Математическая физика, анализ, геометрия
2001, т. 8, № 4, с. 419–439

Формула конечных приращений для отображений в индуктивные шкалы пространств

И.В. Орлов

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
ул. Ялтинская, 4, Симферополь, 95007, Украина
E-mail:old@tnu.crimea.ua

Статья поступила в редакцию 2 июля 2000 г.
Представлена Е.Я. Хрусловым

Формула Лагранжа с замкнутой выпуклой оценкой перенесена на дифференцируемые отображения в линейные шкалы и однородно дифференцируемые отображения в нелинейные шкалы локально выпуклых пространств. Для отображений в общие индуктивные шкалы получен ослабленный вариант формулы с функционально отделимой выпуклой оценкой. Рассмотрены обобщения и приложения. ·

0. Введение. Предварительные сведения

Хорошо известная формула Лагранжа ([1]) для отображений отрезка в локально выпуклое пространство (ЛВП): $F(b) - F(a) \in [g(b) - g(a)] \cdot B$ (при локальной оценке $F'(t) \in g'(t) \cdot B$, где B замкнуто и выпукло) служит, как и ее классический прототип, фундаментом дифференциального исчисления как в банаховых, так и в более общих классах пространств ([2–5]). Целью настоящей работы является перенос формулы Лагранжа на отображения в индуктивные шкалы топологических векторных пространств (ТВП), находящие все более широкие применения в последние десятилетия ([6, 7]).

Начиная со скалярного случая (раздел 1), рассмотрена обобщенная формула конечных приращений с более точной, чем классическая, интегральной оценкой. На этой базе для отображений в ЛВП в разделе 2 получена обобщенная формула Лагранжа с замкнутой выпуклой оценкой. Для отображений в ТВП получена более слабая функционально отделимая оценка.

· Mathematics Subject Classification 2000: 26A24, 26E20 (primary); 46A22 (secondary).

Эти результаты перенесены на отображения в индуктивные шкалы пространств в разделе 3. Базой для получения замкнутой выпуклой оценки в случае линейных шкал ЛВП служит обобщение на такие шкалы теоремы Хана–Банаха [8]. В случае нелинейных шкал ЛВП замкнутая оценка сохраняется для более узкого класса однородно дифференцируемых отображений. В общем случае верна функционально отделимая оценка.

В заключительном разделе 4 рассмотрены некоторые приложения: обобщенные теоремы о среднем и обобщенная формула Тейлора для отображений в индуктивные шкалы пространств.

Для простоты мы рассматриваем только внутренние индуктивные шкалы пространств (с тождественными вложениями); переход к общему случаю не представляет труда (см. п. 3.4).

Определение 0.1. *Система топологических векторных пространств (ТВП) $\overrightarrow{E} = \{E_i\}_{i \in I}$, индуктивно упорядоченная по непрерывному вложению $(i_1 \preccurlyeq i_2) \Rightarrow (E_{i_1} \underset{\rightarrow}{\subseteq} E_{i_2})$, называется индуктивной шкалой ТВП. Сходимость в шкале есть сходимость хотя бы в одном из пространств шкалы. Шкала $\overrightarrow{E}$ линейна, если порядок в I линеен. Две шкалы эквивалентны, если каждое пространство одной шкалы непрерывно вложено в некоторое пространство другой шкалы, и обратно. Всюду далее шкалы ТВП рассматриваются с точностью до эквивалентности. Носитель шкалы $E = |\overrightarrow{E}|$ есть объединение всех пространств шкалы.*

Определение 0.2. *Система $\overrightarrow{A} = \{A_i \subset E_i\}_{i \in I}$ подмножеств индуктивной шкалы ТВП $\overrightarrow{E}$ называется индуктивной шкалой подмножеств, если $(i_1 \preccurlyeq i_2) \Rightarrow (A_{i_2} \cap E_{i_1} = A_{i_1})$. Операции и отношения над шкалами подмножеств определяются покоординатно; в частности, $x \in \overrightarrow{A} \Leftrightarrow x \in A_i$, $i \succcurlyeq i_0$.*

