Математическая физика, анализ, геометрия
2001, т. 8, № 3, с. 251–260

О классе функций, связанном с некоторой проблемой моментов

С.М. Загороднюк

Механико-математический факультет
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина

Статья поступила в редакцию 11 апреля 2001 г.

Представлена В.А. Золотаревым

Изучаются свойства функций, связанных с некоторой симметричной проблемой моментов. В терминах этих функций получены достаточные условия разрешимости проблемы моментов. ·

Одной из классических задач анализа является проблема моментов Гамбургера [1]. Данная задача состоит в нахождении неубывающей на вещественной оси функции $\sigma(\lambda)$ такой, что

$$\int_R \lambda^k d\sigma(\lambda) = s_k, k = \overline{0,\infty},$$

где $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ — заданная последовательность вещественных чисел.

Известны критерий разрешимости и описание всех решений данной задачи. Эта задача тесно связана с трехдиагональными, полубесконечными, симметричными или якобиевыми матрицами. По моментам $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ при некотором условии позитивности [1, с. 9] строится система многочленов $\{p_k(\lambda)\}_{k=0}^{\infty}$, удовлетворяющая соотношению:

$$J_3 p = \lambda p,$$

где J_3 — некоторая якобиева матрица и $p = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \cdot \end{pmatrix}$ — вектор из многочленов $p_k(\lambda)$.

· Mathematics Subject Classification 2000: 44A60.

В.А. Золотаревым была поставлена задача изучения систем многочленов, удовлетворяющих соотношению:

$$J_5 p = \lambda^2 p,$$

где $J_5 = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \beta_0 & \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & . \\ \overline{\beta_0} & \gamma_1 & \beta_1 & \alpha_1 & 0 & 0 & . \\ \alpha_0 & \overline{\beta_1} & \gamma_2 & \beta_2 & \alpha_2 & 0 & . \\ 0 & \alpha_1 & \overline{\beta_2} & \gamma_3 & \beta_3 & \alpha_3 & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$, $\alpha_k > 0,\ \beta_k \in C,\ \gamma_k \in R,\ k = \overline{0,\infty}$

— полубесконечная, пятидиагональная эрмитова матрица, которую также будем называть якобиевой, p — вектор из многочленов.

В работе [2] приведены примеры подобных систем многочленов, доказаны соотношения ортогональности для них, изучен вопрос о наличии у таких систем соотношения типа $\tilde{J}_3 p = \lambda p$, где $\tilde{J}_3$ — трехдиагональная якобиева матрица.

В [2] введена проблема моментов, которая возникла при изучении данных многочленов. Эта задача тесно связана с пятидиагональными якобиевыми матрицами (см. [2, с. 268–272]).

Рассмотрим задачу следующего вида:

Определение ([2, с. 265]). *Поставим следующую проблему моментов: найти матрицу-функцию* $\sigma(\lambda) = \begin{pmatrix} \sigma_1(\lambda) & \sigma_2(\lambda) \\ \sigma_3(\lambda) & \sigma_4(\lambda) \end{pmatrix}, \lambda \in C;\ \sigma_i(\lambda) : R \cup T \to C,\ i = \overline{1,4}$:

1) $\sigma(\lambda)$ *— эрмитовая, монотонно неубывающая матрица-функция, т.е.*

$$\sigma(\lambda_2) \geq \sigma(\lambda_1),\ \lambda_2 \geq \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2 \in R,$$

$$\sigma(\lambda_2) \geq \sigma(\lambda_1),\ \frac{\lambda_2}{i} \geq \frac{\lambda_1}{i}, \lambda_1, \lambda_2 \in T; \tag{1}$$

2) $\int\limits_{R\cup T} (\lambda^k, (-\lambda)^k) d\sigma(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = s_k,\ k = \overline{0,\infty},$

$$\int\limits_{R\cup T} (\lambda^{k-1}, (-\lambda)^{k-1}) d\sigma(\lambda) \overline{\begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}} = m_k,\ k = \overline{1,\infty}, \tag{2}$$

где $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}, \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— фиксированные последовательности комплексных чисел;* $T = (-i\infty, i\infty)$.

