Математическая физика, анализ, геометрия
2001, т. 8, № 3, с. 318–324

Теорема о вложении полуцелостных l-группоидов в полные целостные l-группоиды

Т.М. Шамилев

Крымский государственный индустриально-педагогический институт
ул. Севастопольская, 21, Симферополь, 95015, Украина
E-mail:shamilev@csipi.simfi.net

Статья поступила в редакцию 2 апреля 2001 г.
Представлена В.Я. Голодцом

Доказана теорема о возможности вложения полуцелостного l-группоида в полный целостный l-группоид, которая приводилась ранее в работе [5] без доказательства.*

Решетка идеалов коммутативного кольца с единицей образует, как показано в [1], полный целостный l-группоид, а в случае отсутствия единицы, вообще говоря, нет. Но она будет обладать свойством полуцелостности, рассмотренным в данной статье. В то же время, как видно из работы [2], кольца без единицы вкладываются в кольца с единицей. Аналогичный вопрос интересен для полуцелостных l-группоидов. Ранее в работе [3] изучался вопрос изоморфности l-группоида решетке идеалов некоторой полугруппы, а в работе [4] — вопрос о вложимости произвольной решетки в решетку идеалов той или иной решетки. В настоящей работе приводится теорема о возможности вложения полуцелостного l-группоида в полный целостный l-группоид, которая приводилась ранее в работе [5] без доказательства.

Определение 1 ([1, гл. XIV, § 1]). *Упорядоченным группоидом (y-группоидом) называется частично упорядоченное множество* M *с бинарным умножением $a \cdot b$, удовлетворяющим условию изотонности: если $a \leq b$, то $x \cdot a \leq x \cdot b$ и $a \cdot x \leq b \cdot x$ для всех a, b, $x \in M$.*

y-группоид M назовем y_0-группоидом, если M является решеткой.

* Mathematics Subject Classification (2000): 06B05, 20C33.

Определение 2. *Решетка с умножением M называется l-группоидом, если в ней для любых элементов a, b, c выполняются равенства*

$$a \cdot (b \vee c) = a \cdot b \vee a \cdot c\,,$$

$$(b \vee c) \cdot a = b \cdot a \vee c \cdot a\,,$$

где знак "$\vee$" обозначает операцию супремума элементов решетки.

Пусть L является y_0-группоидом.

Определение 3 ([1, гл. XIV, § 7]). *Элемент $p \in L$ называется простым, если из $a \cdot b \leq p$ следует $a \leq p$ или $b \leq p$.*

Определение 4 ([1, гл. XIV]). *Элемент a y-группоида называется левоидеальным (правоидеальным), если $x \cdot a \leq a$ ($a \cdot x \leq a$) для всех $x \in L$. Элемент, который является одновременно лево- и правоидеальным, называется идеальным.*

Определение 5. *y-группоид L назовем полуцелостным, если все его элементы являются идеальными.*

Для y-группоидов, y_0-группоидов и l-группоидов стандартным образом определяются понятия гомоморфизма, изоморфизма, автоморфизма и вложения.

Определение 6 ([1, гл. XIV]). *y-группоид L, обладающий единицей для операции умножения, называется целостным, если 1 является наибольшим элементом в L.*

В целостном y-группоиде все элементы являются идеальными. Действительно, для любых $a, x \in M$ ввиду $a \leq 1$, $x \leq 1$ имеем $ax \leq a$, $xa \leq a$. Следовательно, всякий целостный y-группоид и всякий его y-подгруппоид является полуцелостным. В то же время существуют полуцелостные, но не целостные l-группоиды.

Пусть в y_0-группоиде M отсутствует нулевой элемент для операции умножения. Добавим к M элемент 0 и положим: $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ и $0 \leq a$ для любого $a \in M$. Это превращает множество $M_0 = M \cup \{0\}$ в решетку с бинарной операцией умножения.