Определение 0.3. *Система линейных непрерывных функционалов $\overrightarrow{l} = \{l_i \in E_i^*\}_{i \in I}$ называется функциональной шкалой на $\overrightarrow{E}$, если $(i_1 \preccurlyeq i_2) \Rightarrow (l_{i_2}|_{E_{i_1}} = l_{i_1})$. Образом шкалы подмножеств $\overrightarrow{A}$ относительно функциональной шкалы $\overrightarrow{l}$ называется множество $\overrightarrow{l}(\overrightarrow{A}) := \underset{i \in I}{U} l_i(A_i)$. В частности, $\overrightarrow{l}(x_0) = l_i(x_0)$ при любом $i \in I$, для которого $x_0 \in E_i$.*

На линейные шкалы ТВП, как показано в [8], распространяется теорема Хана–Банаха. В дальнейшем будут применяться два следствия из этой теоремы.

Предложение 0.4. *Если $\overrightarrow{E}$ — линейная шкала вещественных ЛВП, $\overrightarrow{B}$ — шкала выпуклых замкнутых подмножеств в $\overrightarrow{E}$, $x_0 \notin \overrightarrow{B}$, то на $\overrightarrow{E}$ найдется такая функциональная шкала $\overrightarrow{l}$, что $\overrightarrow{l}(x_0) > \sup \overrightarrow{l}(\overrightarrow{A})$.*

Предложение 0.5. *Если $\overrightarrow{E} = \{E_i\}_{i\in I}$ — линейная шкала ЛВП, то любой $l_i \in E_i^*$ можно продолжить до функциональной шкалы $\overrightarrow{l}$ на $\overrightarrow{E}$.*

Отметим, что на нелинейные шкалы ЛВП эти результаты не распространяются (см. пример шкалы сходимости почти всюду в [9]).

Определение 0.6. *В соответствии с определением 0.1, назовем отображение $F : [a; b] \to \overrightarrow{E}$ непрерывным в точке $t \in [a; b]$, если*

$$(\Delta t \to 0) \Rightarrow (\exists\, i_0 \in I\ \forall\, i \succcurlyeq i_0 : \Delta F(t) \to 0 \ \text{ в } E_i),$$

и дифференцируемым в точке t, если

$$(\Delta t \to 0) \Rightarrow (\exists\, i_0 \in I\ \forall\, i \succcurlyeq i_0 : (\Delta F/\Delta t) \to F'(t) \ \text{ в } E_i).$$

1. Классическая и обобщенная формула конечных приращений для скалярных функций

Всюду далее μ^* и μ — соответственно внешняя мера и мера Лебега в $\mathbb{R}$.

Лемма 1.1. *Если f — вещественная непрерывная функция на $\mathbb{R}$, то для любого ограниченного $D \subset \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое дизъюнктное покрытие $\bigcup\limits_j (A_j; B_j) \supset D$, что*

$$\sum_j |f(B_j) - f(A_j)| < \mu^* f(D) + \varepsilon. \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем такое дизъюнктное покрытие $\bigcup\limits_n (\alpha_n, \beta_n) \supset f(D)$, чтобы $\sum\limits_n (\beta_n - \alpha_n) < \mu^* f(D) + \varepsilon$. Так как D ограничено, то составляющие интервалы в разложениях $f^{-1}((\alpha_n; \beta_n)) = \bigcup\limits_k (a_{nk}; b_{nk})$ также можно считать ограниченными. Построим теперь интервалы $(A_j; B_j)$ по индукции.

Пусть $a_1 = \inf\limits_k a_{1k}$, $b_1 = \sup\limits_k b_{1k}$. Если при $i < n$ интервалы $(a_i; b_i)$ уже построены, то положим

$$a_n = \inf_k \{a_{nk} |\, (a_{nk}; b_{nk}) \cap (a_i; b_i) = \varnothing \quad \text{при} \quad 1 \le i \le n-1\},$$
$$b_n = \sup_k \{b_{nk} |\, (a_{nk}; b_{nk}) \cap (a_i; b_i) = \varnothing \quad \text{при} \quad 1 \le i \le n-1\}.$$

Легко видеть, что при $i < j$ либо $(a_i; b_i) \subset (a_j; b_j)$, либо эти интервалы дизъюнктны; кроме того,

$$\bigcup_n (a_n; b_n) \supset f^{-1}(\bigcup_n (\alpha_n; \beta_n)) \supset D.$$