Будем называть эту задачу **симметричной проблемой моментов**.

Задача (1), (2) обобщает проблему моментов Гамбургера [1]. Действительно, если будем искать только решения $\sigma(\lambda)$ вида $\sigma(\lambda) = \begin{pmatrix} \sigma_1(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

с носителем на вещественной оси, то это эквивалентно проблеме моментов Гамбургера.

В работе [2] приведены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (1), (2). Нашей целью будет получение достаточных условий разрешимости несколько иного вида.

Как и при изучении проблемы моментов Гамбургера, при изучении симметричной проблемы моментов оказывается полезным проследить связь с некоторым классом функций. Для проблемы моментов Гамбургера строятся функции $\{w(z)\}$ вида $w(z) = \int_R \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z}, \lambda \in C\backslash R$ ([1, с. 121]), которые используются для описания всех решений задачи. Между множеством $\{w(z)\}$ и множеством всех решений проблемы моментов Гамбургера существует взаимно однозначное соответствие. При этом функции $w(z)$ принадлежат классу Неванлинны и обладают некоторыми асимптотическими свойствами. Аналогично в случае симметричной проблемы моментов можно ввести пару функций, принадлежащих некоторому классу функций и обладающих асимптотическими свойствами. Как и для проблемы моментов Гамбургера, задача сводится к нахождению функций заданного класса и обладающих заданной асимптотикой.

При изучении проблемы моментов (1), (2) можно перейти к скалярным функциям. Сделаем следующее определение.

Определение. *Рассмотрим задачу:*
найти пару функций $(\tilde{\sigma}_1(\lambda), \tilde{\sigma}_2(\lambda)), \lambda \in C$; $\tilde{\sigma}_i(\lambda) : R \cup T \to C,\ i = \overline{1,2}$, *такую, что:*
1) $\tilde{\sigma}_1(\lambda)$ *монотонно неубывающая на* R *и* T, *т.е.*

$$\tilde{\sigma}_1(\lambda_1) \geq \tilde{\sigma}_1(\lambda_2),\ \lambda_1 \geq \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in R,$$

$$\tilde{\sigma}_1(\lambda_1) \geq \tilde{\sigma}_1(\lambda_2),\ \frac{\lambda_1}{i} \geq \frac{\lambda_2}{i}, \lambda_1, \lambda_2 \in T;$$

$$\overline{\tilde{\sigma}_2(\lambda)} = -\tilde{\sigma}_2(-\lambda), \lambda \in R \cup T;$$

$$|\triangle_{1,2}\tilde{\sigma}_2(\lambda)| \leq \sqrt{\triangle_{1,2}\tilde{\sigma}_1(\lambda)\triangle_{1,2}(-\tilde{\sigma}_1(-\lambda))},$$

где $\triangle_{1,2}\tilde{\sigma}_k(\lambda) = \tilde{\sigma}_k(\lambda_1) - \tilde{\sigma}_k(\lambda_2)$ *при* $k = 1, 2$ *— приращение функции на интервале* $[\lambda_1, \lambda_2]$*;*

$$\lambda_1 \geq \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in R \text{ или } \frac{\lambda_1}{i} \geq \frac{\lambda_2}{i}, \lambda_1, \lambda_2 \in T; \tag{3}$$

2) $\int\limits_{R \cup T} \lambda^k d(\tilde{\sigma}_1(\lambda) + \tilde{\sigma}_2(\lambda)) = s_k, \quad k = \overline{0, \infty},$

$$\int\limits_{R \cup T} \lambda^{k-1}\overline{\lambda} d(\tilde{\sigma}_1(\lambda) - \tilde{\sigma}_2(\lambda)) = m_k, \quad k = \overline{1, \infty}, \tag{4}$$

где $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— фиксированные последовательности комплексных чисел.*

Будем называть эту задачу **симметричной проблемой моментов для двух функций**.

