\varepsilon_1(\xi)}(0)}$ и отображение $\lambda \mapsto F(\xi, \lambda)$ непрерывно дифференцируемо по λ всюду в $B_{2\varepsilon_1(\xi)}(0)$, есть один из вариантов хорошо известных теорем о непрерывной зависимости и дифференцируемости решений задачи Коши по параметрам и начальным данным; то, что при достаточно малом $\varepsilon_1(\xi)$ отображение $F(\xi, \cdot)$ является диффеомофизмом $B_{\varepsilon_1(\xi)}(0)$ на $F(\xi, B_{\varepsilon_1(\xi)}(0))$, следует из выбора $w_i(\xi, \cdot)$, а так как $F(\xi, 0) = \xi$, то, выбирая $\varepsilon_2(\xi) > 0$ так, что $\overline{B_{\varepsilon_2(\xi)}(\xi)} \subset F(\xi, B_{\varepsilon_1(\xi)}(0))$, получим утверждение п. 2 леммы (при фиксированном ξ). Чтобы при заданном $\xi \in \mathbf{R}^k$ получить утверждение п. 3, достаточно выбрать $\varepsilon_1(\xi)$ и $\varepsilon_2(\xi)$ настолько малыми, чтобы при всех $\lambda \in \overline{B_{\varepsilon_1(\xi)}(0)}$ выполнялось неравенство $\| \frac{\partial F}{\partial \lambda}(\xi, \lambda) - I \| < \rho$, где $I \in \mathbf{R}^{k \times k}$ — единичная матрица, а $\rho > 0$ — любая константа, настолько малая, чтобы любая матрица $A \in \mathbf{R}^{k \times k}$, удовлетворяющая неравенству $\| I - A \| < 2\rho$, была положительно определена. Тогда любое отображение $\hat{F}(\cdot) \in C^1(\overline{B_{\varepsilon_1(\xi)}(0)}; \mathbf{R}^k)$, удовлетворяющее (9), будет диффеоморфизмом $B_{\varepsilon_1(\xi)}(0)$ на $\hat{F}(B_{\varepsilon_1(\xi)}(0))$. Наконец, если $\hat{F}(\cdot) \in C^1(\overline{B_{\varepsilon_1(\xi)}(0)}; \mathbf{R}^k)$ удовлетворяет (8), то для любой $z^* \in \overline{B_{\frac{\varepsilon_2}{2}(\xi)}(\xi)}$ непрерывное отображение $\eta \longmapsto \eta - \hat{F}(F^{-1}(\xi, \eta)) + z^*$ (где через $F^{-1}(\xi, \cdot)$ здесь и далее обозначаем отображение, обратное к $F(\xi, \cdot)$ при фиксированном $\xi \in \mathbf{R}^k$) определено при всех $\eta \in \overline{B_{\varepsilon_2(\xi)}(\xi)}$, отображает замкнутый шар $\overline{B_{\frac{\varepsilon_2(\xi)}{2}}(z^*)}$ в себя и, значит, по теореме Брауэра имеет неподвижную точку, то есть существует $\eta^* \in \overline{B_{\frac{\varepsilon_2(\xi)}{2}}(z^*)} \subset \overline{B_{\varepsilon_2(\xi)}(\xi)}$ такое, что $z^* = \hat{F}(F^{-1}(\xi,\eta^*))$, то есть для любой $z^* \in \overline{B_{\frac{\varepsilon_2}{2}(\xi)}(\xi)}$ существует $\lambda^* := F^{-1}(\xi,\eta^*) \in B_{\varepsilon_1(\xi)}(0)$ такое, что $\hat{F}(\lambda^*) = z^*$.