Разобьем последовательность $\{(a_n; b_n)\}$ на возрастающие подпоследовательности $\{(a_{j_m}; b_{j_m})\}$ и положим

$$(A_j; B_j) = \underset{m}{U}(a_{j_m}, b_{j_m}), \quad \text{т.е.} \quad A_j = \inf_m a_{j_m}, \quad B_j = \sup_m b_{j_m}.$$

Тогда $(A_j; B_j)$ дизъюнктны и $\underset{j}{U}(A_j; B_j) = \underset{n}{U}(a_n; b_n) \supset D$; при этом для каждого j и $\delta_j > 0$ найдутся такие n^j, k_1^j и k_2^j, что $A_j \le a_{n^j k_1^j} < A_j + \delta_j$, $B_j - \delta_j < b_{n^j k_2^j} \le B_j$. Подберем такие $\delta_j > 0$, чтобы

$$|f(B_j) - f(A_j)| < |f(b_{n^j k_2^j}) - f(a_{n^j k_1^j})| + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}.$$

Так как по построению $f(a_{n^j k_1^j}) \in [\alpha_{n^j}; \beta_{n^j}])$, $f(b_{n^j k_2^j}) \in [\alpha_{n^j}; \beta_{n^j}])$, то отсюда

$$\sum_j |f(B_j) - f(A_j)| < \sum_j (\beta_{n^j} - \alpha_{n^j}) + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} < \mu^* f(D) + \varepsilon.$$

■

Теорема 1.2. *Если f непрерывна на $[a; b]$ и дифференцируема в каждой точке множества $[a; b]\backslash e$, где множество $e \subset [a; b]$ измеримо, причем $f'(t) \le \varphi(t)$, где φ неотрицательна и измерима на $[a; b]\backslash e$, то*

$$f(b) - f(a) \le \int\limits_{[a;b]\backslash e} \varphi(t)\, dt + \mu^* f(e). \tag{2}$$

Доказательство. Отметим вначале, что интеграл в оценке (2) может быть и бесконечным. Однако в этом случае неравенство (2) очевидно; поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что $\varphi(t)$ суммируема на $[a; b]\backslash e$.

1. Фиксируем ε и выберем покрытие множества e, удовлетворяющее (1). Пусть $K = [a; b]\backslash \underset{j}{U}(A_j; B_j)$. Положим $e_{nk} = \{t \in [a; b]\backslash e | \frac{k}{n} \le \varphi(t) < \frac{k+1}{n}\}$, $n = 1, 2, \ldots$; $k = 0, 1, 2, \ldots$, и подберем $N(\varepsilon)$, чтобы

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{N} \mu(e_{Nk}) < \int\limits_{[a;b]\backslash e} \varphi(t)\, dt + \varepsilon. \tag{3}$$

Выберем такие окрестности u_{Nk} ячеек e_{Nk}, чтобы

$$\mu(u_{Nk}\backslash e_{Nk}) < \frac{\varepsilon}{(k+1) \cdot 2^k}. \tag{4}$$

Далее, для каждого $t \in K$ найдем такое $\delta(\varepsilon, t) > 0$, чтобы $(t-\delta; t+\delta) \subset u_{Nk}$ и при $0 < h < \delta$:

$$\pm\Delta f(t, \pm h) < (f'(t) + \varepsilon) \cdot h \leq (\varphi(t) + \varepsilon) \cdot h. \tag{5}$$

Выберем из покрытия $\{(t-\delta; t+\delta)\}_{t \in K}$ конечное покрытие K:

$$V = (t_1 - \delta_1; t_1 + \delta_1) \cup \ldots \cup (t_p - \delta_p; t_p + \delta_p); \quad (t_1 < \ldots < t_p).$$

Пусть $V_i = (v_i^1; v_i^2)$ — составляющие интервалы V, $1 \leq i \leq q$; их концы содержатся внутри $(A_j; B_j)$. Используя (1), можно считать, что

$$\sum_{i=0}^{q} [f(v_{i+1}^1) - f(v_i^2)] < \mu^* f(e) + \varepsilon. \tag{6}$$

2. Так как

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{q} [f(v_i^2) - f(v_i^1)] + \sum_{i=0}^{q} [f(v_{i+1}^1) - f(v_i^2)] \tag{7}$$