Определение. *Решение симметричной проблемы моментов* $\sigma(\lambda) = \begin{pmatrix} \sigma_1(\lambda) & \sigma_2(\lambda) \\ \sigma_3(\lambda) & \sigma_4(\lambda) \end{pmatrix}$ *будем называть* **стандартным**, *если оно удовлетворяет свойствам*

$$\sigma_1(\lambda) = -\sigma_4(-\lambda),\ \ \sigma_2(\lambda) = -\sigma_3(-\lambda), \lambda \in R \cup T.$$

Стандартное решение имеет вид

$$\sigma(\lambda) = \begin{pmatrix} \sigma_1(\lambda) & \sigma_2(\lambda) \\ -\sigma_2(-\lambda) & -\sigma_1(-\lambda) \end{pmatrix},\ \lambda \in R \cup T.$$

Если $\sigma(\lambda)$ — произвольное решение проблемы моментов, то с помощью замены переменных легко показать, что

$$\hat{\sigma}(\lambda) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_1(\lambda) - \sigma_4(-\lambda) & \sigma_2(\lambda) - \sigma_3(-\lambda) \\ \sigma_3(\lambda) - \sigma_2(-\lambda) & \sigma_4(\lambda) - \sigma_1(-\lambda) \end{pmatrix}, \lambda \in R \cup T, \tag{5}$$

является стандартным решением.

Между стандартными решениями проблемы моментов (1), (2) и решениями проблемы моментов (3), (4) существует взаимно однозначное соответствие l:

$$\sigma(\lambda) = \begin{pmatrix} \sigma_1(\lambda) & \sigma_2(\lambda) \\ -\sigma_2(-\lambda) & -\sigma_1(-\lambda) \end{pmatrix} \text{— стандартное решение задачи (1), (2)} \to^{l}$$

$$2(\sigma_1(\lambda), \sigma_2(\lambda)) \text{ — решение задачи (3), (4);}$$

$$(\tilde{\sigma}_1(\lambda), \tilde{\sigma}_2(\lambda)) \text{ — решение задачи (3), (4)} \to^{l^{-1}}$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_1(\lambda) & \tilde{\sigma}_2(\lambda) \\ -\tilde{\sigma}_2(-\lambda) & -\tilde{\sigma}_1(-\lambda) \end{pmatrix} \text{— стандартное решение задачи (1), (2).} \tag{6}$$

Это легко проверяется заменой переменных $\lambda \to -\lambda$ в соответствующих интегралах.

Таким образом, задачи (1), (2) и (3), (4) одновременно имеют или не имеют решений, нахождение стандартных решений проблемы моментов (1), (2) эквивалентно решению задачи (3), (4).

Свяжем с решением $\sigma(\lambda)$ симметричной проблемы моментов (1), (2) пару функций:

$$f(\lambda) = \int\limits_{R \cup T} \left(\frac{1}{\mu - \lambda}, \frac{1}{-\mu - \lambda} \right) d\sigma(\mu) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$g(\lambda) = \int\limits_{R\cup T} \left(\frac{1}{\mu-\lambda}, \frac{1}{-\mu-\lambda}\right) d\sigma(\mu)\overline{\begin{pmatrix} \mu \\ -\mu \end{pmatrix}},\ \lambda \notin R\cup T. \tag{7}$$

Если $\hat{\sigma}(\lambda)$ — соответствующее стандартное решение из (5), то $(f(\lambda), g(\lambda))$ можно записать следующим образом:

$$f(\lambda) = \int\limits_{R\cup T} \left(\frac{1}{\mu-\lambda}, \frac{1}{-\mu-\lambda}\right) d\hat{\sigma}(\mu) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$g(\lambda) = \int\limits_{R\cup T} \left(\frac{1}{\mu-\lambda}, \frac{1}{-\mu-\lambda}\right) d\hat{\sigma}(\mu)\overline{\begin{pmatrix} \mu \\ -\mu \end{pmatrix}},\ \lambda \notin R\cup T.$$

