Математическая физика, анализ, геометрия
2001, т. 8, № 2, с. 228–234

О связи между условиями обрыва цепей m-полурешетки и ее m-подполурешетки G-инвариантных элементов для действия конечных групп

Т.М. Шамилев

Крымский государственный индустриально-педагогический институт
ул. Севастопольская, 21, Симферополь, 95015, Украина
E-mail:shamilev@csipi.simfi.net

Статья поступила в редакцию 26 февраля 2001 г.
Представлена В.Я. Голодцом

Приводится доказательство теоремы о связи между условиями обрыва цепей m-полурешетки и ее m-подполурешетки G-инвариантных элементов для действий конечных групп, которая ранее была приведена в работе [7] без доказательства. ·

В работах [1] и [2], как и во многих других, изучается действие групп в кольцах. Ряд задач действий групп в кольцах сводится к изучению действий групп в решетках. Такие действия изучались в работах [3] и [4], где рассматривалась следующая задача: пусть L — решетка, в которой задано действие конечной группы G, L^G — подрешетка G-инвариантных элементов в L, тогда будет ли L удовлетворять условию обрыва возрастающих (убывающих) цепей, если L^G удовлетворяет этому условию? Положительный ответ на данный вопрос получен в работе [3] для случая, когда L — дистрибутивная решетка, а G — произвольная конечная группа или L-модулярная решетка, а G — разрешимая конечная группа, а в [4] — когда L — модулярная решетка и G — произвольная конечная группа. В настоящей работе эта задача рассматривается для m-полурешетки с сокращением, которая является упорядоченной полугруппой, с сокращением изучавшейся в работах [5, 6]. Целью

· Mathematics Subject Classification (2000): 06B05, 20C33.

работы является доказательство теоремы о связи между условиями обрыва цепей m-полурешетки и ее m-подполурешетки G-инвариантных элементов для действий конечных групп, которая ранее была приведена в работе [7] без доказательства.

Рассмотрим необходимые определения.

Определение 1 ([8, гл. XIV, §4]). *$\vee$-полурешетка L с умножением называется мультипликативной полурешеткой (m-полурешеткой), если для любых a, b, $c \in L$ выполнено*

$$a(b \vee c) = ab \vee ac, \quad (b \vee c)a = ba \vee ca.$$

Далее, чтобы не усложнять изложение, рассмотрим коммутативные и ассоциативные m-полурешетки. Пусть L является m-полурешеткой.

Определение 2. *Биекция $F\colon L \to L$ называется автоморфизмом m-полурешетки L, если*

$$F(ab) = F(a)F(b), \tag{1}$$

$$F(a \vee b) = F(a) \vee F(b). \tag{2}$$

Через G_L обозначим группу всех автоморфизмов m-полурешетки. Пусть G — некоторая группа.

Определение 3. *Говорят, что задано действие группы G в m-полурешетке L, если задан гомоморфизм $p\colon G \to G_L$.*

Далее для краткости, вместо $p(g)x$, где $g \in G$, $x \in L$, будем писать gx. Через L^G будем обозначать m-подполурешетку всех G-инвариантных элементов в L (т.е. таких элементов $x \in L$, что $gx = x$ для всех $g \in G$).

Определение 4. *m-полурешетку L назовем m-полурешеткой с сокращением, если из условий $x \leq y$, $ax = ay$, $a \vee x = a \vee y$ для некоторого $a \in L$ следует, что $x = y$.*

Заметим, что если в дистрибутивной решетке за операцию умножения принять операцию взятия инфимума $a \wedge b$, то она будет m-полурешеткой с сокращением.

Другим примером являются линейно упорядоченные группы: например, группа действительных чисел с обычными операциями умножения и супремума.

Будем рассматривать многочлены от переменных $x_1, \ldots, x_n$ относительно операций умножения и взятия супремума двух элементов.