Предложение 1. *Если M является y_0-группоидом (полуцелостным y_0-группоидом, l-группоидом (полуцелостным l-группоидом)) без нулевого элемента, то M_0 является y_0-группоидом (полуцелостным y_0-группоидом, l-группоидом (полуцелостным l-группоидом)) с нулем, который одновременно является наименьшим элементом. При этом каждый простой элемент в M является простым и в M_0.*

Доказательство. Пусть M — y_0-группоид, в котором отсутствует нулевой элемент операции умножения. Тогда для $z = 0$ в M_0 имеем:

(I) если $a \le b$, то $z = a \cdot z \le b \cdot z = z$;

(II) из $z \le a$ имеем $z = b \cdot z \le b \cdot a$, $z = z \cdot b \le a \cdot b$.

Это показывает, что множество M_0 является y_0-группоидом. Причем, если M является полуцелостным y_0-группоидом, то M_0 также является полуцелостным y_0-группоидом.

Пусть M является l-группоидом без нулевого элемента. Тогда имеем

$$0 = 0 \cdot (b \vee a) = 0 \cdot b \vee 0 \cdot a = 0,$$

$$0 = (b \vee a) \cdot 0 = b \cdot 0 \vee a \cdot 0 = 0,$$

$$a \cdot b = a \cdot (0 \vee b) = a \cdot 0 \vee a \cdot b = a \cdot b,$$

$$b \cdot a = (0 \vee b) \cdot a = 0 \cdot a \vee b \cdot a = b \cdot a.$$

Это показывает, что M_0 также является l-группоидом. Предложение доказано.

Пусть M является полуцелостным y_0-группоидом без единицы для операции умножения. Присоединим к M элемент w и положим

$$a \cdot w = w \cdot a = a,\ w \cdot a \le w$$

для любого $a \in M$.

Предложение 2. *Если M является полуцелостным y_0-группоидом (l-группоидом) без единичного элемента для операции умножения, то M_1 является целостным y_0-группоидом (l-группоидом). При этом каждый простой элемент в M является простым и в M_1 .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть M полуцелостный y_0-группоид без единицы для операции умножения. Тогда для M_1 имеем:

(I) если $a \le b$, то $a = w \cdot a \le w \cdot b = b$;

(II) из $a \le w$ имеем $a \cdot x \le w \cdot x = x$ (в силу полуцелостности M).

Это показывает, что множество $M_1 = M \cup \{w\}$ является целостным y_0-группоидом. Пусть M является полуцелостным l-группоидом. Тогда для элементов из M_1 имеем

$$a \vee b = w \cdot (a \vee b) = w \cdot a \vee w \cdot b = a \vee b\,,$$

$$a \vee b = (a \vee b) \cdot w = a \cdot w \vee b \cdot w = a \vee b\,,$$

$$a = a \cdot (w \vee b) = a \cdot w \vee a \cdot b = a\,,$$

$$a = (w \vee b) \cdot a = w \cdot a \vee b \cdot a = a\,.$$

Это показывает, что M_1 является целостным l-группоидом. Предложение доказано.

Определение 7 ([1, гл. XIV, § 5]). *y_0-группоид L называется полным l-группоидом, если L как решетка является полной и в нем выполнены бесконечные дистрибутивные законы*

$$a \cdot \Big(\bigvee_{\tau \in T} b_\tau\Big) = \bigvee_{\tau \in T} (a \cdot b_\tau),$$

$$\Big(\bigvee_{\tau \in T} b_\tau\Big) \cdot a = \bigvee_{\tau \in T} (b_\tau \cdot a)$$

для систем элементов a, $b_\tau \in L$, $\tau \in T$.

Теорема. *Всякий полуцелостный l-группоид M может быть вложен в полный целостный l-группоид M'. При этом вложение может быть выбрано таким, что образы простых элементов в M будут простыми и в M'.*

Доказательство. Пусть M является полуцелостным l-группоидом. В силу предложения 1 M можно вложить в полуцелостный l-группоид M_0 с нулевым элементом. При этом каждый простой элемент в M является простым и в M_0. В силу предложения 2 M_0 можно вложить в целостный l-группоид M_{01}, причем простые элементы в M_0 будут простыми и в M_{01}.