(где $v_0^2 = a$, $v_{q+1}^1 = b$), то остается оценить первую сумму в (7). Проведем выкладку для первого члена суммы. Пусть $V_1 = \bigcup\limits_{l=1}^{s} (t_l - \delta_l; t_l + \delta_l)$. Выберем $\xi_l \in (t_l; t_{l+1})$, чтобы $\xi_l - t_l < \delta_l$, $t_{l+1} - \xi_l < \delta_{l+1}$; $\xi_0 = v_1^1$, $\xi_{s+1} = v_1^2$. Подставляя в (5) соответственно $t = t_l$, $h = \xi_l - t_l$ и $t = t_{l+1}$, $h = t_{l+1} - \xi_l$, и суммируя по $l = \overline{1, s}$, находим

$$f(v_1^2) - f(v_1^1) \leq \sum_{r=1}^{2s} \varphi(\eta_r) \Delta t_r + \varepsilon \cdot \mu V_1, \tag{8}$$

где Δt_r — длины, а η_r — правые либо левые концы (в зависимости от четности r) участков разбиения $v_1^1 = \xi_0 < t_1 < \xi_1 < \ldots < t_s < \xi_{s+1} = v_1^2$. Суммируя неравенства типа (8), получим

$$\sum_{i=1}^{q} [f(v_i^2) - f(v_i^1)] \leq \sum_{r=1}^{2p} \varphi(\eta_r) \Delta t_r + \varepsilon \cdot \mu V. \tag{9}$$

Теперь из (4) и (3) следует

$$\sum_{r=1}^{2p} \varphi(\eta_r) \Delta t_r = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\eta_r \in e_{Nk}} \varphi(\eta_r) \Delta t_r < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{N} \sum_{\eta_r \in e_{Nk}} \Delta t_r$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{N} \mu(u_{Nk}) < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{N} (\mu(e_{Nk}) + \frac{\varepsilon}{(k+1) \cdot 2^k})$$

$$< \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{N} \mu(e_{Nk}) + \frac{2\varepsilon}{N} < \int\limits_{[a;b]\backslash e} \varphi(t)\, dt + (1 + \frac{2}{N})\varepsilon.$$

Подставляя последнюю оценку в (9), находим

$$\sum_{i=1}^{q} [f(v_i^2) - f(v_i^1)] < \int\limits_{[a;b]\backslash e} \varphi(t)\, dt + [1 + \frac{2}{N} + (b-a)] \cdot \varepsilon \qquad (10)$$

Наконец, из (6), (10) и (7) следует

$$f(b) - f(a) < \int\limits_{[a;b]\backslash e} \varphi(t)\, dt + \mu^* f(e) + [2 + \frac{2}{N} + (b-a)] \cdot \varepsilon,$$

откуда при $\varepsilon \to 0$ получаем (2). ■

Следствие 1.3. *Если, в условиях теоремы 1.2, множество $f(e)$ измеримо и $\mu f(e) = 0$, то*

$$f(b) - f(a) \leq \int\limits_{[a;b]\backslash e} \varphi(t)\, dt. \qquad (11)$$

Отметим, что последняя оценка (11) послужит основой для переноса обобщенной формулы конечных приращений на отображения в ТВП и шкалы ТВП. Классическую оценку легко получить из (11) даже при более общих предположениях, чем в [1].

Следствие 1.4. *Если f и g непрерывны на $[a;b]$ и дифференцируемы на $[a;b]\backslash e$, где множества $e \subset [a;b]$, $f(e)$ и $g(e)$ измеримы, причем $f'(t) \leq g'(t)$ на $[a;b]\backslash e$, g возрастает на $[a;b]$, $\mu(e) = \mu f(e) = \mu g(e) = 0$, то $f(b) - f(a) \leq g(b) - g(a)$.*

Для доказательства достаточно подставить в (11) $\varphi(t) = g'(t)$ и учесть абсолютную непрерывность g.

В дальнейшем именно общая оценка (11) с соответствующими изменениями будет переноситься на отображения отрезка в ТВП (ЛВП) и шкалы ТВП (ЛВП).