Будем говорить, что $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — симметрический многочлен, если он не меняется при любой перестановке переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Пусть $\varphi_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\varphi_n(x_1,\dots,x_n)$ обозначают элементарные симметрические многочлены:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x_1,\dots,x_n)=x_1\vee x_2\vee\dots\vee x_n,\\
&\varphi_2(x_1,\dots,x_n)=x_1x_2\vee x_2x_3\vee\dots\vee x_{n-1}x_n,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\varphi_n(x_1,\dots,x_n)=x_1x_2\dots x_n\,.
\end{aligned}$$

Теорема 1. *Если элементы $x_i,\ y_i\in L,\ i=1,2,\dots,n$ удовлетворяют условиям $x_i\le y_i,\ i=1,2,\dots,n$ и*

$$\varphi_k(x_1,\dots,x_n)=\varphi_k(y_1,\dots,y_n),\quad k=\overline{1,n}, \tag{3}$$

то $x_i=y_i,\ i=\overline{1,n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Многочлен φ_{n-1} можно представить в виде

$$\varphi_{n-1}(x_1,\dots,x_n)=\psi(x_1,\dots,x_n)\vee(x_1\dots x_{n-1}), \tag{4}$$

где $\psi(x_1,\dots,x_n)$ есть супремум всех выражений $x_{i_1}\dots x_{i_{n-1}}$, отличных от $x_1\dots x_{n-1}$.

Рассмотрим многочлен $\psi(x_1,\dots,x_n)$. Его можно записать в виде

$$\psi(x_1,\dots,x_n)=x_n\varphi_{n-2}(x_1,\dots,x_{n-1}).$$

Используя это равенство, получим

$$(x_1x_2\dots x_{n-1})\psi(x_1,x_2,\dots,x_n)=\varphi_n(x_1,\dots,x_n)\varphi_{n-2}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}). \tag{5}$$

Из неравенства $x_i\le y_i,\ i=\overline{1,n}$, следуют неравенства

$$\begin{aligned}
&\varphi_{n-1}(x_1,\dots,x_n)=\psi(x_1,\dots,x_n)\vee(x_1\dots x_{n-1})\le\psi(x_1,\dots,x_n)\\
&\vee(y_1\dots y_{n-1})\le\psi(y_1,\dots,y_n)\vee(y_1\dots y_{n-1})=\varphi_{n-1}(y_1,\dots,y_n).
\end{aligned}$$

Отсюда получим равенство

$$\psi(x_1,\dots,x_n)\vee(x_1\dots x_{n-1})=\psi(x_1,\dots,x_n)\vee(y_1\dots y_{n-1}). \tag{6}$$

Из равенства $\varphi_n(x_1,\dots,x_n)=\varphi_n(y_1,\dots,y_n)$ получаем равенство

$$\varphi_n(x_1,\dots,x_n)\varphi_{n-2}(x_1,\dots,x_{n-1})=\varphi_n(y_1,\dots,y_n)\varphi_{n-2}(x_1,\dots,x_{n-1}).$$

Отсюда, из (5) и неравенства

$$\begin{aligned}
&\varphi_n(x_1,\dots,x_n)\varphi_{n-2}(x_1,\dots,x_{n-1}) = \psi(x_1,\dots,x_n)(x_1\dots x_{n-1})\\
&\le x_n\varphi_{n-2}(x_1,\dots,x_{n-1})(x_1\dots x_{n-1}) \le x_n\varphi_{n-2}(x_1,\dots,x_{n-1})(y_1\dots y_{n-1})\\
&= \psi(x_1,\dots,x_n)(y_1\dots y_{n-1}) \le y_n\varphi_{n-2}(x_1,\dots,x_{n-1})(y_1\dots y_{n-1})\\
&= \varphi_n(y_1,\dots,y_n)\varphi_{n-2}(x_1,\dots,x_{n-1})
\end{aligned}$$

получаем равенство

$$\psi(x_1,\dots,x_n)(x_1\dots x_{n-1}) = \psi(x_1,\dots,x_n)(y_1,\dots,y_{n-1}). \tag{7}$$

Отсюда и из (6), используя то, что L является m-полурешеткой с сокращением, получаем равенство $x_1\dots x_{n-1} = y_1\dots y_{n-1}$. Аналогично получаются также равенства вида $x_{i_1}\dots x_{i_{n-1}} = y_{i_1}\dots y_{i_{n-1}}$, где $1\le i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1}\le n$.

Теперь предположим, что имеем равенства вида

$$x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_m} = y_{i_1}y_{i_2}\dots y_{i_m}, \tag{8}$$

где $1\le i_1 < i_2 < \dots < i_m \le n$.

