Математическая физика, анализ, геометрия
2001, т. 8, № 3, с. 282–307

# Полная классификация допустимых представлений бесконечномерных классических матричных групп. I

Н.И. Нессонов

*Харьковский государственный технический университет сельского хозяйства*
*ул. Артема, 44, Харьков, 61024, Украина*
E-mail:n_nessonov@hotmail.com

Статья поступила в редакцию 20 апреля 2001 г.
Представлена В.Я. Голодцом

Статья является первой частью работы, в которой получено полное описание классов унитарной эквивалентности допустимых представлений бесконечномерных групп $GL(\infty)$, $Sp(2\infty)$, $O(2\infty)$, и содержит реализации полного набора представлений и классификационные результаты для группы $GL(\infty)$.·

## 0. Введение

В данной работе приводится решение задачи о полном описании класса допустимых, по терминологии Г.И. Ольшанского, унитарных представлений бесконечномерных аналогов классических матричных групп $GL(\infty)$, $Sp(2\infty)$, $O(2\infty)$. Понятие *допустимого представления* было впервые введено Г.И. Ольшанским (см. [11]) в связи с построением классификационной теории для унитарных представлений бесконечномерных групп. Начало ее было положено Кирилловым (см. [3, 4]), который получил полное описание унитарных представлений бесконечной унитарной группы, *непрерывных в топологии операторной нормы*. Подход, предложенный Г.И. Ольшанским *(полугрупповой метод)*, позволил значительно продвинуться в классификации унитарных представлений бесконечномерных групп конечного вещественного ранга (сохраняющих симметричную билинейную форму) (см. [11, 14, 15]) и их индуктивных пределов. Определенные проблемы, возникшие при применении этого метода к группам бесконечного ранга, в частности к $GL(\infty)$,

· Mathematics Subject Classification (2000): 46L55, 46L65, 81S05.

привели к разработке иной техники, с помощью которой была решена задача описания сферических представлений $GL(\infty)$ (см. [5, 6]) и соответствующей группы движений [7, 9, 10]. Дальнейшее развитие этих идей привело к построению содержательной классификационной теории допустимых представлений для *группы функций со значениями в* $GL(\infty)$ [8]. Наконец, на основе последних результатов удается построить теорию фактор-представлений типа III группы $GL(\infty)$, аналогичную предложенной Д. Войкулеску в [2], А.М. Вершиком и С.В. Керовым в [1] для $U(\infty)$.

В дальнейшем рассматриваемые объекты отождествим с матрицами операторов, действующих в комплексном гильбертовом пространстве $H$. В случае $GL(\infty)$ будем считать, что базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ в $H$ занумерован элементами из $\mathbf{N}$, а $e_n$ — бесконечная строка с единственным ненулевым $n$-м элементом, равным единице.

Пусть $B(H)$ — множество ограниченных операторов в $H$, $GL(H) = \{g \in B(H) :$ существует $g^{-1} \in B(H)\}, GL(n) = \{g \in GL(H) : ge_i = g^*e_i = e_i$ для всех $i > n\}$, а $GL(\infty)$ — индуктивный предел групп $GL(n)(n = 1, 2, 3, \dots)$ .

Для реализации $Sp(2\infty), O(2\infty)$ рассмотрим в $H$ ортонормированный базис $\{\dots e_{-n}, \dots, e_{-2}, e_{-1}, e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ и представим $H$ в виде $H = H_- \oplus H_+$, где $H_-$ и $H_+$ порождены базисными элементами с отрицательными и положительными номерами соответственно. Положим $GL(2n) = \{g \in GL(H) : ge_i = g^*e_i = e_i$, если $|i| > n\}$, и определим операторы $s_+$ и $s_-$ в $H$ соотношением:

$$s_+e_i = e_{-i}, s_-e_i = (signi)e_{-i}.$$

Пусть $GL(2\infty)$ — индуктивный предел $GL(2n)$,

$$Sp(2\infty)(O(2\infty)) = \{g \in GL(2\infty) : s_-g^ts_-^{-1} = g^{-1}(s_+g^ts_+ = g^{-1})\},$$

где $g^t$ — матрица, транспонированная к $g$ .

В дальнейшем буквой $G$ обозначим одну из введенных групп: $GL(\infty)$, $Sp(2\infty)$ или $O(2\infty)$. Если потребуется конкретизация, то это специально будем оговаривать. Обозначим через $U(G)$ унитарную подгруппу группы $G$ и напомним определение допустимого представления.

**Определение 0.1** (см. [11, 13]). *Пусть*

$$G(n, \infty) = \{g \in G : ge_i = g^*e_i = e_i \; \forall \; i : |i| < n\}.$$

*Фактор-представление* $\Pi$ *группы* $G$*, действующее в гильбертовом пространстве* $H_\Pi$*, называется допустимым, если существует* $n \in \mathbf{N}$ *и ненулевой вектор* $\xi \in H_\Pi$ *такие, что* $\Pi(u)\xi = \xi$ *для всех* $u \in U(G(n, \infty))$.

В отдельных местах нашей работы полезным окажется эквивалентное данному

**Определение 0.2** (допустимого представления) (см. [11]). *Представление* $\Pi$ *называется допустимым, если множество*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\eta \in H_{\Pi} : \Pi(u)\eta = \eta \;\forall\; u \in U(G(n,\infty))\}$$

*плотно в* $H_{\Pi}$.

Обозначим через $G_n^I$ подгруппу $GL(\infty)$, состоящую из матриц вида $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ * & * \end{bmatrix}$, где $I_n$ — $n\times n$-единичная матрица. При $n=0$ естественно положить $G_0^I = GL(\infty)$.

Приведем конструкцию представлений группы $G_n^I$, которые будут играть важную роль в наших построениях.

Пусть $\Lambda_m$ — множество всех комплексных матриц из $m$ строк и бесконечного числа столбцов, $\nu_m$ — гауссовская мера на $\Lambda_m$ с единичным ковариационным оператором, $A$ — $m\times m$-самосопряженная матрица, $z$ — матрица из $n$ строк и $m$ столбцов ($z$ — $n\times m$-матрица).

Представление $\Pi_{Az}$ группы $G_n^I$ ( $\Pi_A$ группы $GL(\infty) = G_0^I$) определим в $L^2(\Lambda_m,\nu_m)$ следующим образом:

$$(\Pi_{Az}\left(\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix}\right)\eta)(\lambda) = \mid det\ g\mid^{\imath\beta}\ \hat{\alpha}_A(\lambda,g)\eta(\lambda g),$$

где

$$\hat{\alpha}_A(\lambda,g) = \exp\left\{\frac{-1}{2}Tr[\lambda(gg^*-1)\lambda^* - 2iA\lambda(gg^*-1)\lambda^*]\right\},$$

$I_n$ — $n\times n$-единичная матрица, $\beta$ — вещественное число;

$$(\Pi_{Az}\left(\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ h & I \end{bmatrix}\right)\eta)(\lambda) = \exp[\,i\Re Tr(z\lambda h)]\eta(\lambda),$$

$$\eta \in L^2(\Lambda_m,\nu_m).$$

Если $M$ — множество операторов в гильбертовом пространстве, а $M'$ — коммутант $M$, то справедлива

**Теорема 0.3.** *Алгебра фон Неймана* $(\Pi_{Az}(G_n^I))'$ *порождена операторами* $\tau(u)$, *где* $u \in\ U(m,A,z) = \{v \in U(m) : vA = Av$ *и* $zv = z\}$, *действующими в* $L^2(\Lambda_m,\nu_m)$ *следующим образом:* $(\tau(u)\eta)(\lambda) = \eta(u^*\lambda)$.

Впервые этот факт анонсирован в [12] для группы $GL(\infty)$.

В [6] и [7] получено полное описание сферических представлений группы $G_n^I$, которое содержится в следующем утверждении:

**Теорема 0.4.** *Пусть* $\Pi$ — *фактор-представление группы* $G_n^I$, *действующее в гильбертовом пространстве* $H_\Pi$. *Если в* $H_\Pi$ *существует ненулевой вектор* $\xi$, *неподвижный относительно операторов* $\Pi(U(G_n^I))$, *где* $U(G_n^I)$ — *унитарная подгруппа* $G_n^I$, *то* $\Pi$ *кратно для некоторых* $m$, $A$, $z$ *сужению* $\Pi_{Az}$ *на подпространство* $\{\eta \in L^2(\Lambda_m, \nu_m) : \tau(u)\eta = \eta$ *для всех* $u \in U(m, A, z)\}$.

Если $\rho$ — неприводимое представление группы $U(m, A, z)$, $\rho_{kl}$ $(1 \leq k, l \leq \dim\rho)$ — его матричный элемент, то оператор

$$P_{k\rho} = \dim\rho \int\limits_{U(m,A,z)} \bar{\rho}_{kk}\tau(u)du$$

— минимальный ортопроектор в $(\Pi_{Az}(G_n^I))'$.

Главный результат работы в случае группы $G_n^I$ — следующая

**Теорема 0.5.** *Пусть* $\Pi$ — *допустимое фактор-представление группы* $G_n^I$. *Тогда существуют* $m$, $A$, $z$, $\rho$ *такие, что* $\Pi$ *кратно сужению* $\Pi_{Az}$ *на* $P_{k\rho}L^2(\Lambda_m, \nu_m)$.

Классификационный результат (см. теорему 6.15 (II)) для групп $Sp(2\infty)$ и $O(2\infty)$ получается подобным образом. А именно, в разд. 1 построен запас унитарных представлений (приводимых) $\Pi_A$ этих групп, играющих примерно ту же роль, что и представление $\Pi_{Az}$ для $G_n^I$. В предложении 1.4 указан вид их разложения на неприводимые компоненты.

Главный результат работы в случае групп $Sp(2\infty)$ и $O(2\infty)$ содержит доказанная в разделе 6 ( II)

**Теорема 0.6.** *Пусть* $\Pi$ — *допустимое фактор-представление группы* $Sp(2\infty)$ *или* $O(2\infty)$. *Тогда существует* $m\times m$ — *самосопряженная матрица* $A$ *такая, что* $\Pi$ *кратно одной из неприводимых компонент представления* $\Pi_A$, *построенного в предложениях 1.2–1.3* ( см. предложениие 1.4).