Если $\tilde{\sigma}(\lambda) = (\tilde{\sigma}_1(\lambda), \tilde{\sigma}_2(\lambda)) = 2(\hat{\sigma}_1(\lambda), \hat{\sigma}_2(\lambda))$ — решение симметричной проблемы моментов для двух функций, то $f(\lambda), g(\lambda)$ допускают представление

$$f(\lambda) = \int\limits_{R\cup T} \frac{d(\tilde{\sigma}_1(\mu) + \tilde{\sigma}_2(\mu))}{\mu-\lambda}, g(\lambda) = \int\limits_{R\cup T} \frac{\overline{\mu} d(\tilde{\sigma}_1(\mu) - \tilde{\sigma}_2(\mu))}{\mu-\lambda}, \lambda \notin R\cup T.$$

Покажем, что интегралы в (7) существуют при $\lambda \notin R\cup T$. Действительно, интегралы

$$\int\limits_{R\cup T} \frac{1}{\mu^2-\lambda^2}(\mu,-\mu) d\sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \int\limits_{R\cup T} \frac{1}{\mu^2-\lambda^2}(1,1) d\sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\int\limits_{R\cup T} \frac{1}{\mu^2-\lambda^2}(\mu,-\mu) d\sigma \overline{\begin{pmatrix} \mu \\ -\mu \end{pmatrix}}, \int\limits_{R\cup T} \frac{1}{\mu^2-\lambda^2}(1,1) d\sigma \overline{\begin{pmatrix} \mu \\ -\mu \end{pmatrix}} \tag{8}$$

существуют при $\lambda \notin R\cup T$, поскольку по неравенству Коши–Буняковского

$$\left| \int\limits_{R\cup T} \frac{1}{\mu^2-\lambda^2}(\mu,-\mu) d\sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \le \left(\int\limits_{R\cup T} \frac{1}{\mu^2-\lambda^2}(\mu,-\mu) d\sigma \right.$$

$$\left. * \overline{\left(\frac{1}{\mu^2-\lambda^2}\begin{pmatrix} \mu \\ -\mu \end{pmatrix}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{R\cup T} (1,1) d\sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int\limits_{R\cup T} \frac{1}{\mu^2-\lambda^2}(\mu,-\mu) d\sigma \right.$$

$$\left. * \overline{\left(\frac{1}{\mu^2-\lambda^2}\begin{pmatrix} \mu \\ -\mu \end{pmatrix}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{s_0};$$

$$\int\limits_{R\cup T} \frac{1}{|\mu^2-\lambda^2|^2}(\mu,-\mu) d\sigma \overline{\begin{pmatrix} \mu \\ -\mu \end{pmatrix}} \le \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{R\cup T} (\mu,-\mu) d\sigma \overline{\begin{pmatrix} \mu \\ -\mu \end{pmatrix}} = \frac{1}{\varepsilon^2} m_2,$$

$$\text{при } \varepsilon = \min_{\mu \in R \cup T} |\mu^2 - \lambda^2|$$

и остальные интегралы оцениваются аналогично. Обозначим интегралы в (8) соответственно I_1, I_2, I_3, I_4. Из того, что $I_1 + I_2, I_3 + I_4$ есть интегралы в правых частях равенств из (7), следует существование требуемых интегралов.