Покажем, что из этих равенств могут быть получены равенства вида

$$x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_{m-1}} = y_{i_1}y_{i_2}\dots y_{i_{m-1}}, \quad \text{где } 1\le i_1 < i_2 < \dots < i_{m-1}\le n.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
&\varphi_{m-1}(x_1,\dots,x_n) = f(x_1,\dots,x_n)\vee(x_1x_2\dots x_{m-1}) \le f(x_1,\dots,x_n)\\
&\vee(y_1\dots y_{m-1}) \le f(y_1,\dots,y_n)\vee(y_1\dots y_{m-1}) = \varphi_{m-1}(y_1,\dots,y_n),
\end{aligned}$$

где через $f(x_1,\dots,x_n)$ обозначен супремум всех одночленов $x_{i_1}\dots x_{i_{m-1}}$, $1\le i_1 < i_2 < \dots i_{m-1}\le n$, отличных от $x_1\dots x_{m-1}$. Отсюда и из равенства

$$\varphi_{m-1}(x_1,\dots,x_n) = \varphi_{m-1}(y_1,\dots,y_n)$$

получаем равенство

$$f(x_1,\dots,x_n)\vee(x_1\dots x_{m-1}) = f(x_1,\dots,x_n)\vee(y_1\dots y_{m-1}). \tag{9}$$

В каждом одночлене многочлена $f(x_1,\dots,x_n)$ имеется по крайней мере одно переменное, отличное от $x_1,x_2,\dots,x_{m-1}$. Поэтому f можно записать в виде

$$\begin{aligned}
&f(x_1,\dots,x_n)\\
&= x_m h_1(x_1,\dots,x_n)\vee x_{m+1}h_2(x_1,\dots,x_n)\vee\dots\vee x_n h_{n-m+1}(x_1,\dots,x_n),
\end{aligned}$$

где $h_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,h_{n-m+1}(x_1,\ldots,x_n)$ — некоторые многочлены. Имеет место неравенство

$$\begin{aligned}&f(x_1,\ldots,x_n)(x_1\ldots x_{m-1})=(x_mh_1(x_1,\ldots,x_n)\vee x_{m+1}h_2(x_1,\ldots,x_n)\vee\\&\ldots\vee x_nh_{n-m+1}(x_1,\ldots,x_n))(x_1\ldots x_{m-1})=x_mx_1\ldots x_{m-1}h_1(x_1,\ldots,x_n)\\&\vee x_{m+1}x_1\ldots x_{m-1}h_2(x_1,\ldots,x_n)\vee\ldots\vee x_nx_1\ldots x_{m-1}h_{n-m+1}(x_1,\ldots,x_n)\\&\le x_my_1\ldots y_{m-1}h_1(x_1,\ldots,x_n)\vee x_{m+1}y_1\ldots y_{m-1}h_2(x_1,\ldots,x_n)\vee\\&\ldots\vee x_ny_1\ldots y_{m-1}h_{n-m+1}(x_1,\ldots,x_n)=f(x_1,\ldots,x_n)(y_1\ldots y_{m-1})\\&\le y_my_1\ldots y_{m-1}h_1(x_1,\ldots,x_n)\vee y_{m+1}y_1\ldots y_{m-1}h_2(x_1,\ldots,x_n)\vee\\&\ldots\vee y_ny_1\ldots y_{m-1}h_{n-m+1}(x_1,\ldots,x_n).\end{aligned}\tag{10}$$

В силу равенств (8) имеем равенства

$$\begin{aligned}&x_mx_1\ldots x_{m-1}=y_my_1\ldots y_{m-1},\\&x_{m+1}x_1\ldots x_{m-1}=y_{m+1}y_1\ldots y_{m-1},\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&x_nx_1\ldots x_{m-1}=y_ny_1\ldots y_{m-1}.\end{aligned}$$

Умножая первое равенство на $h_1(x_1,\ldots,x_n)$, второе — на $h_2(x_1,\ldots,x_n)$, $\ldots$, последнее — на $h_{n-m+1}(x_1,\ldots,x_n)$ и взяв супремумы от левых и правых частей, получим равенство

$$\begin{aligned}&x_mx_1\ldots x_{m-1}h_1(x_1,\ldots,x_n)\vee x_{m+1}x_1\ldots x_{m-1}h_2(x_1,\ldots,x_n)\vee\ldots\\&\vee x_nx_1\ldots x_{m-1}h_{n-m+1}(x_1,\ldots,x_n)=y_my_1y_2\ldots y_{m-1}h_1(x_1,\ldots,x_n)\\&\vee y_{m+1}y_1\ldots y_{m-1}h_2(x_1,\ldots,x_n)\vee\ldots\vee y_ny_1\ldots y_{m-1}h_{n-m+1}(x_1,\ldots,x_n).\end{aligned}$$