Изложим кратко логику наших построений.

Предлагаемый метод существенно опирается на следующее утверждение, принадлежащее Г.И. Ольшанскому.

**Теорема 0.7.** *Если* $\Pi$ — *допустимое представление группы* $G$, *действующее в гильбертовом пространстве* $H_\Pi$, $\Pi_U$ — *его сужение на* $U(G)$, *то* $\Pi_U$ *расширяется по непрерывности до представления полугруппы частичных изометрий* $\tilde{U}(G)$, *являющихся предельными точками относительно слабой топологии в* $B(H)$ *элементов из* $U(G)$.

Все основные классификационные результаты (теоремы 5.7, 5.10, 6.14, 6.15) выводятся из структуры сферических представлений группы $GL(\infty)$ (см. [6]) и группы движений $G_n^I$ (см.[7]), которую отождествим с подгруппой $GL(\infty)$, состоящей из матриц вида $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ * & * \end{bmatrix}$, где $I_n$ — $n \times n$-единичная матрица, $*$ — произвольная матрица соответствующих размеров (см. теорему 2.1).

В первую очередь остановимся на идее классификации допустимых представлений групп $GL(\infty)$ и $G_n^I$.

Пусть $G$ — одна из этих групп. Если $G = GL(\infty)$, то, как и ранее,

$$G(p,\infty) = \{g \in G : ge_i = g^*e_i = e_i \ \forall\, i \leq n\}.$$

При $G = G_n^I$ положим

$$\begin{aligned} G(p,\infty) &= \{g \in G : ge_i = e_i \ \forall\, i \leq n+p \ \text{ и} \\ ge_i &= g^*e_i = e_i \ \forall\, i:\ n < i \leq p+n\}. \end{aligned}$$

Если $\Pi$ — допустимое фактор-представление группы $G$, то для достаточно большого $p$ в $H_\Pi$ существует единичный $\Pi(U(G(p,\infty))$ — неподвижный вектор $\xi(p)$. Можно считать без ограничения общности, что $H_\Pi = [\Pi(G)\xi(p)]$, где $[\Pi(G)\xi(p)]$ — замыкание линейной оболочки множества $\{\Pi(G)\xi(p)\}$ $(g \in G)$.

Рассматриваемые группы обладают так называемым свойством асимптотической абелевости (см. определение 3.1), которое позволяет ввести для $\Pi$ важный инвариант — асимптотическую сферическую функцию (а.с.ф.) $\varphi_\Pi$ (см. предложение 3.2, определение 3.3 и теорему 4.1). Это дает возможность определить ранг $\mathbf{r}(\Pi)$ представления $\Pi$.

Далее, учитывая структуру сферических представлений группы $G$ и тот факт, что сужение $\Pi$ на $G(p,\infty)$, действующее в $[\Pi\left(G(p,\infty)\right)\xi(p)] \subset H_\Pi$, неприводимо, показываем, что при $p > \mathbf{r}(\Pi)$ существует семейство единичных $\Pi(U(G(2(p+1))))$-неподвижных векторов $\xi_i^U$ таких, что:

*a) при $G = GL(\infty)$ подпространства $\left[\Pi(G^I_{2(p+1)}\xi_i^U\right] = H_i$ попарно ортогональны и*

$$\bigoplus_i H_i = [\Pi(G)\xi(p)] = H_\Pi$$

(см. лемму 5.3);

*b) при $G = G_n^I$ подпространства $\left[\Pi(G^I_{2(p+1)+n})\xi_i^U\right] = H_i$ попарно ортогональны и*

$$\bigoplus_i H_i = [\Pi(G)\xi(p)] = H_\Pi$$

(см. лемму 5.8).

По этой причине в коммутанте $\Pi\left(G(2(p+1),\infty)\right)$ для любого вектора $\eta \in H_\Pi$ существует ортопроектор $P_\eta$ такой, что для некоторого натурального $i(\eta)$

$$\left[\Pi(G(2(p+1),\infty))P_\eta\eta\right] \subset H_{i(\eta)}.$$

Заменяя в случае необходимости проектор $P_\eta$ на меньший, будем считать, что представление

$$(\Pi,\, G(2(p+1),\infty),\, [\Pi(G(2(p+1),\infty))\eta])$$

(*сужение* $\Pi$ *на* $G(2(p+1),\infty)$, *действующее в* $[\Pi(G(2(p+1),\infty))\eta]$), кратно

$$\left(\Pi,\, G(2(p+1),\infty),\, P_\eta H_\Pi\right).$$

По этой причине $\left(\Pi, G(2(p+1),\,\infty),\, P_\eta H_\Pi\right)$ является сужением прямого интеграла неприводимых сферических представлений группы $G^I_{2(p+1)+n}$ на $G(2(p+1),\infty)$.

Заметим, что $n=0$ соответствует случаю $G = GL(\infty)$. Более того, с учетом лемм 5.4–5.5, 5.9 $(\Pi,\, G^I_{2(p+1)+n},\, H_{i(\eta)})$ можно реализовать так, что сужение каждой неприводимой компоненты на $G(2(p+1),\infty)$ — одно и то же представление $\Pi_{Az}$ (см. лемму 5.5, предложение 5.6 и лемму 5.9).

Следовательно, неприводимые компоненты представления

$$(\Pi,\, G(2(p+1),\infty),\, P_\eta H_\Pi)$$

унитарно эквивалентны неприводимым компонентам представления

$$\left(\Pi_{Az},\, G(2(p+1),\infty),\, L^2\left(\Lambda_{\mathbf{r}(\Pi)},\nu_{\mathbf{r}(\Pi)}\right)\right).$$

Теперь рассмотрим изометрию $\sigma_q^{(n)}$, действующую в $H$ следующим образом:

$$\sigma_q^{(n)}(e_i) = e_i \text{ при } i \le n \;\text{ и } \sigma_q^{(n)}(e_i) = e_{i+q} \text{ при } i > n.$$

Если матрица $g = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ h_n & g_n \end{bmatrix}$ принадлежит $G$, то

$$\sigma_q^{(n)} g (\sigma_q^{(n)})^* = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0_q & 0 \\ h_n & 0 & g_n \end{bmatrix}$$

($0_q$ — $q \times q$-нулевая матрица).

Положим

$$g_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \sigma_q^{(n)} g (\sigma_q^{(n)})^*.$$

Очевидно, $g_\sigma \in G(q, \infty)$.

Так как по теореме 0.5 $\Pi$ доопределяется по непрерывности на изометрии $\{\sigma_q^{(n)},\, (\sigma_q^{(n)})^*\}$ и для любого ненулевого вектора $\eta \in H_\Pi$ при $q = 2(p+1)$

$$\left(\Pi,\, G(q,\infty),\, \left[\Pi(G(q,\infty))\Pi(\sigma_q^{(n)})\eta\right]\right)$$

кратно одной из неприводимых компонент представления

$$\left(\Pi_{Az},\, G(2(p+1),\infty),\, L^2\left(\Lambda_{\mathbf{r}(\Pi)}, \nu_{\mathbf{r}(\Pi)}\right)\right),$$

то в $L^2\left(\Lambda_{\mathbf{r}(\Pi)}, \nu_{\mathbf{r}(\Pi)}\right)$ найдется вектор $f_\eta$, для которого

$$\begin{aligned} (\Pi(g)\eta,\, \eta) &= \left(\Pi(\sigma_q^{(n)})\Pi(g)\Pi((\sigma_q^{(n)})^*)\Pi(\sigma_q^{(n)})\eta,\ \Pi(\sigma_q^{(n)})\eta\right) \\ &= \left(\Pi(g_\sigma)\Pi(\sigma_q^{(n)})\eta,\ \Pi(\sigma_q^{(n)})\eta\right) = \left(\Pi_{Az}(g_\sigma)\ f_\eta, f_\eta\right). \end{aligned}$$

Отсюда вытекают классификационные утверждения 5.6–5.7, 5.10.

Описание допустимых представлений групп $Sp(2\infty)$ и $O(2\infty)$ существенно опирается на структуру допустимых представлений $GL(\infty)$ и соответствующей группы движений. Так же, как и выше от представления $\Pi$ группы $G$, которая совпадает здесь с $Sp(2\infty)$ или $O(2\infty)$, переходим к сужению $\Pi$ на подгруппу $GK_n \subset G$, введенную в § 3 и выполняющую те же функции, что и группа движений $G_n^I$ в случае $GL(\infty)$. Более того, это сужение распадается в прямой интеграл сферических представлений, для которых получена явная реализация во второй части работы (см. (32)–(36), предложение 6.12 и замечание 6.13).

Завершается классификация (см. теорему 6.15 второй части работы) на основе теоремы 6.14 с использованием теоремы 0.5 так же, как и в случае $GL(\infty)$.

## 1. Реализация допустимых представлений симплектической и ортогональной групп

В этом разделе $G$ будет обозначать одну из групп $Sp(2\infty)$ или $O(2\infty)$. Для определения стандартной системы образующих в $G$ по любой матрице $x$

с конечным числом ненулевых элементов $x_{jk}$ $(j,k = 1,2,\dots)$ введем элементы $\gamma_o^{(0)}(x)\,\gamma_u^{(0)}(x) \in G$, задаваемые соотношениями:

$$(\gamma_o^{(0)}(x) - I)_{jk} = \begin{cases} x_{-jk}, & \text{если } j < 0 \text{ и } k > 0, \\ 0, & \text{в противном случае}; \end{cases}$$

$$(\gamma_u^{(0)}(x) - I)_{jk} = \begin{cases} x_{j(-k)}, & \text{если } j > 0 \text{ и } k < 0, \\ 0, & \text{в противном случае}. \end{cases}$$

Для наглядности приведем их блочную структуру, соответствующую разложению $H$ в ортогональную сумму подпространств $H_-$ и $H_+$, порожденных базисными элементами с отрицательными и положительными номерами соответственно. Если $\mathfrak{S}_k$ и $\widehat{x}$ — $k \times k$-матрицы, где $\mathfrak{S}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$, то обозначим через $x$ бесконечную матрицу $x$, столбцы и строки которой занумерованы натуральными числами вида $x = \begin{bmatrix} \widehat{x} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. При этом

$$\gamma_o^{(0)}(x) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_k & \mathfrak{S}_k\widehat{x} & 0 \\ 0 & 0 & I_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix},\ \gamma_u^{(0)}(x) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_k & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{x}\mathfrak{S}_k & I_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Матрицы вида $g_0 = \begin{bmatrix} (g^{-1})' & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix}$, $\gamma_o^{(0)}(x)$, $\gamma_u^{(0)}(x)$, где $(g^\flat)_{i,k} = g_{-k,-i}$, являются системой образующих для $G$. Как и ранее, отождествим векторы $f = \sum\limits_i f_i e_i \in H$ со строками $(\cdots, f_{-n}, \cdots, f_{-2}, f_{-1}, f_1,\ f_2, \cdots)$.