2. Формула конечных приращений для отображений в ТВП

2.1. Замкнутая выпуклая оценка для отображений в ЛВП. Напомним вначале, что в соответствии с общим определением скалярных свойств отображений в вещественное ЛВП ([10, гл. VI, § 1), при отображении $F : [a;b] \to E$ и $e \subset [a;b]$ множество $F(e)$ имеет *скалярную меру нуль в* E, если $\mu l(F(e)) = 0$ для всякого $l \in E^*$. Отметим, что при этом в E не задано никакой меры.

Теорема 2.1. *Пусть E — отделимое вещественное ЛВП, B — замкнутое выпуклое подмножество E. Если отображение $F : [a;b] \to E$ непрерывно на $[a;b]$ и дифференцируемо на $[a;b]\backslash e$, где множество $e \subset [a;b]$ измеримо, причем $F'(t) \in \varphi(t) \cdot B$, где φ неотрицательна и суммируема на $[a;b]\backslash e$, и множество $F(e)$ имеет скалярную меру нуль в E ([10]), то*

$$F(b) - F(a) \in \int\limits_{[a;b]\backslash e} \varphi(t)\, dt \cdot B. \tag{12}$$

Доказательство. Проведем доказательство по стандартной схеме ([1]), использующей следствие из теоремы Хана–Банаха ([11]) о функциональной отделимости точки и замкнутого выпуклого множества. Если (12) неверно, то найдется такой линейный непрерывный функционал $l \in E^*$, что

$$l(F(b) - F(a)) > \sup l(\int\limits_{[a;b]\backslash e} \varphi(t)\, dt \cdot B) = \int\limits_{[a;b]\backslash e} \varphi(t)\, dt \cdot \sup l(B). \tag{13}$$

Пусть $d = \sup l(B)$ (можно считать $d \geq 0$), $f = l(F)$, $\tilde{\varphi} = d \cdot \varphi$. Тогда из условий теоремы следует

$$f'(t) \in l(\varphi(t) \cdot B) = \varphi(t) \cdot l(B) \leq \tilde{\varphi}(t);$$

$$\mu f(e) = \mu l(F(e)) = 0.$$

Это позволяет применить к функциям f и $\tilde{\varphi}$ оценку (11):

$$f(b) - f(a) = l(F(b) - F(a)) \leq \int\limits_{[a;b]\backslash e} \tilde{\varphi}(t)\, dt = \int\limits_{[a;b]\backslash e} \varphi(t)\, dt \cdot \sup l(B),$$

что противоречит (13). ■

Классическая формула Лагранжа в ЛВП легко следует из (12), причем счетность "исключительного множества" e не обязательна.

Следствие 2.2. *Если, в условиях теоремы 2.1, $F'(t) \in g'(t) \cdot B$, где g возрастает, непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $[a;b]\backslash e$, причем множество $g(e)$ измеримо и $\mu(e) = \mu g(e) = 0$, то*

$$F(b) - F(a) \in [g(b) - g(a)] \cdot B. \tag{14}$$

Доказательство. Здесь, как и в следствии 1.5, ввиду абсолютной непрерывности g,

$$\int\limits_{[a;b]\backslash e} g'(t)\,dt = g(b) - g(a).$$

■

Отметим, что оценку (14) можно вывести из следствия 1.4 непосредственно, тем же методом, что и в доказательстве теоремы 2.1.

2.2. Функционально отделимая выпуклая оценка для отображений в ТВП. На случай ТВП вышеупомянутое следствие из теоремы Хана–Банаха не распространяется, поэтому формула Лагранжа обычно рассматривается только в рамках ЛВП, что сужает область применений бесконечномерного анализа.

Мы используем здесь известную функциональную характеристику замкнутых выпуклых множеств в отделимом ЛВП, чтобы получить аналоги оценок (12), (14) для отображений в произвольное ТВП.

Определение 2.3. *Назовем выпуклое множество A в вещественном ТВП E (строго) функционально отделимым, если*

$$A = \bigcap_{l \in E^*} l^{-1}(\overline{l(A)}). \tag{15}$$

Как уже сказано выше, в отделимом ЛВП условие (15) для выпуклых множеств равносильно замкнутой выпуклости. Однако в общем случае функциональная отделимость — более сильное свойство, чем замкнутость; достаточно рассмотреть ТВП с нулевым сопряженным. Поэтому реально следующие результаты полезны в ТВП с достаточно большим запасом линейных непрерывных функционалов.