Отсюда и из (10) получаем равенство

$$f(x_1,\ldots,x_n)(x_1,\ldots,x_{m-1})=f(x_1,\ldots,x_n)(y_1,\ldots,y_{m-1}).\tag{11}$$

Из равенств (9) и (11), используя то, что L является m-полурешеткой с сокращением, получаем равенство $x_1\ldots x_{m-1}=y_1y_2\ldots y_{m-1}$.

Аналогично получаются равенства вида

$$x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_{m-1}}=y_{i_1}y_{i_2}\ldots y_{i_{m-1}},\quad \text{где } 1\le i_1<\ldots<i_{m-1}\le n.$$

Далее, по индукции, через конечное число шагов получаем равенства $x_i=y_i$, $i=\overline{1,n}$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть L является m-полурешеткой с сокращением и в ней задано действие произвольной конечной группы G. Тогда, если L^G удовлетворяет условию обрыва возрастающих (убывающих) цепей, то L также удовлетворяет этому условию.*

Доказательство. Положим $G = \{g_1, \dots, g_n\}$. Пусть L^G удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей и $\{y_r, r = \overline{1,\infty}\}$ — возрастающая цепь в L. Так как для каждого $j = \overline{1,n}$ последовательность $\{\varphi_j(g_1y_r, \dots, g_ny_r),\ r = \overline{1,\infty}\}$ также возрастающая, $\varphi_j(g_1y_r, \dots, g_ny_r) \in L^G$ и в L^G всякая возрастающая цепь обрывается, то существует такое r_0, что $\varphi_j(g_1y_r, \dots, g_ny_r) = \varphi_j(g_1y_{r+1}, \dots, g_ny_{r+1})$ для всех $r > r_0$, $j = \overline{1,n}$. Отсюда, в силу теоремы 1, получаем, что $y_r = y_{r+1}$ для всех $r > r_0$, т.е. цепь $\{y_r\}$ обрывается.

Теорема доказана.

Список литературы

[1] *S. Montgomery*, Group actions on rings: Some classical problems. — *Methods in Ring Theory:* Proceeding of the 1983 NATO AST Reidel. P. 327–346.

[2] *Т. Спрингер*, Теория инвериантов. Наука, Москва (1981).

[3] *Дж.Х. Хаджиев*, Действие конечных групп в дедекиндовых структурах. — *Докл. АН УзССР* (1977), т. 2, с. 7.

[4] *Joc.W. Fisher*, Chain condition for modular lattices with finite group actions. — *Canad. J. Math.* (1979), v. 31, No. 3, p. 558–564.

[5] *А.Я. Овсянников*, О решеточных изоморфизмах непериодических полугрупп с законом сокращения. — В сб.: Исследование алгебрических систем по свойствам их подсистем. Свердловск (1987), с. 100–107.

[6] *Л.Д. Шеврин, А.Я Овсянников*, Полугруппы и их подполугрупповые решетки. Ч. 2. Свердловск (1991).

[7] *Т.М. Шамилев*, Действие конечных групп в мультипликативных полурешетках. — Деп. в УзНИИНТИ 07.02.95, № 2332-Уз 95.

[8] *Г. Биркгоф*, Теория решеток. Наука, Москва (1984).

About connection between ascending chain conditions of m-semilattice with reduction and of it's m-subsemilattice of G-invariable elements for finite group actions

T.M. Shamilev

The proof of the theorem of connection between ascending chain conditions of m-semilattice with reduction and of it's m-subsemilattice of G-invariable elements for finite group actions is given.

Про зв'язок між умовами обриву ланцюгів m-півграт та її m-підпівграт G-інваріантних елементів для дій кінцевих груп

Т.М. Шамілєв

Наводиться доведення теореми про зв'язок між умовами обриву ланцюгів m-півграт зі скороченням та її m-підпівграт G-інваріантних елементів для дій кінцевих груп, що раніше була приведена в роботі [7] без доказу.