Если обозначить через $t$ обычное транспонирование, то имеют место следующие соотношения:

$$\gamma_o^{(0)}(x) = \gamma_o^{(0)}(x^t),\ \gamma_u^{(0)}(x) = \gamma_u^{(0)}(x^t),\ \text{для } Sp(2\infty);$$
$$\gamma_o^{(0)}(x) = \gamma_o^{(0)}(-x^t),\ \gamma_u^{(0)}(x) = \gamma_u^{(0)}(-x^t),\ \text{когда } G = O(2\infty).$$

Пусть $\Lambda_m$ состоит из всех комплексных матриц $\lambda$ вида

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} & \dots \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \dots & \lambda_{mn} & \dots \end{pmatrix}, \Lambda_m(k) - \text{ множество столбцов} \vec{\lambda}_k = \begin{pmatrix} \lambda_{1k} \\ \lambda_{2k} \\ \vdots \\ \lambda_{mk} \end{pmatrix},$$

$A$ — самосопряженный оператор на $\Lambda_m(k)$,

$$\rho_k(\vec{\lambda}_k) = \frac{1}{\pi^m}\exp[-(\vec{\lambda}_k)^*\vec{\lambda}_k], \;\; \overset{A}{\kappa}_k(\vec{\lambda}_k) = \exp[-\imath(\vec{\lambda}_k)^* A\vec{\lambda}_k],$$

$\nu_m^{(k)}$ — мера на $\Lambda_m(k)$ с плотностью $\rho_k$ относительно меры Лебега $d\vec{\lambda}_k$, $\nu_m = \prod\limits_{k=1}^{\infty}\nu_m^{(k)}$.

Обозначим через $\overset{A}{L}_m$ гильбертово пространство, являющееся бесконечным тензорным произведением

$$\bigotimes_{k=1}^{\infty} L^2(\Lambda_m(k), d\vec{\lambda}_k)$$

со стабилизацией, определяемой последовательностью

$$\overset{A}{\eta}_k(\vec{\lambda}_k) = \overset{A}{\kappa}_k(\vec{\lambda}_k)\cdot\;[\rho_k(\vec{\lambda}_k)]^{\frac{1}{2}}.$$

А именно, $\overset{A}{L}_m$ порождено векторами вида

$$f_1 \otimes f_2 \otimes \ldots \otimes f_p \otimes \overset{A}{\eta}_k \otimes \overset{A}{\eta}_k \otimes \ldots\,, \; p \in N.$$

Для $f^{(l)} = f_1^{(l)} \otimes f_2^{(l)} \otimes \ldots \otimes f_p^{(l)} \otimes \overset{A}{\eta}_k \otimes \overset{A}{\eta}_k \otimes \ldots\,,\; l = 1, 2$, скалярное произведение $(f^{(1)}\cdot f^{(2)})$ в $\overset{A}{L}_m$ вычисляется по формуле

$$(f^{(1)}\cdot f^{(2)}) = \prod_{p=1}^{\infty}\int\limits_{\Lambda_m(p)} f_p^{(1)}(\vec{\lambda}_p)\bar{f}_p^{(2)}(\vec{\lambda}_p)d\vec{\lambda}_p d\vec{\lambda}_p\,.$$

В $L^2(\Lambda_m(k), d\vec{\lambda}_k)$ определим оператор преобразования Фурье $\overset{A}{F}_k$ :

$$(\overset{A}{F}_k f_k)(\vec{\lambda}_k)$$
$$= \frac{\det(\sqrt{1+4A^2})}{(2\pi)^m}\int\limits_{\Lambda_m(k)}\exp\{i\Re[2(\sqrt{1+4A^2}\vec{\lambda}_k)^t\hat{\vec{\lambda}}_k]\}\cdot f_k(\hat{\vec{\lambda}}_k)d\hat{\vec{\lambda}}_k\,.$$

Следующее утверждение можно установить с помощью обычных вычислений.

**Лемма 1.1.** *Если* $A = A^*$ *и* $A = \pm A^t$, *то* $\overset{A}{F}_k\overset{A}{\eta}_k = \overset{A}{\eta}_k$.

Из этой леммы следует корректность определения операторов в условии следующего утверждения.

**Предложение 1.2.** *Пусть в* $L_m^A$ *определено действие операторов* $\Pi_A(g)$ $(g \in Sp(2\infty))$ *согласно формулам*

$$\begin{aligned}
&\left(\Pi_A\left(g_0\right)\xi\right)(\lambda) = |\det g|^m \xi(\lambda g), \\
&\left(\Pi_A\left(\gamma_u^{(0)}(x)\right)\xi\right)(\lambda) = \exp\left\{\imath\Re Tr\left[\sqrt{1+4A^2}\ \lambda x \lambda^t\right]\right\}\xi(\lambda), \\
&(\Pi_A(s^-)\xi)(\lambda) = (F^A\xi)(\lambda), \text{ где } F^A = \bigotimes_{k=1}^{\infty} F_k^A.
\end{aligned} \tag{1}$$

*Если* $A = A^*$ *и* $A = -A^t$, *то операторы* $\Pi_A(g)$ *задают представление группы* $Sp(2\infty)$.

Приведем подобную реализацию для группы $O(2\infty)$.

**Предложение 1.3.** *Пусть* $m = 2k$ *и матрица* $\lambda = \begin{pmatrix}\lambda^{(1)} \\ \lambda^{(2)}\end{pmatrix}$, *где* $\lambda^{(1)}$ *состоит из первых* $k$ *строк* $\lambda \in \Lambda_m$, $P = \begin{bmatrix} 0 & -I_k \\ I_k & 0 \end{bmatrix}$, $I_k$ — $k \times k$*-единичная матрица. Если* $A^t = -PAP^{-1}$, *то операторы* $\Pi_A(g)$, $g \in O(2\infty)$, *определяемые соотношениями*

$$\begin{aligned}
&\left(\Pi_A(g_0)\,\xi\right)(\lambda) = |\det g|^m \xi(\lambda g), \\
&\left(\Pi_A\left(\gamma_u^{(0)}(x)\right)\xi\right)(\lambda) = \exp\left\{\imath\Re Tr\left[\sqrt{1+4(A^t)^2}\ P\,\lambda x \lambda^t\right]\right\}\xi(\lambda), \\
&\Pi_A(s^+) = F^{A^t},
\end{aligned} \tag{2}$$

*задают представление группы* $O(2\infty)$.

Для разложения представления $\Pi_A$ на неприводимые компоненты рассмотрим две группы:

$$O(A,m) = \{u \in U(m) : u^t = u^* \text{и}\, [A,u] = 0\}, \tag{3}$$

$$Sp(A,m) = \{u \in U(m) : u^t = Pu^*P^{-1} \text{и}\, [\,A,u\,] = 0\}. \tag{4}$$

Положим $(\tau(u)\xi)(\lambda) = \xi(u^{-1}\lambda)$, где $u \in U(m)$, $\xi \in L_m^A$.

Если $G(A,m)$ — одна из групп $O(A,m)$ или $Sp(A,m)$, $\rho$ — ее неприводимое представление, $a_{kk}^{\rho}$ — матричный элемент $\rho$, то

$$P_{k\rho} = \dim\rho \int\limits_{G(A,m)} a_{kk}^{\rho}(u)\tau(u)du$$

— ортогональный проектор, действующий в $L_m^A$.

Следующее утверждение впервые анонсировано Г.И. Ольшанским в [12].

**Теорема 1.4.** *Пусть $\wp$ — некоторый набор операторов, действующих в $L^A_m$, $\wp'$ — коммутант $\wp$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

I) *если* $\Pi_A$ *такое, как в предложении 1.2, то*

$$[\Pi_A(Sp(2\infty))]' = \left\{\{\tau(O(A,m))\}'\right\}' ;$$

II) *если* $\Pi_A$ *такое, как в предложении 1.3, то*

$$[\Pi_A(O(2\infty))]' = \left\{\{\tau(Sp(A,m))\}'\right\}' ;$$

III) *сужение* $\Pi_A$ *на* $P_{k\rho}L^A_m$ *неприводимо.*

## 2. Некоторые свойства сферических представлений группы $GL(\infty)$

Пусть $\Pi$ — неприводимое представление $GL(\infty)$, действующее в гильбертовом пространстве $H_\Pi$ с единичным циклическим вектором $\xi$, неподвижным по отношению к операторам

$$\Pi(u) \ \ (u \in U(GL(\infty)) = U(\infty)).$$

Тогда в силу результатов работы [6] сферическая функция

$$\varphi_\Pi = (\Pi(g)\xi, \xi)$$

$$= |\det(g)|^{\imath\beta}\det[I_{\mathbf{r}(\Pi)} \otimes ch\ln|g| - 2\imath A \otimes sh\ln|g|], \tag{5}$$

где $|g| = (g^*g)^{\frac{1}{2}}$, $r(\Pi)$ — натуральное число, определяемое классом унитарной эквивалентности представления $\Pi$, $\beta$ — вещественное число, $I_{\mathbf{r}(\Pi)}$ — единичная $r(\Pi)\times r(\Pi)$-матрица, $A$ — самосопряженная (с.с.) $r(\Pi)\times r(\Pi)$-матрица.