Для функций $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ выполняются асимптотические соотношения:

Теорема 1. *Пусть задана пара функций $(f(\lambda), g(\lambda))$, соответствующая решению $\sigma(\lambda)$ симметричной проблемы моментов и решению $\tilde{\sigma}(\lambda)$ симметричной проблемы моментов для двух функций. Тогда справедливы следующие соотношения:*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{n+1} \left\{ f(\lambda) + \frac{s_0}{\lambda} + \frac{s_1}{\lambda^2} + \ldots + \frac{s_{n-1}}{\lambda^n} \right\} = -s_n,$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{n+1} \left\{ g(\lambda) + \frac{m_1}{\lambda} + \frac{m_2}{\lambda^2} + \ldots + \frac{m_n}{\lambda^n} \right\} = -m_{n+1},\ n = 1, 2, \ldots ,$$

где $\lambda \in C:\ Arg\lambda \in (\delta, \frac{\pi}{2} - \delta) \cup (\frac{\pi}{2} + \delta, \pi - \delta) \cup (\pi + \delta, \frac{3\pi}{2} - \delta) \cup (\frac{3\pi}{2} - \delta, 2\pi - \delta),$

$$\delta > 0 (\delta < \frac{\pi}{2}). \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим выражение

$$\lambda^{n+1} \left\{ f(\lambda) + \frac{s_0}{\lambda} + \frac{s_1}{\lambda^2} + \ldots + \frac{s_{n-1}}{\lambda^n} \right\} = \lambda^{n+1} \left\{ \int\limits_{R\cup T} \left(\frac{1}{\mu - \lambda}, \frac{1}{-\mu - \lambda} \right) d\sigma(\mu) \right.$$

$$* \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int\limits_{R\cup T} \frac{1}{\lambda}(1,1) d\sigma(\mu) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int\limits_{R\cup T} \frac{1}{\lambda^2}(\mu, -\mu) d\sigma(\mu) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. + \ldots + \int\limits_{R\cup T} \frac{1}{\lambda^n} \left(\mu^{n-1}, (-\mu)^{n-1} \right) d\sigma(\mu) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \lambda^{n+1} \int\limits_{R\cup T} \left(\frac{1}{\mu - \lambda} \left(1 + \frac{\mu - \lambda}{\lambda} \right. \right.$$

$$\left. + \frac{\mu(\mu - \lambda)}{\lambda^2} + \ldots + \frac{\mu^{n-1}(\mu - \lambda)}{\lambda^n} \right), \frac{1}{-\mu - \lambda} \left(1 + \frac{-\mu - \lambda}{\lambda} + \frac{-\mu(-\mu - \lambda)}{\lambda^2} \right.$$

$$\left. \left. + \ldots + \frac{(-\mu)^{n-1}(-\mu - \lambda)}{\lambda^n} \right) \right) d\sigma(\mu) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \int\limits_{R\cup T} \left(\frac{\lambda\mu^n}{\mu - \lambda}, \frac{\lambda(-\mu)^n}{-\mu - \lambda} \right) d\sigma(\mu)$$

$$* \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -s_n + \int\limits_{R\cup T} \left(\frac{\mu^{n+1}}{\mu - \lambda}, \frac{(-\mu)^{n+1}}{-\mu - \lambda} \right) d\sigma(\mu) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\int\limits_{R\cup T}\left(\frac{\mu^{n+1}}{\mu-\lambda},\frac{(-\mu)^{n+1}}{-\mu-\lambda}\right)d\sigma(\mu)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=-s_n+\int\limits_{R\cup T}\left(\frac{\mu^{n+1}(\mu+\lambda)}{\mu^2-\lambda^2},\right.$$

$$\left.\frac{(-\mu)^{n+1}(-\mu+\lambda)}{\mu^2-\lambda^2}\right)d\sigma(\mu)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=-s_n+\int\limits_{R\cup T}\frac{1}{\mu^2-\lambda^2}(\mu^{n+2},(-\mu)^{n+2})$$

$$*d\sigma(\mu)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\lambda\int\limits_{R\cup T}\frac{1}{\mu^2-\lambda^2}\left(\mu^{n+1},(-\mu)^{n+1}\right)d\sigma(\mu)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Оценивая, аналогично, как было проделано выше при доказательстве сходимости интегралов в (7), по неравенству Коши–Буняковского интегралы и учитывая, что $|\mu-\lambda|>|\lambda|\sin\delta$, $\mu\in R\cup T$, λ в углах из (9), получаем первое равенство в (9). Второе равенство в (9) доказывается аналогично.