Поэтому образы простых элементов в M будут простыми и в M_{01}. Через $I(M_{01})$ обозначим множество всех идеалов в M_{01}, как решетки. В $I(M_{01})$ введем частичный порядок по включению. Как известно ([6, гл. I, § 3, лемма 4]), $I(M_{01})$ является полной решеткой.

В $I(M_{01})$ введем операцию умножения следующим образом. Пусть A, B — два идеала в M_{01}. Через $A \cdot B$ обозначим наименьший идеал в M_{01}, содержащий всевозможные произведения $a \cdot b$, где $a \in A$, $b \in B$. Идеал $A \cdot B$ состоит из таких элементов x, что существуют конечные системы элементов $a_1, \ldots, a_n$, $(a_i \in A,\ i = \overline{1,n})$, $b_1, \ldots, b_n$, $(b_i \in B,\ i = \overline{1,n})$ такие, что

$$x \leq a_1 \cdot b_1 \vee a_2 \cdot b_2 \vee \ldots \vee a_n \cdot b_n\,.$$

Ввиду целостности M_{01} для $a_i \in A, b_i \in B$ имеем

$$a_i \cdot b_i \leq a_i, a_i \cdot b_i \leq b_i\,.$$

Это показывает, что для любых элементов A, $B \in I(M_{01})$ имеем $A \cdot B \leq A, A \cdot B \leq B$. Так как M_{01} имеет единицу для операции умножения, то для любого $A \in M_{01}$ имеем $A \leq A \cdot M_{01}$. Поэтому $A \cdot M_{01} = A$. Аналогично $M_{01} \cdot A = A$. Следовательно, $I(M_{01})$ является целостным y_0-группоидом. Определим вложение M_{01} в $I(M_{01})$ следующим образом. Каждому $a \in M_{01}$ поставим в соответствие главный идеал $\{x/x \leq a\}$ в решетке M_{01}. Очевидно, что это — вложение. Тогда композиция вложений M в M_0, M_0 в M_{01}, M_{01}

в $I(M_{01})$ даст нам вложение M в $I(M_{01})$. То, что образы простых элементов в M являются простыми в $I(M_{01})$, следует из предложений 1 и 2. Так как M является полуцелостным l-группоидом, то в силу предложений 1 и 2 M_{01} является целостным l-группоидом. Пусть A, B, C — произвольные элементы в $I(M_{01})$. Тогда имеем

$$A \cdot B \leq A \cdot (B \vee C),$$

$$A \cdot C \leq A \cdot (B \vee C).$$

Отсюда

$$A \cdot B \vee A \cdot C \leq A \cdot (B \vee C).$$

С другой стороны, в силу леммы I ([6, гл. 1, § 3]) $A \cdot (B \vee C)$ состоит из всех таких x, что существуют элементы $a_i \in A$, $b_i \in B$, $c_i \in C$, $i = \overline{1, n}$, и

$$x \leq a_1 \cdot (b_1 \vee c_1) \vee \ldots \vee a_n \cdot (b_n \vee c_n).$$

Так как

$$a_1 \cdot (b_1 \vee c_1) \vee \ldots \vee a_n \cdot (b_n \vee c_n) = (a_1 \cdot b_1 \vee a_1 \cdot c_1) \vee \ldots \vee (a_n \cdot b_n \vee a_n \cdot c_n)$$

$$= (a_1 \cdot b_1 \vee \ldots \vee a_n \cdot b_n) \vee (a_1 \cdot c_1 \vee \ldots \vee a_n \cdot c_n),$$

$$(a_1 \cdot b_1 \vee \ldots \vee a_n \cdot b_n) \in A \cdot B,$$

$$(a_1 \cdot c_1 \vee \ldots \vee a_n \cdot c_n) \in A \cdot C,$$

то получим $A \cdot (B \vee C) \leq A \cdot B \vee A \cdot C$. Следовательно, $A \cdot (B \vee C) = A \cdot B \vee A \cdot C$. Аналогично $(B \vee C) \cdot A = B \cdot A \vee C \cdot A$. Это показывает,что $I(M_{01})$ является l-группоидом. Докажем,что $I(M_{01})$ является полным l-группоидом. Пусть a, b_τ, $\tau \in T$ — произвольные элементы в $I(M_{01})$. Используя свойство изотонности умножения, получаем

$$a \cdot b_\tau \leq a \cdot (\bigvee_{\tau \in T} b_\tau)$$

для всех $\tau \in T$. Отсюда

$$\bigvee_{\tau \in T} (a \cdot b_\tau) \leq a \cdot (\bigvee_{\tau \in T} b_\tau).$$