В заключение заметим, что числа $\varepsilon_1(\xi) > 0$ и $\varepsilon_2(\xi) > 0$ были выбраны при фиксированном $\xi \in \mathbf{R}^k$. Чтобы $\varepsilon_1(\xi)$ и $\varepsilon_2(\xi)$ сделать непрерывными функциями переменной $\xi \in \mathbf{R}^k$, надо провести рассуждения, аналогичные тем, которые мы делали при построении функции $\sigma(\xi)$ (см. доказательство леммы 2). При этом надо воспользоваться тем, что отображения $\xi \mapsto v(\xi,\cdot)$ и $\xi \mapsto w_i(\xi,\cdot)$ $(i = 1,\dots,k)$ принадлежат классам $C(\mathbf{R}^k; L_1([t_1,T];\mathbf{R}^1))$ и $C(\mathbf{R}^k; C^1([t_1,T];\mathbf{R}^1))$ соответственно. Эти рассуждения мы опустим. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Для любой функции $\Delta(\xi,\beta)$ класса $C(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^1;]0,\frac{T-t_1}{3}])$ существует семейство управлений $\{\tilde{v}_\Delta(\xi,\beta,\cdot)\}_{(\xi,\beta)\in\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^1}$, удовлетворяющее условиям:*

1) Отображение $(\xi,\beta) \longmapsto \tilde{v}_\Delta(\xi,\beta,\cdot)$ принадлежит классу $C(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^1; C^1([t_1,T];\mathbf{R}^1))$.

2) $\tilde{v}_\Delta(\xi,\beta,t_1) = x^*_{k+1}$, $\frac{d}{dt}\tilde{v}_\Delta(\xi,\beta,t_1) = f_{k+1}(y^*,x^*_{k+1},x^*_{k+2})$, $\tilde{v}_\Delta(\xi,\beta,T) = = \beta$ при всех $(\xi,\beta) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^1$.

3) $|\tilde{v}_\Delta(\xi,\beta,t) - v(\xi,t)| < \Delta(\xi,\beta)$ при всех $t \in [t_1, t_1 + \frac{\sigma(\xi)}{2}]$ и $\| \tilde{v}_\Delta(\xi,\beta,\cdot) - v(\xi,\cdot)\|_{L_1([t_1,T];\mathbf{R}^1)} < \Delta(\xi,\beta)$ при всех $(\xi,\beta) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^1$.

4) При каждом $(\xi,\beta) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^1$ получаем $\| \tilde{v}_\Delta(\xi,\beta,\cdot)\|_{C([t_1,T];\mathbf{R}^1)} \le 2\max\{|\beta|, \overline{R}(\xi)\} + 1$.

Лемма 4 следует из теоремы о разбиении единицы и из существования указанной аппроксимации при любых фиксированных ξ и β, (а значит, и в некоторой их окрестности).

Для заданной функции $\Delta(\cdot) \in C(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^1;]0,\frac{T-t_1}{3}])$ пусть семейство управлений $\{\tilde{v}_\Delta(\xi,\beta,\cdot)\}_{(\xi,\beta)\in\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^1}$ получено из леммы 4. При каждом $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_k)^T \in \mathbf{R}^k$ зададим семейство гладких управлений $\hat{v}_{\Delta,\lambda}(\xi,\beta,t) := \tilde{v}_\Delta(\xi,\beta,t) + \sum_{j=1}^k \lambda_j w_j(\xi,t)$, $t \in [t_1,T]$, $(\xi,\beta) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^1$ — параметр семейства), и пусть семейство отображений $\{\hat{F}_\Delta(\xi,\beta,\cdot)\}_{(\xi,\beta)\in\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^1}$ задано равенством $\hat{F}_\Delta(\xi,\beta,\lambda) := x(T,t_1,y^*,\hat{v}_{\Delta,\lambda}(\xi,\beta,\cdot))$ при всех $(\xi,\beta) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^1$ и при каждом $\lambda \in \mathbf{R}^k$, для которого траектория $t \longmapsto x(t,t_1,y^*,\hat{v}_{\Delta,\lambda}(\xi,\beta,\cdot))$ определена на всем $[t_1,T]$.