*Натуральное число* $r(\Pi)$ *будем называть рангом представления* $\Pi$.

Обозначим через $Z_m$ множество $m\times m$-верхних треугольных матриц с положительными элементами на диагонали. Пусть подгруппа $D_m \subset GL(\infty)$ состоит из матриц вида $\begin{bmatrix} z_m & 0 \\ x_m & I \end{bmatrix}$, где $z_m \in Z_m$, $x_m$ — произвольная матрица с конечным числом ненулевых элементов.

Приведем классификационный результат для сферических фактор-представлений группы $G^I_n \subset GL(\infty)$, состоящей из матриц вида $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ * & * \end{bmatrix}$, где $*$ означает произвольную матрицу соответствующих размеров.

**Теорема 2.1** (см. [7]). *Пусть* $\Pi$ *— неприводимое сферическое представление* $G^I_n$*, действующее в* $H_\Pi$*:*

$$\hat{\alpha}_A(\lambda, g) = \exp\{\frac{-1}{2}Tr[\lambda(gg^*-1)\lambda^* - 2iA\lambda(gg^*-1)\lambda^*]\},$$

*где $A$ — с.с. $m \times m$-матрица.*

*Тогда существуют: с.с. $m \times m$-матрица $A$, $n \times m$-матрица $z$ из $n$ строк и $m$ столбцов, вещественное число $\beta$ такие, что $\Pi$ унитарно эквивалентно сужению представления $\Pi_{Az}$ группы $G_n^I$, заданному в $L^2(\Lambda_m, \nu_m)$ соотношениями:*

$$
\begin{aligned}
&(\Pi_{Az}\left(\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix}\right)\eta)(\lambda) = \mid detg\mid^{i\beta}\,\hat{\alpha}_A(\lambda, g)\eta(\lambda g),\\
&(\Pi_{Az}\left(\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ h & I \end{bmatrix}\right)\eta)(\lambda) = \exp[i\Re Tr(z\lambda h)]\eta(\lambda),\\
&(\eta \in L^2(\Lambda_m, \nu_m)) \text{ на подпространство } \left[\Pi_{Az}(G_n^I)\xi_0\right],
\end{aligned}
\tag{6}
$$

*где $\xi_0 \in L^2(\Lambda_m, \nu_m)$ и определяется функцией на $\Lambda_m$, тождественно равной единице.*

Используя вид операторов $\Pi_{Az}(g)$ $(g \in G_n^I)$, можно доказать следующее утверждение.

**Теорема 2.2.** *Пусть подгруппа $D_{mn} \subset G_n^I$ $\left(G_0^I = GL(\infty),\, D_{m0} = D_m\right)$ состоит из матриц вида $\begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ * & z_m & 0 \\ * & * & I \end{bmatrix}$ $(z_m \in Z_m)$, $\Pi$ — такое же, как и в теореме 2.1. Тогда $[\Pi(D_{mn})\xi] = \left[\Pi(G_n^I)\xi\right]$, где $\xi$ — любой $\Pi(U(G_n^I))$-неподвижный вектор.*

## 3. Асимптотические свойства допустимых представлений

Пусть $G = Sp(2\infty)$ или $O(2\infty)$, подгруппы $G_d$, $\Gamma_O$, $\Gamma_U \subset G$ состоят из матриц вида $g_0 = \begin{bmatrix} (g^{-1})^\flat & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix}, \gamma_o^{(0)}(x), \gamma_u^{(0)}(x)$, соответственно, где $x$ — матрица с элементами $x_{jk}$, $j, k = 1, 2, \ldots$, $(g^\flat)_{i,k} = g_{-k,-i}$, а блочная структура определяется разложением $H$ в ортогональную сумму подпространств $H_-$ и $H_+$ (см. разд. 1).

Если $(x^t)_{kj} = x_{jk}$, то имеют место соотношения

$$
\begin{aligned}
&\gamma_o^{(0)}(x) = \gamma_o^{(0)}(x^t)\,, \gamma_u^{(0)}(x) = \gamma_u^{(0)}(x^t) \text{ для } Sp(2\infty);\\
&\gamma_o^{(0)}(x) = \gamma_o^{(0)}(-x^t)\,, \gamma_u^{(0)}(x) = \gamma_u^{(0)}(-x^t) \text{ для } G = O(2\infty).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Пусть $b$ — матрица с элементами $b_{jk}$, где $j, k = 1, 2, \ldots$ . По аналогии с разд. 1 определим матрицы $\gamma_o^{(n)}(b)$ и $\gamma_u^{(n)}(b) \in G$ согласно соотношениям

$$(\gamma_o^{(n)}(b)-I)_{jk}=\begin{cases} b_{(-j-n)(k-n)}, & \text{если } j<-n \text{ и } k>n,\\ 0, & \text{в противном случае };\end{cases}$$

$$(\gamma_u^{(n)}(b)-I)_{jk}=\begin{cases} b_{(j-n)(-k-n)}, & \text{если } j>n, \text{ и } k<-n,\\ 0, & \text{в противном случае }.\end{cases}$$

Заметим, что при $x=\begin{bmatrix}\mathfrak{O}_n & 0\\ 0 & b\end{bmatrix}$, где $\mathfrak{O}_n$ — нулевая $n\times n$-матрица,

$$\gamma_u^{(n)}(b)=\gamma_u^{(0)}(x),\ \gamma_o^{(n)}(b)=\gamma_o^{(0)}(x).$$

Пусть $Y(\infty,n)$ — множество всех локально ненулевых матриц из бесконечного числа строк и $n$ столбцов. Если $x=[x_{jk}]$, $y=[y_{jk}]$, $1\le j<\infty$, $1\le k\le n$, то определим матрицу $\theta^{(n)}(x,y)\in G$ с помощью соотношения

$$(\theta^{(n)}(x,y)-I)_{im}=\begin{cases} x_{(i-n)m}, & \text{если } i>n \text{ и } 1\le m\le n,\\ -(x)^t_{(-i)(-m-n)}, & \text{если } -n\le i\le -1 \text{ и } m<-n,\\ y_{(-i-n)m}, & \text{если } i<-n \text{ и } 1\le m\le n,\\ {y^\sharp}_{(-i)(m-n)}, & \text{если } -n\le i\le -1 \text{ и } m>n,\\ 0, & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

где $y^\sharp=y^t$ при $G=Sp(2\infty)$ и $y^\sharp=-y^t$ для $G=O(2\infty)$.

Для наглядности заметим, что элемент $\theta^{(n)}(x,y)$ записывается в виде блочной матрицы

$$\begin{bmatrix} I & 0 & y_1 & 0\\ x_2 & I_n & 0 & y_2\\ 0 & 0 & I_n & 0\\ 0 & 0 & x_1 & I\end{bmatrix},$$

в которой $y_1$ и $x_1$ произвольны и принадлежат $Y(\infty,n)$, а $y_2$ и $x_2$ однозначно определяются по $y_1$ и $x_1$ соответственно, согласно определению.

Обозначим, наконец, через $\delta^{(n)}(a)$ элемент из $G$, определяемый $n\times n$-матрицей $a=[a_{jk}]$, $1\le j,\ k\le n$, согласно соотношению

$$(\delta^{(n)}(a)-I)_{im}=\begin{cases} a_{(-i)m}, & \text{если } -n\le i\le -1 \text{ и } 1\le m\le n,\\ 0, & \text{в противном случае }.\end{cases}$$

Положим

$$g_n=\begin{bmatrix} (g^{-1})' & 0 & 0 & 0\\ 0 & I_n & 0 & 0\\ 0 & 0 & I_n & 0\\ 0 & 0 & 0 & g\end{bmatrix},\ \text{где } (g')_{ik}=g_{(-k)(-i)},\ k,i<0.$$

Пусть $G_d(n,\infty)$ $(G_d(0,\infty)=G_d)$, $\Gamma^{(n)}_O$, $n\geq 1$, $\Gamma^{(n)}_U$, $n\geq 1$, $\Delta^{(n)}$, $n\geq 1$, — подгруппы $G$, состоящие из матриц вида $g_n$, $\gamma^{(n)}_o(b)$, $\gamma^{(n)}_u(b)$, $\delta^{(n)}(a)$ соответственно. Причем при $G=Sp(2\infty)$, $a$ — симметрическая матрица, а для $O(2\infty)$ — антисимметрическая. Множество всех элементов из $G$ вида $\theta^{(n)}(x,y)$ обозначим через $\Theta^{(n)}$, $n\geq 1$. Заметим, что $\Theta^{(n)}$ не является группой.

Справедливы следующие соотношения :

$$\begin{aligned}
&\gamma^{(n)}_o(b)\theta^{(n)}(x,y)\gamma^{(n)}_o(-b)\\
&\quad=\delta^{(n)}(-(bx)^{\sharp}x)\theta^{(n)}(0,bx)\theta^{(n)}(x,y),\\
&\gamma^{(n)}_u(b)\theta^{(n)}(x,y)\gamma^{(n)}_u(-b)\\
&\quad=\delta^{(n)}((by)^{t}y)\theta^{(n)}(by,0)\theta^{(n)}(x,y),\\
&\theta^{(n)}(x_1,y_1)\theta^{(n)}(x_2,y_2)\\
&\quad=\delta^{(n)}(x_2^{t}y_1-y_2^{\sharp}x_1-x_1^{t}y_2+y_1^{\sharp}x_2)\theta^{(n)}(x_2,y_2)\theta^{(n)}(x_1,y_1),\\
&g_n\theta^{(n)}(x,y)g_n^{-1}=\theta^{(n)}(gx,(g^{t})^{-1}y).
\end{aligned}\tag{8}$$

Пусть подгруппа $K_n$ порождена $\Theta^{(n)}$ и $\Delta^{(n)}$. Из соотношений (8) вытекает, что элементы группы $G(n,\infty)$, образованной $G_d(n,\infty)$ , $\Gamma^{(n)}_O$ , $\Gamma^{(n)}_U$, естественно действуют автоморфизмами на $K_n$. Обозначим через $GK_n$ подгруппу $G$, порожденную $G(n,\infty)$ и $K_n$.