Теорема 2.4. *Пусть E — вещественное ТВП, A — функционально отделимое выпуклое подмножество E. Если отображение $F : [a;b] \to E$ непрерывно на $[a;b]$ и дифференцируемо на $[a;b]\backslash e$, где множество $e \subset [a;b]$ измеримо, причем $F'(t) \in \varphi(t) \cdot A$, где φ неотрицательна и суммируема на $[a;b]\backslash e$, и множество $F(e)$ имеет скалярную меру нуль в E (см. п. 2.1), то*

$$F(b) - F(a) \in \int\limits_{[a;b]\backslash e} \varphi(t)\,dt \cdot A. \tag{16}$$

Доказательство. Схема вывода оценки (16) аналогична схеме вывода оценки (12) в теореме 2.1 с той разницей, что вместо неприменимого теперь следствия из теоремы Хана–Банаха мы "напрямую" используем свойство строгой функциональной отделимости (15). При рассуждении от противного это приводит к неравенству

$$l(F(b)-F(a)) > \int\limits_{[a;b]\setminus e} \varphi(t)\,dt \cdot \sup l(A),$$

аналогичному (13). ■

Заключительный результат пункта аналогичен следствию 2.2.

Следствие 2.5. *Если, в условиях теоремы 2.4, $F'(t) \in g'(t) \cdot A$, где g возрастает, непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $[a;b]\setminus e$, причем множество $g(e)$ измеримо и $\mu(e) = \mu g(e) = 0$, то*

$$F(b) - F(a) \in [g(b) - g(a)] \cdot A.$$

3. Формула Лагранжа для отображений в шкалы ТВП

3.1. Замкнутая выпуклая оценка для отображений в линейные шкалы ЛВП. Основой для переноса оценки (12) на отображения в линейные шкалы ЛВП служит следствие 0.4 из теоремы Хана–Банаха для таких шкал.

Далее мы будем говорить, что при отображении $F : [a;b] \to \overrightarrow{E}$ и $e \subset [a;b]$ шкала $F(e)$ подмножеств $\overrightarrow{E}$ имеет *скалярную меру нуль в* $\overrightarrow{E}$, если $\mu \overrightarrow{l}(F(e)) = 0$ для всякой функциональной шкалы $\overrightarrow{l} \in \overrightarrow{E}^*$. Отметим, что при этом в пространствах шкалы $\overrightarrow{E}$ не заданы никакие меры.

Теорема 3.1. *Пусть $\overrightarrow{E}$ — линейная шкала отделимых вещественных ЛВП, $\overrightarrow{B}$ — шкала замкнутых выпуклых подмножеств $\overrightarrow{E}$. Если отображение $F : [a;b] \to \overrightarrow{E}$ непрерывно на $[a;b]$ и дифференцируемо на $[a;b]\setminus e$, где множество $e \subset [a;b]$ измеримо, причем $F'(t) \in \varphi(t) \cdot \overrightarrow{B}$, где φ неотрицательна и суммируема на $[a;b]\setminus e$, и шкала $F(e)$ подмножеств $\overrightarrow{E}$ имеет скалярную меру нуль в $\overrightarrow{E}$, то*

$$F(b) - F(a) \in \int\limits_{[a;b]\setminus e} \varphi(t)\,dt \cdot \overrightarrow{B}. \tag{17}$$

Доказательство. Если (17) неверно, то, в силу предложения 0.4, найдется такая функциональная шкала $\overrightarrow{l} \in \overrightarrow{E}^*$, что

$$\overrightarrow{l}(F(b)-F(a)) > \sup \overrightarrow{l}\Big(\int\limits_{[a;b]\setminus e} \varphi(t)\,dt \cdot \overrightarrow{B}\Big) = \int\limits_{[a;b]\setminus e} \varphi(t)\,dt \cdot \sup \overrightarrow{l}(\overrightarrow{B}).$$

Далее повторяется доказательство теоремы 2.1 при $d = \sup \overrightarrow{l}(\overrightarrow{B})$, $f = \overrightarrow{l}(F)$, $\tilde{\varphi} = d \cdot \varphi$. ■

Следствие 3.2. *Если, в условиях теоремы 3.1, $F'(t) \in g'(t) \cdot \overrightarrow{B}$, где g возрастает, непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $[a;b] \backslash e$, причем множество $g(e)$ измеримо и $\mu(e) = \mu g(e) = 0$, то*

$$F(b) - F(a) \in [g(b) - g(a)] \cdot \overrightarrow{B}.$$

Вывод аналогичен 1.5 и 2.2.