Лемма 5. *Существует непрерывная функция $\Delta_1(\cdot) \in C(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^1;]0, \frac{T-t_1}{3}[)$ такая, что при каждом $(\xi,\beta) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^1$ и при каждом $\lambda \in \overline{B_{\varepsilon_1(\xi)}(0)}$*

траектория $t \longmapsto x(t, t_1, y^*, \hat{v}_{\Delta_1,\lambda}(\xi, \beta, \cdot))$ *определена всюду на* $[t_1, T]$, *а отображение* $\hat{F}(\cdot) := \hat{F}_{\Delta_1}(\xi, \beta, \cdot)$ *при каждом* $(\xi, \beta) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^1$ *принадлежит классу* $C^1(\overline{B_{\varepsilon_1(\xi)}(0)}; \mathbf{R}^k)$ *и удовлетворяет условиям (8) и (9) леммы 3.*

Доказательство леммы 5 мы опускаем. Отметим, что для фиксированного $(\xi, \beta) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^1$ существование достаточно малого $\Delta_1(\xi, \beta) > 0$ такого, что для любого $\tilde{v}_{\Delta_1}(\xi, \beta, \cdot)$ класса $C^1([t_1, T]; \mathbf{R}^1)$, удовлетворяющего условиям 2)–4) леммы 4, отображение $\hat{F}(\cdot) = \hat{F}_{\Delta_1}(\xi, \beta, \cdot)$ определено и непрерывно дифференцируемо в шаре $\overline{B_{\varepsilon_1(\xi)}(0)}$ и удовлетворяет (8) и (9), получить несложно, а чтобы $\Delta_1(\xi, \beta)$ сделать непрерывно зависящей от (ξ, β), проводятся рассуждения, аналогичные построению функции $\sigma(\xi)$.

Заметим, что отображения $(\xi, \beta, \lambda) \mapsto \hat{F}_{\Delta_1}(\xi, \beta, \lambda)$ и $(\xi, \beta, \lambda) \mapsto \frac{\partial \hat{F}_{\Delta_1}}{\partial \lambda}(\xi, \beta, \lambda)$ по построению определены и непрерывны по совокупности переменных всюду на множестве $\{(\xi, \beta, \lambda) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^k \mid \lambda \in \overline{B_{\varepsilon_1(\xi)}(0)}\}$. Кроме того, из лемм 3 и 5 при каждом $(\xi, \beta) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^1$ получаем, что отображение $\hat{F}_{\Delta_1}(\xi, \beta, \cdot)$ есть диффеоморфизм $B_{\varepsilon_1(\xi)}(0)$ на $\hat{F}_{\Delta_1}(\xi, \beta, B_{\varepsilon_1(\xi)}(0))$, и $\overline{B_{\frac{\varepsilon_2(\xi)}{2}}(\xi)} \subset \hat{F}_{\Delta_1}(\xi, \beta, B_{\varepsilon_1(\xi)}(0))$. Отсюда получаем существование непрерывной функции $\lambda^*(\cdot, \cdot) = (\lambda_1^*(\cdot, \cdot), \ldots, \lambda_k^*(\cdot, \cdot))^T \in C(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^1; \mathbf{R}^k)$ такой, что $\lambda^*(\xi, \beta) \in B_{\varepsilon_1(\xi)}(0)$ и $\xi = \hat{F}_{\Delta_1}(\xi, \beta, \lambda^*(\xi, \beta))$ при всех $(\xi, \beta) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^1$. Тогда семейство управлений $\{\hat{v}_{(\xi,\beta)}(\cdot)\}_{(\xi,\beta) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^1}$, заданное в виде $\hat{v}_{(\xi,\beta)}(t) := \hat{v}_{\Delta_1}(\xi, \beta, t) + \sum_{j=1}^k \lambda_j^*(\xi, \beta) w_j(\xi, t)$, $t \in [t_1, T]$ при всех $(\xi, \beta) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^1$, будет искомым, то есть удовлетворяет условиям 4)–6) утверждения 1.

Список литературы

[1] *В.И. Коробов*, Управляемость, устойчивость некоторых нелинейных систем. — *Диф. уравнения* (1973), т. 9, № 4, с. 614–619.