Введем полезное свойство бесконечномерных матричных групп.

Предположим, что группа $G$ — индуктивный предел конечномерных матричных групп $G(n)$ $(G(n)\subset G(n+1),\ n=1,2,3,\dots)$.

**Определение 3.1.** *Группа $G$ называется асимптотически абелевой (а.а.), если существует последовательность $u_n$, $n\in\mathbb{N}$, элементов из подгруппы $U(G)$, совпадающей с множеством унитарных элементов группы $G$, со свойствами :*

*i) для любых $l,n\in\mathbb{N}$ и $g\in G(l)$ существует $k(g,n)\in\mathbb{N}$ такое, что при $k\geq k(g,n)$ $u_kgu_k^*\in G'(n)=\{h\in G: hp=ph\ \forall\, p\in G(n)\}$;*

*ii) при любом $n\in\mathbb{N}$ $\exists\, l(n)\in\mathbb{N}$, для которого $u_ku_l^*\in G'(n)$, когда $k>l\geq l(n)$.*

**Предложение 3.2.** *Пусть $G$ — а.а. матричная группа, являющаяся индуктивным пределом конечномерных групп $G(n)$, $n\in\mathbb{N}$, $\Pi$ — фактор-представление $G$, действующее в гильбертовом пространстве $H_\Pi$ с циклическим вектором $\xi$. Причем множество*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\eta\in H_\Pi:\Pi(u)\eta=\eta\ \forall\, u\in U(G)\cap\{h\in G: hg=gh\ \forall\, g\in G(n)\}\}$$

*плотно в $H_\Pi$. (Это свойство, как показано Г.И. Ольшанским, является одним из эквивалентных определений допустимого представления в случае большого класса бесконечномерных матричных групп, содержащего $GL(\infty)$, $Sp(2\infty)$, $O(2\infty)$).*

*Тогда для любых единичных векторов $\eta_1$, $\eta_2 \in H_\Pi$*

$$\varphi_{\eta_1}(g) = \lim_{l\to\infty}(\Pi(u_l g u_l^*)\eta_1, \eta_1) = \lim_{l\to\infty}(\Pi(u_l g u_l^*)\eta_2, \eta_2) = \varphi_{\eta_2}(g).$$

*Причем пределы не зависят от выбора последовательности $u_l$, $l \in \mathbb{N}$, из определения 3.1, а $\varphi_{\eta_1} = \varphi_{\eta_2}$ — неразложимая сферическая функция на $G$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $\epsilon > 0$ существует $n \in \mathbb{N}$ и единичные векторы $\xi(\epsilon)$, $\eta_i(\epsilon) \in H_\Pi$, $i = 1, 2$, со свойствами $\Pi(u)\xi(\epsilon) = \xi(\epsilon)$, $\Pi(u)\eta_i(\epsilon) = \eta_i(\epsilon)$ $i = 1, 2$ для всех $u \in U(G) \cap G'_n$:

$$||\xi - \xi(\epsilon)|| < \epsilon, \ ||\eta_i - \eta_i(\epsilon)|| < \epsilon. \tag{9}$$

Согласно определению 3.1 выберем $l \in \mathbb{N}$ так, чтобы $u_k\ u_l^* \in G'_n$ при всех $k > l$. Тогда, учитывая (9), получаем

$$\begin{aligned} 2\epsilon &> \left|(\Pi(u_k g u_k^*)\eta_i,\, \eta_i) - (\Pi(u_k g u_k^*)\eta_i(\epsilon),\, \eta_i(\epsilon))\right| \\ &= \left|(\Pi(u_k g u_k^*)\eta_i,\, \eta_i) - (\Pi(u_l g u_l^*)\eta_i(\epsilon),\, \eta_i(\epsilon))\right|. \end{aligned}$$

Отсюда и из (9)

$$|(\Pi(u_k g u_k^*)\eta_i,\, \eta_i) - (\Pi(u_l g u_l^*)\eta_i,\, \eta_i)| < 4\epsilon\ .\forall\ k > l.$$

Так как $\epsilon$ произвольно, то $\{(\Pi(u_k g u_k^*)\eta_i\eta_i)\}$ — фундаментальная последовательность. Значит, пределы последовательностей $\{(\Pi(u_k g u_k^*)\eta_i\eta_i)\}_{(k\in\mathbb{N})}$ существуют при каждом $i = 1, 2$.

Более того, из соотношения

$$\lim_{l\to\infty}\Pi(u_l u u_l^*)\eta_1 = \eta_1\ \forall\ u \in U(G)$$

получаем, что

$$\varphi_{\eta_1}(ugv) = \varphi_{\eta_1}(g)\ \forall\ u, v \in U(G).$$

Следовательно, $\varphi_{\eta_1}$ и $\varphi_{\eta_2}$ — сферические функции на $G$.

Докажем совпадение $\varphi_{\eta_1}$ и $\varphi_{\eta_2}$.

Из цикличности $\xi$ вытекает, что для любого $\delta > 0$ существуют наборы $\{g_{ik_i}\}_{k_i=1}^{N_i}$, $i = 1, 2$, элементов из $G(n)$ и числа $\{c_{ik_i}\}_{k_i=1}^{N_i}$, $i = 1, 2$, из $\mathbb{C}$ со свойствами

$$\left|\left|\sum_{k_i=1}^{N_i} c_{ik_i}\Pi(g_{ik_i})\xi\ - \eta_i\right|\right| < \delta \quad (i = 1, 2). \tag{10}$$

Так как $\Pi$ — фактор-представление, то, учитывая (10) и предполагая без ограничения общности, что $\|\xi\| = 1$, получаем

$$2\delta > \Bigg| \lim_{l\to\infty} (\Pi(u_l g u_l^*)\eta_i,\, \eta_i)$$

$$- \lim_{l\to\infty} \left( \Pi(u_l g u_l^*) \sum_{k_i=1}^{N_i} c_{ik_i} \Pi\left(g_{ik_i}\right) \xi, \sum_{k_i=1}^{N_i} c_{ik_i} \Pi\left(g_{ik_i}\right) \xi \right) \Bigg|$$

$$= \left| \lim_{l\to\infty} (\Pi(u_l g u_l^*)\eta_i, \eta_i) - \lim_{l\to\infty} (\Pi(u_l g u_l^*)\xi, \xi) \cdot \left\| \sum_{k_i=1}^{N_i} c_{ik_i} \Pi\left(g_{ik_i}\right) \xi \right\|^2 \right|.$$

Так как $\delta$ произвольно, то отсюда и из (10) следует, что $\varphi_{\eta_1}(g) = \varphi_{\eta_2}(g)$ $\forall g \in G$.

Неразложимость $\varphi_{\eta_1}$ доказывается на основе соотношения

$$\lim_{l\to\infty} \varphi_{\eta_1}(u_l g u_l^* h) = \varphi_{\eta_1}(g)\varphi_{\eta_1}(h) \ \forall g, h \in G.$$

**Определение 3.3.** *Сферическую функцию на а.а. группе $G$, определенную согласно предложению 3.2 по допустимому представлению $\Pi$, будем называть асимптотической сферической функцией (а.с.ф.) и обозначать через $\varphi_{\Pi}^{(a)}$.*

**Теорема 3.4.** *Пусть $G$ — а.а. матричная группа, являющаяся индуктивным пределом конечномерных групп $G(n)$, $n \in \mathbb{N}$, $\Pi$ — такое же, как и в предложении 3.2, $\xi$ — единичный циклический вектор для $\Pi$, неподвижный относительно операторов $\Pi(u_l)$, $l \in \mathbb{N}$, где $u_l$ — последовательность из $U(G)$, обеспечивающая а.а. $G$. Тогда подпространство $H_U = \{\eta \in H_\Pi : \Pi(u_l)\eta = \eta \ \forall\, l \in \mathbb{N}\}$ одномерно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о полностью аналогично обоснованию *теоремы мультипликативности* из [6].

**Определение 3.5.** *Рангом $\mathbf{r}(\Pi)$ допустимого фактор-представления $\Pi$ группы $G$, которая совпадает с одной из следующих групп: $GL(\infty)$, $G_n^I$, $Sp(2\infty)$, $O(2\infty)$, $GK_n$, назовем ранг представления $\Pi^{(a)}$, определяемого неразложимой а.с.ф. $\varphi_{\Pi}^{(a)}$ группы $GL(\infty)$ ($G = GL(\infty)$); $GL(n,\infty)$ при $G = G_n^I$; $G_d$ ($G = Sp(2\infty)$ или $O(2\infty)$); $G_d \cap G(n,\infty)$ ($G = GK_n$) (см. разд. 2).*

## 4. Свойства допустимых представлений группы $GL(\infty)$ и соответствующей группы движений

Под группой движений будем понимать подгруппу $G_n^I \subset GL(\infty)$ (см. разд. 2).

**Теорема 4.1.** *Пусть* $\Pi$ *— допустимое представление* $G$*, где* $G$ *совпадает с одной из групп* $GL(\infty)$, $G_n^I$, $Sp(2\infty)$, $O(2\infty)$, $GK_n$; $\xi_1$, $\xi_2$ *—* $\Pi(U(G(n,\infty))$ *— неподвижные единичные векторы из* $H_\Pi$. *Тогда* $(\Pi(g)\xi_1, \xi_1) = (\Pi(g)\xi_2, \xi_2)$ *для всех* $g \in G(n,\infty)$.

Для доказательства следует заметить, что группы из условия теоремы асимптотически абелевы, множество

$$\bigcup_n \{\eta \in H_\Pi \,:\, \Pi(U(G'_n))\eta = \eta\}$$

плотно в $H_\Pi$ и воспользоваться утверждением предложения 3.2.