3.2. Функционально отделимая выпуклая оценка для отображений в индуктивные шкалы ТВП. Перенесем определение 2.3 на шкалы ТВП.

Определение 3.3. *Пусть $\overrightarrow{E} = \{E_i\}_{i \in I}$ — индуктивная шкала вещественных ТВП, $\overrightarrow{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ — шкала выпуклых подмножеств $\overrightarrow{E}$. Назовем шкалу $\overrightarrow{A}$ (строго) функционально отделимой в $\overrightarrow{E}$, если*

$$\overrightarrow{A} = \bigcap_{\overrightarrow{l} \in \overrightarrow{E}^*} \overrightarrow{l}^{-1}(\overline{\overrightarrow{l}(\overrightarrow{A})}). \tag{18}$$

Очевидно, что в случае одного ТВП $\overrightarrow{E} = \{E\}$ равенство (18) равносильно (15). Менее очевидно, что в случае линейной шкалы ЛВП для шкалы $\overrightarrow{A}$ выпуклых подмножеств $\overrightarrow{E}$ (18) означает, что $\overrightarrow{A}$ — шкала замкнутых выпуклых подмножеств.

Предложение 3.4. *Если $\overrightarrow{E}$ — линейная шкала отделимых вещественных ЛВП, то шкала $\overrightarrow{A}$ выпуклых подмножеств $\overrightarrow{E}$ функционально отделима тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{A}$ — шкала замкнутых выпуклых подмножеств $\overrightarrow{E}$.*

Доказательство. Если шкала $\overrightarrow{A}$ функционально отделима, то для всякого $i \in I$ из (18) следует

$$A_i \supset \bigcap_{\overrightarrow{l} \in \overrightarrow{E}^*} l_i^{-1}(\overline{l_i(A_i)}). \tag{19}$$

В силу предложения 0.5, любой функционал $l_i \in E_i^*$ можно продолжить до $\overrightarrow{l} \in \overrightarrow{E}^*$. Поэтому из (19) получаем

$$A_i \supset \bigcap_{l_i \in E_i^*} l_i^{-1}(\overline{l_i(A_i)}),$$

откуда A_i функционально отделимо в E_i, а значит, замкнуто в E_i.

Обратно, если $\overrightarrow{A}$ — шкала замкнутых выпуклых подмножеств $\overrightarrow{E}$, то, по предложению 0.4, для любого $x \notin \overrightarrow{A}$ найдется такой $\overrightarrow{l} \in \overrightarrow{E}^*$, что $\overrightarrow{l}(x) > \sup \overrightarrow{l}(\overrightarrow{A})$, что равносильно (18). ■

Таким образом, лишь при выходе за рамки линейных шкал ЛВП функционально отделимая выпуклая оценка в формуле Лагранжа может отличаться от замкнутой выпуклой оценки.

Теорема 3.5. *Пусть $\overrightarrow{E}$ — индуктивная шкала вещественных ТВП, $\overrightarrow{A}$ — функционально отделимая шкала выпуклых подмножеств $\overrightarrow{E}$. Если отображение $F : [a;b] \to \overrightarrow{E}$ непрерывно на $[a;b]$ и дифференцируемо на $[a;b]\backslash e$, где множество $e \subset [a;b]$ измеримо, причем $F'(t) \in \varphi(t) \cdot \overrightarrow{A}$, где φ неотрицательна и суммируема на $[a;b]\backslash e$, и шкала $F(e)$ подмножеств $\overrightarrow{E}$ имеет скалярную меру нуль в $\overrightarrow{E}$, то*

$$F(b) - F(a) \in \int\limits_{[a;b]\backslash e} \varphi(t)\, dt \cdot \overrightarrow{A}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в доказательстве теоремы 2.4, допуская противное, найдем, используя (18), $\overrightarrow{l} \in \overrightarrow{E}^*$, для которого

$$\overrightarrow{l}(F(b) - F(a)) > \int\limits_{[a;b]\backslash e} \varphi(t)\, dt \cdot \sup \overrightarrow{l}(\overrightarrow{A}).$$

Далее следует повторение схемы доказательства теоремы 2.1 для $d = \sup \overrightarrow{l}(\overrightarrow{A})$, $f = \overrightarrow{l}(F)$, $\tilde{\varphi} = d \cdot \varphi$. ■

Заключительный результат этого пункта аналогичен следствиям 1.4, 2.2 и 2.5.