Теорема доказана.

Справедлива теорема

Теорема 2. *Пусть дана симметричная проблема моментов с некоторыми последовательностями $\{s_k,m_{k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ и $(f(\lambda),g(\lambda))$ — некоторые функции, которые удовлетворяют (9). Для того чтобы проблема моментов имела решение, достаточно выполнение представления*

$$f(\lambda)=\int\limits_{R\cup T}\left(\frac{1}{\mu-\lambda},\frac{1}{-\mu-\lambda}\right)d\sigma(\mu)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

$$g(\lambda)=\int\limits_{R\cup T}\left(\frac{1}{\mu-\lambda},\frac{1}{-\mu-\lambda}\right)d\sigma(\mu)\overline{\begin{pmatrix}\mu\\-\mu\end{pmatrix}},\ \lambda\notin R\cup T,$$

где $\sigma(\lambda)$ — некоторая неубывающая, эрмитовая матрица-функция на вещественной и мнимой осях, имеющая все моменты вида интегралов в (2); или

$$f(\lambda)=\int\limits_{R\cup T}\frac{d(\tilde\sigma_1(\mu)+\tilde\sigma_2(\mu))}{\mu-\lambda},g(\lambda)=\int\limits_{R\cup T}\frac{\overline{\mu}d(\tilde\sigma_1(\mu)-\tilde\sigma_2(\mu))}{\mu-\lambda},\lambda\notin R\cup T,\quad(11)$$

где $\sigma_1(\lambda),\sigma_2(\lambda)$ — некоторые функции на вещественной и мнимой осях такие, что:

$\tilde\sigma_1(\lambda)$ монотонно неубывающая на R и T,

$$\overline{\tilde\sigma_2(\lambda)}=-\tilde\sigma_2(-\lambda),\lambda\in R\cup T;$$

$$|\triangle_{1,2}\tilde\sigma_2(\lambda)|\le\sqrt{\triangle_{1,2}\tilde\sigma_1(\lambda)\triangle_{1,2}(-\tilde\sigma_1(-\lambda))},$$

где $\triangle_{1,2}\tilde{\sigma}_k(\lambda) = \tilde{\sigma}_k(\lambda_1) - \tilde{\sigma}_k(\lambda_2)$, $k = 1, 2$,

$$\lambda_1 \geq \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in R \text{ или } \frac{\lambda_1}{i} \geq \frac{\lambda_2}{i}, \lambda_1, \lambda_2 \in T,$$

$\sigma_1(\lambda)$, $\sigma_2(\lambda)$ *имеют все моменты вида интегралов в (4). В этом случае* $\sigma(\lambda)$ *или функция, соответствующая* $\tilde{\sigma}(\lambda) = (\tilde{\sigma}_1(\lambda), \tilde{\sigma}_2(\lambda))$ *по формуле (6) — решение симметричной проблемы моментов и* $(f(\lambda), g(\lambda))$ *есть пара функций, связываемых с соответствующим решением.*