В $GL(\infty)$ рассмотрим подмножество $Y_p$, состоящее из матриц вида

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1p} & \delta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ * & * & \dots & * & * & \delta_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & \dots & * & * & * & * & \delta_s & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix},$$

где $p \geq 1$, $\delta_s > 0 \; \forall \, s \in \mathbb{N}$.

**Лемма 4.2.** *Пусть* $\Pi$ *— допустимое фактор-представление группы* $GL(\infty)$, $\xi$ *— циклический вектор, неподвижный относительно операторов* $\Pi(U(G(p,\infty)))$. *Тогда* $\left[\Pi(Y_p)\xi\right] = \left[\Pi(GL(\infty))\xi\right]$.

Для доказательства следует заметить, что $GL(\infty) = Y_pU(G(p,\infty))$.

**Лемма 4.3.** *Пусть* $\Pi$, $p$, $\xi$ *— такие, как в лемме 4.2,* $K_{2p}$ *— подгруппа* $GL(\infty)$*, состоящая из матриц вида* $\begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ * & I \end{bmatrix}$*, где* $g_{11}$ *— произвольная* $(2p) \times (2p)$*-матрица,* $p \geq \mathbf{r}(\Pi)$. *Тогда* $H_\Pi = \left[\Pi(K_{2p})\xi\right]$.

Доказательство. Легко проверяется, что замыкание множества $K_{2p}GL(p,\infty)$ содержит $Y_p$. Далее, в силу утверждений 3.2 и 4.1 сужение $\Pi$

на $GL(p,\infty)$, действующее в гильбертовом пространстве $[\Pi(GL(p,\infty))\xi]$, — фактор-представление. Согласно теореме 2.2 (при $n=0$) $[\Pi(GL(p,\infty))\xi] = [\Pi(GL(p,\infty)\cap K_{2p})\xi]$. Отсюда и из леммы 3.2 получаем $[\Pi(GL(\infty))\xi] = [\Pi(Y_p)\xi] = [\Pi(K_{2p}GL(p,\infty))\xi] = [\Pi(K_{2p})\xi]$. Лемма 4.3 доказана.

Подобным образом доказывается следующий аналог предыдущего утверждения для группы $G_n^I \subset GL(\infty)$.

**Лемма 4.4.** *Пусть* $\Pi$ *— допустимое фактор-представление группы* $G_n^I$*,* $\xi$ *— циклический вектор, неподвижный относительно операторов* $\Pi(u)$*,* $u \in U(G(p+n,\infty))$*,* $K_{2p}^{(n)}$ *— подгруппа* $G_n^I$*, состоящая из матриц вида* $\begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ * & g_{22} & 0 \\ * & * & I \end{bmatrix}$*, где* $g_{22}$ *— произвольная* $(2p)\times(2p)$*-матрица. Если* $p \geq \mathbf{r}(\Pi)$ *(см. определение 3.5 ), то* $\left[\Pi(K_{2p}^{(n)})\xi\right] = \left[\Pi(G_n^I)\xi\right]$.

## 5. Описание допустимых представлений групп $GL(\infty)$ и $G_n^I$

Пусть $\Pi$ — допустимое фактор-представление группы $G$, которая в первых двух утверждениях этого параграфа может быть одной из групп $GL(\infty)$, $G_n^I$, $Sp(2\infty)$, $O(2\infty)$. Изометрический оператор $\sigma_q^{(n)}$, действующий в $H$ согласно формуле

$$\sigma_q^{(n)}(e_i) = e_i \quad \text{при} \quad i \leq n \quad \text{и} \quad \sigma_q^{(n)}(e_i) = e_{i+q} \quad \text{при} \quad i > n \tag{11}$$

($n=0$ сответствует $GL(\infty)$), является сильным пределом элементов из унитарной подгруппы $U(G_n^I)$. Аналогично, в случае групп $Sp(2\infty)$, $O(2\infty)$ этим свойством обладает изометрия $\sigma_q$, определяемая соотношением

$$\sigma_q(e_i) = e_{i+(sign\, i)q}\,. \tag{12}$$

Обозначим через $\Pi_U$ сужение $\Pi$ на $U(G)$. В силу результатов работы [11] $\Pi_U$ непрерывно, если $U(G) \subset B(H)$ и $U(H_\Pi) \subset B(H_\Pi)$ рассматриваются как топологические группы относительно сильной операторной топологии. Следовательно, $\Pi_U$ расширяется по непрерывности до представления полугруппы $\breve{U}(G)$, содержащей все изометрии, которые являются предельными точками относительно слабой топологии элементов из $U(G)$. Очевидно, $\sigma_q^{(n)}$, $\sigma_q$ принадлежат $\breve{U}(G)$.

**Теорема 5.1.** *Если* $E_l$ *— ортопроектор на подпространство* $\Pi(\sigma)H_\Pi$*, где* $\sigma$ *равен* $\sigma_q^{(n)}$ *или* $\sigma_q$ *(см. (11)–(12)), то* $\Pi(g)E_l - E_l\Pi(g) = [\Pi(g), E_l] = 0$ *для всех* $g \in G(l,\infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\Pi$ доопределяется по непрерывности на $\sigma$, то для любого $g \in G(l,\infty)$ $\sigma^* g\sigma \in G$ и

$$\Pi(\sigma^*)\Pi(g)\Pi(\sigma) = \Pi(\sigma^* g\sigma).$$

Следовательно, $\Pi(\sigma^*)E_l\Pi(g)E_l\Pi(\sigma)$ — унитарный оператор в $H_\Pi$. Отсюда, учитывая изометричность $\Pi(\sigma)$), получаем, что $E_l\Pi(g)E_l$-унитарный оператор в $E_l H_\Pi$.

По этой причине

$$E_l\Pi(g)(I - E_l) = 0 \text{ или } E_l\Pi(g) = E_l\Pi(g)E_l\,.$$

Проводя подобные рассуждения для $g^{-1}$, получаем

$$E_l\,\Pi(g^{-1}) \;=\; E_l\,\Pi(g^{-1})\,E_l.$$

Следовательно, $\Pi(g)\,E_l \;=\; E_l\,\Pi(g)$ . Теорема 5.1 доказана.

Пусть $\xi$ — циклический вектор для представления $\Pi$,

$$\Pi(u)\xi = \xi \;\; \forall\; u \in U(G(p,\infty))\,,\; p \;>\; \mathbf{r}(\Pi) \;\text{ и }\; q \;\in\; \mathbb{N}.$$

**Предложение 5.2.** *Положим* $\xi_q = \Pi(\sigma)\xi$, *где* $\sigma$ *равен* $\sigma_q^{(n)}$ *или* $\sigma_q$ *(см. (11)–(12)),* $H_q = [\Pi(G(q,\infty))\xi_q]$. *Тогда:*

*a)* $H_q = \Pi(\sigma)H_\Pi$*;*

*b) представление* $(\Pi, G, H_\Pi)$ *унитарно эквивалентно представлению, определяемому цепочкой отображений*

$$G \xrightarrow{i_q} G(q,\infty) \xrightarrow{\Pi} (\Pi(G(q,\infty)), H_q, \xi_q\,),$$

*где* $i_q(g)$ *при* $g \in G$ *определяется из соотношений*

$$\sigma^*\, i_q(g)\,\sigma \;=\; g\,,\; i_q(g)e_l \;=\; e_l \,\text{для}\, l = \;1,\,2,\,3,\,\ldots\,,\,q\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что

$$[\Pi(\sigma^*)\Pi(G(q,\infty))\Pi(\sigma)\xi] = [\Pi(G)\xi] = H_\Pi\,.$$

Следовательно, $\Pi(\sigma^*)\,[\Pi(G(q,\infty))\xi_q] = H_\Pi$ или

$$E_q[\Pi(G(q,\infty))\xi_q] = \Pi(\sigma)H_\Pi,\; \text{где } E_q = \Pi(\sigma)\Pi(\sigma^*)\,.$$

Но в силу теоремы 5.1 $E_q \in \Pi(G(q,\infty))'$. Поэтому

$$\Pi(\sigma)H_\Pi = E_q[\Pi(G(q,\infty))\xi_q] = [\Pi(G(q,\infty))\xi_q] = H_q\,.$$

Тем самым соотношение $(a)$ доказано. Утверждение $(b)$ вытекает из следующей цепочки равенств:

$$(\Pi(g)\xi,\xi) = (\Pi(\sigma^* i_q(g)\sigma)\xi,\xi) = (\Pi(\sigma^*)\Pi(i_q(g))\Pi(\sigma)\xi,\xi) = (\Pi(i_q(g))\xi_q,\xi_q)\,.$$

Следующие у тверждения 5.3–5.7 имеют отношение только к группе $GL(\infty)$. Пусть $q = 2(p+1)$, где $p \geq \mathbf{r}(\Pi)$.

**Лемма 5.3.** *В $H_\Pi$ существует семейство векторов $\{\xi_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, $\xi_1 = \xi$, со свойствами:*

*a) подпространства $H_q(i) = \left[\Pi(G_q^I)\xi_i\right]$ $(q = 2(p+1))$ при разных значениях индекса $i$ попарно ортогональны и $\oplus_i H_q(i) = H_\Pi$;*

*b) $\Pi(\xi_i) = \xi_i$ $\forall\ i \in \mathbb{N}$ и $u \in U(GL(q,\infty))$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{g_k\}$ $(k \in \mathbb{N})$ — плотное подмножество в $GL(q)$, $\xi_1$, $\xi_2$, $\ldots$, $\xi_n$ — единичные векторы из $H_\Pi$, для которых подпространства

$$H_q(i) = \left[\Pi(G_q^I)\,\xi_i\right],\ \ 1 \leq i \leq n,$$

попарно ортогональны. Если $k(n) = \min\{k : \Pi(g_k)\xi \notin \oplus_{i=1}^n H_q(i)\}$ и $H_\Pi(n) = \{H_\Pi \ominus \{\oplus_{i=1}^n H_q(i)\}\} \neq 0$, то положим

$$\xi_{n+1} = \frac{P_n\,\Pi(g_{k(n)})\,\xi}{||P_n\,\Pi(g_{k(n)})\,\xi||}\,,\ \text{где } P_n - \text{ проектор на } H_\Pi(n)\,.$$

Продолжая этот процесс, получим систему векторов $\{\xi_i\}$, $i \in \mathbb{N}$ (возможно конечную) такую, что

$$\Pi(g_k)\xi \in \oplus_{i=1}^\infty H_q(i)\ \forall\, k \in \mathbb{N} \text{ и } \Pi(u)\xi_i = \xi_i\ \forall\ u \in U(q,\infty)\,.$$

Теперь наше утверждение вытекает из леммы 4.3. Лемма 5.3 доказана.