Докажем противоположное неравенство. Пусть x — произвольный элемент идеала $a \cdot (\bigvee_{\tau \in T} b_\tau)$. Это означает, что существует конечное число элементов

$a_i \in a$, $\beta_i \in (\bigvee_{\tau \in T} b_\tau)$, $i = \overline{1, n} : x \leq \alpha_1 \beta_1 \vee \ldots \vee \alpha_n \beta_n$.

Далее, для каждого β_i существует конечное число элементов $\underline{b_{i1}, \ldots, b_{im_i}}$ и элементы $\beta_{ij} \in b_{ij}$, $j = 1, 2, \ldots, m_i$, что $\beta_i \leq \beta_{i1} \vee \ldots \vee b_{im_i}$, $i = \overline{1, n}$.

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} x &\leq \alpha_1(\beta_{11} \vee \ldots \vee \beta_{1m_1}) \vee \ldots \vee \alpha_n(\beta_{n1} \vee \ldots \vee \beta_{nm_n}) \\ &= \alpha_1 \cdot \beta_{11} \vee \ldots \vee \alpha_1 \cdot \beta_{1m_1} \vee \ldots \vee \alpha_n \cdot \beta_{n1} \vee \ldots \vee \alpha_n \cdot \beta_{nm_n}. \end{aligned}$$

Это означает, что элемент x принадлежит элементу

$$a \cdot b_{11} \vee \ldots \vee a \cdot b_{1m_1} \vee \ldots \vee a \cdot b_{n1} \vee \ldots \vee a \cdot b_{nm_n}.$$

Последний элемент содержится в $\bigvee_{\tau \in T}(a \cdot b_\tau)$. Следовательно, каждый элемент x из $a \cdot (\bigvee_{\tau \in T} b_\tau)$ содержится в $\bigvee_{\tau \in T}(a \cdot b_\tau)$. Это доказывает равенство $a \cdot (\bigvee_{\tau \in T} b_\tau) = \bigvee_{\tau \in T}(a \cdot b_\tau)$. Теорема доказана.

Список литературы

[1] *Г. Биркгоф*, Теория решеток. Наука, Москва (1984).

[2] *О.В. Мельников, В.Н. Ремесленников, В.А. Романьков, Л.Н. Скорняков, И.П. Шестаков*, Общая алгебра. Т. 1. Наука, Москва (1990).

[3] *J.A. Johnson and J.S. Rankin*, Semigroups and lattices. — *Semigroup Forum* (1980), v. 20, No. 4, p. 385–386.

[4] *G. Gratzer and C.R. Platt*, Two embedding theorems for lattices. — *Proc. Amer. Math. Soc.* (1978), v. 69, No. 1, p. 21–24.

[5] *Т.М. Шамилев*, О вложении полуцелостных l-группоидов в полные l-группоиды. — Деп. в УзНИИНТИ 27.12.94, № 2298-Уз94.

[6] *Дж. Гретцер*, Общая теория решеток. Мир, Москва (1982).

The theorem of monomorphism of semi-integral l-groupoids into complete integral l-groupoids

T.M. Shamilev

The present article deals with the theorem of monomorphism of semi-integral l-groupoid into complete integral l-groupoid which (the theorem) has been given in the article [5] without proof. In this article the theorem is proved.

Теорема про вкладення напівцілих l-групоїдів в повні цілісні l-групоїди

Т.М. Шамілєв

Доведено теорему про можливість вкладення напівцілого l-групоїда в повний цілісний l-групоїд, яка раніше була приведена в роботі [5] без доказу.