Доказательство. Пусть заданы функции $f(\lambda), g(\lambda)$, удовлетворяющие (10). Тогда

$$\lambda f(\lambda) = \int\limits_{R\cup T} \left(\frac{\lambda}{\mu - \lambda}, \frac{\lambda}{-\mu - \lambda}\right) d\sigma(\mu) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \int\limits_{R\cup T} \left(\frac{\mu}{\mu - \lambda}, \frac{-\mu}{-\mu - \lambda}\right) d\sigma(\mu)$$

$$* \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int\limits_{R\cup T} \left(\frac{\mu}{\mu - \lambda}, \frac{-\mu}{-\mu - \lambda}\right) d\sigma(\mu) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = - \int\limits_{R\cup T} (1,1) d\sigma(\mu)$$

$$* \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int\limits_{R\cup T} \left(\frac{\mu}{\mu - \lambda}, \frac{-\mu}{-\mu - \lambda}\right) d\sigma(\mu) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Когда $\lambda \to \infty$ при λ, принадлежащем области из (9), левая часть стремится к $-s_0$, что следует из (9). Второе слагаемое в правой части оценивается по неравенству Коши–Буняковского. Отсюда

$$\int\limits_{R\cup T} (1,1) d\sigma(\mu) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = s_0.$$

Рассмотрим теперь следующее выражение:

$$\lambda^2 (f(\lambda) + \frac{s_0}{\lambda}) = \lambda^2 \left(\int\limits_{R\cup T} \left(\frac{1}{\mu - \lambda}, \frac{1}{-\mu - \lambda}\right) d\sigma(\mu) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda} \int\limits_{R\cup T} (1,1) d\sigma(\mu) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \int\limits_{R\cup T} \left(\frac{\lambda\mu}{\mu - \lambda}, \frac{\lambda(-\mu)}{-\mu - \lambda}\right) d\sigma(\mu) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= - \int\limits_{R\cup T} (\mu, -\mu) d\sigma(\mu) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int\limits_{R\cup T} \left(\frac{\mu^2}{\mu - \lambda}, \frac{(-\mu)^2}{-\mu - \lambda}\right) d\sigma(\mu) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Устремляя $\lambda \to \infty$ при λ, принадлежащем области из (9), и оценивая второе слагаемое в последнем выражении, заключаем, что

$$\int\limits_{R \cup T} (\mu, -\mu) d\sigma(\mu) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = s_1 \, .$$

Далее поступаем аналогично, рассматривая $\lambda^3(f(\lambda) + \frac{s_0}{\lambda} + \frac{s_1}{\lambda}), \ldots, \lambda^n(f(\lambda) + \frac{s_0}{\lambda} + \ldots + \frac{s_{n-2}}{\lambda}), \ldots$. Равенства для моментов $m_k, k = 1, 2, \ldots$, получаем сходным образом, используя свойства функции $g(\lambda)$.

Заметим, что если имеет место представление (11), то тогда есть и представление (10) с функцией $\sigma(\lambda)$, построенной в соответствии с (6). Далее, используя приведенные выше рассуждения, доказываем, что $\sigma(\lambda)$ есть решение симметричной проблемы моментов.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Приведенная теорема показывает, что для разрешимости симметричной проблемы моментов функции $f(\lambda), g(\lambda)$ должны принадлежать некоторому классу функций, допускающих интегральное представление (10) или (11) и иметь асимптотическое поведение, описываемое соотношением (9). В связи с этим возникает задача: как охарактеризовать класс функций, допускающих интегральное представление (10)? Отображают ли функции данного класса некоторые области комплексной плоскости в себя? Также интересно рассмотрение интерполяционных задач в данном классе функций.

Список литературы

[1] *Н.И. Ахиезер*, Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. Гос. изд-во физ.-мат. литературы, Москва (1961).

[2] *S. Zagorodniuk*, On a five-diagonal Jacobi matrices and orthogonal polynomials on rays in the complex plane. — *Serdica Math. J.* (1998), v. 24, p. 257–282.

On class of functions, connected with some moments problem

S.M. Zagorodniuk

We study properties of functions, connected with some symmetric moments problem. In terms of these functions sufficient conditions for solvability of moments problem are obtained.

Про клас функцій, пов'язаний з деякою проблемою моментів

С.М. Загороднюк

Вивчаються властивості функцій, пов'язаних з деякою симетричною проблемою моментів. В термінах цих функцій одержано достатні умови розв'язності проблеми моментів.