Пусть $E_q(i)$ — ортопроектор на $H_q(i)$ $(H_q(i) = E_q(i)\,H_\Pi)$. Из леммы 5.3 вытекает существование $i$, для которого $E_q(i)\xi_q \neq 0$. Если $E_q(i)E_q = V_q(i)\,[E_qE_q(i)E_q]^{\frac{1}{2}}$ — полярное разложение

$$E_q(i)E_q, e_q(i) = V^*{}_q(i)V_q(i) \leq E_q,\ \ f_q(i) = V_q(i)V^*{}_q(i) \leq E_q(i)\,,$$

то из теоремы 5.1 и леммы 5.3 получаем, что $V_q(i) \in (\Pi\,(GL\,(q,\infty)))'$.

Так как $(\Pi\,(GL\,(\infty)))'' = \left((\Pi\,(GL(\infty)))'\right)'$ — фактор, то согласно предложению 5.2 $w^*$ — алгебра $(\Pi\,(GL\,(q,\infty)))''$ операторов, действующих в $H_q$, также фактор. По этой причине, учитывая теорему 5.1, получаем, что следующая цепочка отображений

$$a \in (\Pi(GL(q,\infty)))'' E_q \longrightarrow e_q(i)\, a \in (\Pi(GL(q,\infty)))'' e_q(i)$$
$$\longrightarrow V_q(i)\, e_q(i)\, a\, V_q(i)^* = f_q(i)\, a \in (\Pi(GL(q,\infty)))'' f_q(i)$$

является изоморфизмом

$$(\Pi(GL(q,\infty)))'' E_q = E_q\, (\Pi(GL(q,\infty)))'' E_q \text{ на}$$
$$f_q(i)\, (\Pi(GL(q,\infty)))'' f_q(i) = f_q(i)\, (\Pi(GL(q,\infty)))'' \subset (\Pi(GL(q,\infty)))'' E_q(i)\,.$$

Следовательно, класс унитарной эквивалентности представления $\Pi$ группы $GL(\infty)$, в силу предложения 5.2, определяется с точностью до кратности сужением $\Pi$ на $GL(q,\infty)$, действующем в некотором инвариантном подпространстве $f_q(i)H_\Pi \subset H_q(i)$ с циклическим вектором $\xi_q(i) = V_q(i)\,\xi_q$.

Пусть

$$(\Pi(G_q^I), H_q(i), \xi_i) = \int\limits_S (\Pi_s(G_q^I), H_q(i,s), \xi_i(s))\, d\,\mu(s) \; - \tag{13}$$

разложение сужения представления $\Pi$ на группу $G_q^I$, действующего в $H_q(i)$, в прямой интеграл неприводимых сферических представлений, который соответствует центру $C_i$ алгебры $(\Pi(G_q^I))''$, где $S$ — спектр $C_i$, $\mu$ — вероятностная мера на $S$.

Используя классификацию сферических фактор–представлений группы $GL(\infty)$, предложение 3.2, теорему 4.1 и тот факт, что $q > 2(\mathbf{r}(\Pi)+1)$, можно доказать следующее утверждение.

**Лемма 5.4.** *Существует самосопряженная матрица $A$ размера $\mathbf{r}(\Pi) \times \mathbf{r}(\Pi)$ и вещественное число $\beta$ такие, что*

$$(\Pi_s(g)\xi_i(s)\,,\, \xi_i(s))\, ||\xi_i(s)||^{-1}$$
$$= \det(|g|)^{\imath\beta} \det\left[I_{\mathbf{r}(\Pi)} \otimes \cosh(\ln|g|) - 2\imath A \otimes \sinh(\ln|g|)\right]$$

*$\forall\, g \in GL(q,\infty)$ и $\mu$ — почти всех (п.в.) $s \in S$. Более того, для $\mu$ — п.в. $s \in S$ $\left[\Pi_s\left(G_q^I\right)\xi_i(s)\right] = \left[\Pi_s\left(N_q\right)\xi_i(s)\right]$, где $N_q$ состоит из матриц вида $\begin{bmatrix} I_q & 0 \\ * & I \end{bmatrix}$.*

Отсюда и из полной классификации сферических представлений группы движений $G_n^I$ (см. [7] ) вытекает

**Лемма 5.5.** *Существуют: изометрия $V$, отображающая $H_q(i)$ на $L^2(S,\mu)\otimes L^2(\Lambda_{\mathbf{r}(\Pi)},\nu_{\mathbf{r}(\Pi)})$, и $\mu$-измеримое отображение $z$ из $S$ в множество матриц из $\mathbf{r}(\Pi)$ столбцов и $q$ строк такие, что действие операторов $\tilde{\Pi}_A(g) = V\Pi(g)E_q(i)V^{-1}$ $(g\in G_q^I)$ определяется соотношением*

$$\left(\tilde{\Pi}_A(g)\eta\right)(s) = \Pi_{Az(s)}\eta(s) \quad (\textit{см. (6)}), \qquad \textit{где } \eta(s)\in L^2(\Lambda_{\mathbf{r}(\Pi)},\nu_{\mathbf{r}(\Pi)}) \ \forall\ s\in S. \tag{14}$$

*Более того, существует $\mu$-измеримое отображение $f_q(i,.)$ из $S$ в множество ортопроекторов неймановской алгебры*

$$\left(\Pi_{Az(s)}\left(GL(q,\infty)\right)\right)'\subset B\left(L^2\left(\Lambda_{\mathbf{r}(\Pi)},\nu_{\mathbf{r}(\Pi)}\right)\right), \ \textit{для которого}$$

$$\left(Vf_q(i)V^{-1}\eta\right)(s) = f_q(i,s)\eta(s).$$

Для $u\in U(\mathbf{r}(\Pi),A) = \{u\in U(\mathbf{r}(\Pi)) : [u, A]=0\}$ определим оператор $\tau(u)$ в $L^2\left(\Lambda_{\mathbf{r}(\Pi)},\nu_{\mathbf{r}(\Pi)}\right)$ согласно формуле

$$(\tau(u)\xi)(\lambda) = \xi(u^*\lambda). \tag{15}$$

Обозначим через $\tilde{\tau}(u)$ естественное расширение $\tau$ на $L^2(S,\mu)\otimes L^2\left(\Lambda_{\mathbf{r}(\Pi)},\nu_{\mathbf{r}(\Pi)}\right)$. А именно, $\tilde{\tau}(u)=I\otimes\tau(u)$.

Если $\kappa$ — неприводимое представление группы $U(\mathbf{r}(\Pi),A)$, $\kappa_{ik}$ — матричный элемент оператора $\kappa(g)$, то

$$P_i^\kappa = \dim(\kappa)\int\limits_{U(\mathbf{r}(\Pi),A)}\kappa_{ii}(v)\tau(v)\,dv$$

есть ортопроектор из $w^*$-алгебры $\left(\Pi_{Az}\left(GL(q,\infty)\right)\right)'$ (см. (6)), действующей в $L^2\left(\Lambda_{\mathbf{r}(\Pi)},\nu_{\mathbf{r}(\Pi)}\right)$.

Очевидно, что операторы $\tilde{P}_i^\kappa = I\otimes P_i^\kappa$ и $\tilde{\tau}(u)\,\forall\,u\in U(\mathbf{r}(\Pi),A)$ принадлежат $\tilde{\Pi}_A\left(GL(q,\infty)\right)'$.

Без ограничения общности будем считать, что для введенных выше $\kappa$ и $i$ $\tilde{P}_i^\kappa Vf_q(i)V^{-1}\neq 0$.

Пусть $w\left|Vf_q^iV^{-1}\tilde{P}_i^\kappa Vf_q^iV^{-1}\right|^{\frac{1}{2}}$ — полярное разложение оператора $\tilde{P}_i^\kappa Vf_q(i)V^{-1}$. Так как $\left(\tilde{\Pi}_A\left(GL(q,\infty)\right)\right)''Vf_q(i)V^{-1}$ — фактор, ортопроектор $w^*w\leq Vf_q(i)V^{-1}$, а $w$ и $Vf_q(i)V^{-1}\in\left(\tilde{\Pi}_A(GL(q,\infty))\right)'$, то, учитывая утверждение теоремы 0.1 и минимальность проектора

$$P_i^\kappa \text{ в } \left(\Pi_{Az(s)}\left(GL(q,\infty)\right)\right)' \subset B\left(L^2\left(\Lambda_{\mathbf{r}(\Pi)}, \nu_{\mathbf{r}(\Pi)}\right)\right),$$

получаем, что:

i) сужение $\tilde{\Pi}_A$ на $GL(q,\infty)$ в $Vf_q(i)V^{-1}\left(L^2(S,\mu)\otimes L^2\left(\Lambda_{\mathbf{r}(\Pi)}, \nu_{\mathbf{r}(\Pi)}\right)\right)$ кратно представлению $GL(q,\infty)$ в $ww^*\left(L^2(S,\mu)\otimes L^2\left(\Lambda_{\mathbf{r}(\Pi)}, \nu_{\mathbf{r}(\Pi)}\right)\right)$, определяемому соотношением $w\tilde{\Pi}_A(g)w^* = \tilde{\Pi}_A(g)ww^*$;

ii) если $f(s)$ — $\mu$-измеримое поле ортопроекторов, определяющее ортопроектор $ww^*$, то существует подмножество $S' \subset S$ положительной меры такое, что $f(s) = \begin{cases} P_i^\kappa, & \text{если } s \in S' \\ 0, & \text{если } s \notin S' \end{cases}$.