[2] *А.М. Ковалев*, Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. Наукова думка, Киев (1980).

[3] *E.D. Sontag*, Feedback stabilization of nonlinear systems. Robust Control of Linear Systems and Nonlinear Control (M.A. Kaashoek et. al., eds.), Birkhauser, Cambridge, MA, (1990), p. 61–81.

[4] *J.-S. Lin and I. Kanellakopoulos*, Nonlinearities Enhance Parameter Convergence in Strict–Feedback Systems. — *IEEE Trans. Autom. Contr.* (1998), v. 43 p. 1–5.

[5] *V.I. Korobov, S.S. Pavlichkov and W.H. Schmidt*, The controllability problem for certain nonlinear integro-differential Volterra systems. — *Optimization* (2001), v. 50, No. 3–4.

[6] *В.И. Коробов, С.С. Павличков*, Управляемость треугольных систем, неэквивалентных каноническим системам. — *Вісн. Харківськ. нац. ун-ту, Сер. Мат., прикл. мат. і мех.* (2000), № 475, с. 323–329.

[7] *В.И. Коробов, С.С. Павличков*, Управляемость треугольных систем с равномерно ограниченными возмущениями. — *Вісн. Харківськ. нац. ун-ту, Сер. Мат., прикл. мат. і мех.* (1999), № 444, с. 10–14.

[8] *W. Respondek*, Global aspects of linearization, equivalence to polynomial forms and decomposition of nonlinear control systems. Algebraic and Geometric Methods in Nonlinear Control Theory. (M. Fliess and M.Hazewinkel eds.), Reidel, Dordrecht (1986), p. 257–283.

[9] *S. Celikovsky, H. Nijmeijer*, Equivalence of nonlinear systems to triangular form: the singular case. — *Syst. Contr. Lett.* (1996), v. 27, p. 135–144.

[10] *V.I. Korobov and S.S. Pavlichkov*, Controllability of some class of nonlinear Volterra integro-differential control systems. — Int. Conf. dedicated to the 90-th Anniversary of L.S. Pontryagin. Abstracts. Optimal control and Appendices. Moscow (1998), p. 116–118.

[11] *А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин*, Элементы теории функций и фунционального анализа. Наука, Москва (1972).

The continuous dependence of the solution of the controllability problem on the initial and the terminal states for the triangular nonlinearizable systems

V.I. Korobov and S.S. Pavlichkov

Sufficient conditions for the existence of a family of controls $u_{(x^0,x^T)}(\cdot)$, steering the state $x^0 \in \mathbf{R}^n$ into the state $x^T \in \mathbf{R}^n$, for all $x^0 \in \mathbf{R}^n$ and $x^T \in \mathbf{R}^n$, and continuously depending on $x^0 \in \mathbf{R}^n$ and $x^T \in \mathbf{R}^n$, are given for a class of triangular systems whose trajectories, in general, can not be mapped by a diffeomorphism onto the trajectories of a linear canonical system. As a corollary, the complete controllability of the uniformly bounded perturbations of this class is obtained under the global Lipschitz condition for the right-hand side with respect to x and u.

Неперервна залежність розв'язку проблеми керованості від початкового та кінцевого стану для трикутних, нелінеаризуємих систем

В.І. Коробов, С.С. Павличков

Наведено достатні умови існування сім'ї керувань $u_{(x^0,x^T)}(\cdot)$, які переводять точку $x^0 \in \mathbf{R}^n$ в точку $x^T \in \mathbf{R}^n$, для всіх $x^0 \in \mathbf{R}^n$ та $x^T \in \mathbf{R}^n$ і неперервно залежать від $x^0 \in \mathbf{R}^n$ і $x^T \in \mathbf{R}^n$ для класу трикутних систем, траєкторії яких у загальному випадку не відображаються на траєкторії канонічної лінійної системи дифеоморфною заміною координат і керувань. Як наслідок отримано повну керованість рівномірно обмежених збурень систем цього класу за умови глобальної ліпшіцевості правої частини за x та u.