Приведенные выше факты объединяет следующее

**Предложение 5.6.** *В коммутанте представления* $(\Pi, GL(q,\infty), H_q)$ *(см. предложение 5.2) существует ортопроектор* $f$ *такой, что представление* $(\Pi, GL(q,\infty), \; fH_q)$ *неприводимо и унитарно эквивалентно сужению* $\Pi_{Az}$ *на группу* $GL(q,\infty))$, *действующему в* $P_i^\kappa L^2\left(\Lambda_{\mathbf{r}(\Pi)}, \nu_{\mathbf{r}(\Pi)}\right)$.

Отсюда и из предложения 5.2 ($b$) вытекает основная классификационная

**Теорема 5.7.** *Любое допустимое фактор-представление* $\Pi$ *группы* $GL(\infty)$ *имеет тип* $I$ *и кратно для некоторой самосопряженной матрицы* $A$ *размера* $\mathbf{r}(\Pi)\times\mathbf{r}(\Pi)$ *и ортопроектора* $P_i^\kappa$, *где* $\kappa$ — *неприводимое представление* $U(\mathbf{r}(\Pi), A)$, *представлению* $\Pi_{Az}$ *группы* $G_n^I$ ($z = 0$ *при* $n = 0$, $(G_0^I = GL(\infty))$), *действующему в* $P_i^\kappa L^2\left(\Lambda_{\mathbf{r}(\Pi)}, \nu_{\mathbf{r}(\Pi)}\right)$, *(см. (6)).*

Аналоги утверждений (5.3)–(5.6), из которых мы вывели теорему 5.7, могут быть с некоторыми уточнениями доказаны для группы $G_n^I$.

Пусть $\Pi$ — допустимое фактор-представление группы $G_n^I$, $n \geq 1$, $\xi$ — циклический вектор для $\Pi$, $\mathbf{r}(\Pi)$ — ранг $\Pi$ (см. определение 3.5),

$$\Pi(u)\xi = \xi \;\; \forall \; u \in U(G(p+n,\infty)), \; q = n+2(p+1), \; p \geq \mathbf{r}(\Pi).$$

Следующее утверждение является аналогом леммы 5.3 для группы $G_n^I$.

**Лемма 5.8.** *В* $H_\Pi$ *существует семейство единичных векторов* $\xi_i$, $i \in \mathbb{N}$, $\xi_1 = 1$, *со свойствами:*

*a) подпространства* $H_q(i) = \left[\Pi(G_q^I)\xi_i\right]$ $(q = n+2(p+1))$ *при разных* $i$ *попарно ортогональны и* $\oplus_{i\in\mathbb{N}} H_q(i) = H_\Pi$;

*b)* $\Pi(u)\xi_i = \xi_i \;\; \forall \; i$ *и* $u \in U\left(G(q,\infty)\right)$.

Доказательство использует утверждение леммы 4.4 и полностью аналогично обоснованию леммы 5.3.

Если $E_q$, $\xi_q$ — такие же, как и в предложении 5.2, то, повторяя рассуждения, приведенные выше для $GL(\infty)$, найдем проектор $f_q(i) \in (\Pi(G(q,\infty)))'$ такой, что $f_q(i)H_\Pi \subset H_q(i)$ и $(\Pi, G(q,\infty), H_q)$ кратно $(\Pi, G(q,\infty), f_q(i)H_q(i))$.

Отсюда, учитывая теорему 2.1, утверждения 3.2, 4.1 и разложение

$$\left(\Pi(G_q^I), H_q(i), \xi_i\right) = \int_S \left(\Pi_s(G_q^I), H_q(i,s), \xi_i(s)\right) d\mu(s)\,,$$

где встречающиеся объекты описаны в (13), получаем аналог леммы 5.5 для $G_n^I$.

**Лемма 5.9.** *Существуют: с.с.* $\mathbf{r}(\Pi) \times \mathbf{r}(\Pi)$*-матрица* $A$, $\mu$ *— измеримое отображение* $z$ *из* $S$ *в множество матриц из* $q = n + 2(p+1)$ *строк и* $\mathbf{r}(\Pi)$ *столбцов вида* $z(s) = \begin{bmatrix} z_n \\ * \end{bmatrix}$, *где* $z_n$ *— независящая от* $s$ *матрица высоты* $n$; *изометрия* $V$, *переводящая* $H_q(i)$ *на* $L^2(S,\mu) \otimes L^2\left(\Lambda_{\mathbf{r}(\Pi)}, \nu_{\mathbf{r}(\Pi)}\right)$, *такие, что операторы* $\tilde{\Pi}_{Az}(g) = V\Pi_i(g)V^{-1}$ $(g \in G_q^I)$, *где* $\Pi_i$ *— сужение* $\Pi$ *на* $H_q(i)$, *определяются в* $L^2(S,\mu) \otimes L^2\left(\Lambda_{\mathbf{r}(\Pi)}, \nu_{\mathbf{r}(\Pi)}\right)$ *согласно соотношениям (6) и (14).*

Положим $U\left(\mathbf{r}(\Pi), A, z_n\right) = \{u \in U(\mathbf{r}(\Pi), A) : z_n\, u = z_n\}$. По неприводимому представлению $\kappa$ группы $U\left(\mathbf{r}(\Pi), A, z_n\right)$ определим, как и ранее, ортопроектор $P_i^\kappa$.

Рассуждения, изложенные в этом параграфе для группы $GL(\infty)$, с незначительными изменениями переносятся на случай группы $G_n^I$ и приводят к следующему утверждению.

**Теорема 5.10.** *Для допустимого фактор-представления* $\Pi$ *группы* $G_n^I$ *существуют : с.с.* $\mathbf{r}(\Pi) \times \mathbf{r}(\Pi)$ *— матрица* $A$, $n \times \mathbf{r}(\Pi)$ *— матрица* $z$ *и ортопроектор* $P_i^\kappa$, *где* $\kappa$ *— неприводимое представление группы* $U\left(\mathbf{r}(\Pi), A, z\right)$, *такие, что* $\Pi$ *кратно сужению представления* $\Pi_{Az}$ *(см.(6)) на подпространство* $P_i^\kappa L^2\left(\Lambda_{\mathbf{r}(\Pi)}, \nu_{\mathbf{r}(\Pi)}\right)$.

## Список литературы

[1] *А.М. Вершик, С.В. Керов,* Характеры и фактор представления бесконечной унитарной группы. — *Докл. АН СССР* (1982), т. 267, № 2, с. 272–276.

[2] *D. Voiculescu,* Representations factorielles de type $II_1$ de $U(\infty)$. — *J. Math. pures et appl.* (1976), v. 55, No. 1, p. 117–144.

[3] *Р.С. Исмагилов*, Бесконечномерные группы и их представления. — Тр. междунар. мат. конгресса. Варшава (1983), с. 861–875.

[4] *А.А. Кириллов*, Представления бесконечномерной унитарной группы. — *Докл. АН СССР* (1973), т. 212, с. 288–290.

[5] *Н.И. Нессонов*, Описание представлений группы обратимых операторов гильбертова пространства, содержащих единичное представление унитарной подгруппы. — *Функц. анализ и его прил.* (1983), т. 17, № 1, с. 79–80.

[6] *Н.И. Нессонов*, Полная классификация представлений $GL(\infty)$, содержащих единичное представление унитарной подгруппы. — *Мат. сб.* (1986), т. 130, № 2, с. 131–150.

[7] *Н.И. Нессонов*, Полное описание неразложимых сферических функций на бесконечномерной группе движений. — *Докл. АН УССР* (1987), т. 6, с. 7–9.

[8] *Н.И. Нессонов*, Описание допустимых представлений бесконечномерных матричных групп с коэффициентами в конечномерной алгебре. — *Функц. анализ и его прил.* (1992), т. 26, № 2.

[9] *N.I. Nessonov*, Representations of infinite-dimensional matrix groups and associated dynamical systems. Operator algebras and operator theory: Proc. OATE 2 Conf., Romania (1989), Longman Group UK Limited (1992).

[10] *N.I. Nessonov*, A Complete Classification of the Admissible Representations of Infinite-Dimensional Classical Matrix Groups. Preprint, Internet, http://xxx.lanl.gov/find./funct-an./9704002.

[11] *Г.И. Ольшанский*, Унитарные представления бесконечномерных классических групп $U(p,\infty)$, $SO_0(p,\infty)$, $Sp(p,\infty)$ и соответствующих групп движений. — *Функц. анализ и его прил.* (1978), т. 12, № 3, с. 32–44.

[12] *Г.И. Ольшанский*, Конструкция унитарных представлений бесконечномерных классических групп. — *Докл. АН СССР* (1980), т. 250, с. 284–288.

[13] *Г.И. Ольшанский*, Унитарные представления бесконечномерных пар $(G,K)$ и формализм Р. Хау. — *Докл. АН СССР* (1983), т. 269, с. 33–36.

[14] *Г.И. Ольшанский*, Бесконечномерные классические группы конечного $R$-ранга: описание представлений и асимптотическая теория $n$. — *Функц. анализ и его прил.* (1984), т. 18, № 1, с. 28–42.

[15] *Г.И. Ольшанский*, Метод голоморфрых расширений в теории унитарных представлений бесконечномерных классических групп. — *Функц. анализ и его прил.* (1988), т. 22, № 4, с. 23–37.

## A complete classification of the admissible representatons of infinite-dimensional classical matrix groups. I

N.I. Nessonov

Article is first part of the paper, where the classes of unitary equivalence of admissible representation of infinite-dimensional classical groups $GL(\infty)$, $Sp(2\infty)$, $O(2\infty)$ are exhaustively described. It contains realization of full set of admissible representations and classification of the results for group $GL(\infty)$.

## Повна класифікация допустимих зображень нескінченновимірних класичних матричних груп. I

М.I. Нессонов

Стаття являється першою частиною роботи, де одержано повний опис класів унітарної еквівалентності припустимих зображень нескінченновимірних груп $GL(\infty)$, $Sp(2\infty)$, $O(2\infty)$, і містить реалізації повного набору зображень та класифікаційні результати для групи $GL(\infty)$.