Следствие 3.6. *Если, в условиях теоремы 3.5, $F'(t) \in g'(t) \cdot \overrightarrow{A}$, где g возрастает, непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $[a;b]\backslash e$, причем множество $g(e)$ измеримо и $\mu(e) = \mu g(e) = 0$, то*

$$F(b) - F(a) \in [g(b) - g(a)] \cdot \overrightarrow{A}.$$

3.3. Замкнутая выпуклая оценка для однородно дифференцируемых отображений в индуктивные шкалы ЛВП. Для сохранения замкнутой выпуклой оценки в формуле конечных приращений в случае нелинейных шкал нам понадобится усиление понятия дифференцируемости на множестве ([12, 5]); при этом в случае тривиальной шкалы, состоящей из одного пространства, ситуация сводится к обычной.

Определение 3.7. *Пусть $\overrightarrow{E} = \{E_i\}_{i \in I}$ — индуктивная шкала ТВП, $F : \mathbb{R} \supset D \to \overrightarrow{E}$. Назовем отображение F однородно дифференцируемым (H-дифференцируемым) на D, если F дифференцируемо на D и найдется такой индекс $i_0 \in I$, что для всех $t \in D$:*

$$\frac{\Delta F}{\Delta t}(t) - F'(t) \to 0 \quad \text{в} \quad E_{i_0} \quad (\text{при} \quad \Delta t \to 0). \tag{20}$$

Рассмотрим некоторые примеры как однородно, так и неоднородно дифференцируемых отображений.

П р и м е р 3.8. Пусть $x_k \in E_{i_k}$ $(k=\overline{1,n})$, $f_k : D \to \mathbb{R}$ дифференцируемы на D. Тогда отображение $F(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(t)x_k$ однородно дифференцируемо на D.

Определение 3.9. *Пусть $x_n \in E_{i_n}$ $(n=1,2,\dots)$. Назовем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ однородно сходящимся (H-сходящимся) в $\overrightarrow{E}$, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ сходится в $\overrightarrow{E}$ (т.е., в соответствии с определением 0.1, сходится в некотором пространстве шкалы $\overrightarrow{E}$) для любой ограниченной последовательности $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathbb{R}$, и*

$$(\sup_{n\geq 1}|t_n| \to 0) \Rightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \to 0 \quad \text{в} \quad \overrightarrow{E}). \tag{21}$$

П р и м е р 3.10. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ H-сходится в $\overrightarrow{E}$, последовательность $\{f_n : D \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена на D и равностепенно дифференцируема в каждой точке D, то отображение $F(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t)x_n$ H-дифференцируемо на D.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения H-сходимости и $f_n(t) \leq C$ следует, что $F(t)$ определено на D. Далее, равностепенная дифференцируемость $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ означает, что

$$\sup_{n\geq 1}\left|\frac{\Delta f_n}{\Delta t}(t) - f_n'(t)\right| \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta t \to 0. \tag{22}$$

Из (21) и (22) следует, что при $|\Delta t| \leq \delta$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta f_n}{\Delta t}(t) - f_n'(t)\right)x_n = \frac{\Delta F}{\Delta t}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t)x_n$$

сходится в $\overrightarrow{E}$. Отсюда следует $F'(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(t)x_n$, причем индекс пространства шкалы для стремления к нулю $(\Delta F/\Delta t)(t) - F'(t)$ не зависит от выбора $t \in D$. ■

П р и м е р 3.11. Пусть $\overrightarrow{E} = \{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность нормированных пространств с соответствующей убывающей последовательностью $\{\|\cdot\|_n\}_{n=1}^{\infty}$ попарно неэквивалентных норм (см. [5]). Выберем

$x_n \notin E_{k_n}$, $k_n \to \infty$, и произвольное счетное разбиение $t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \ldots \nearrow T$ отрезка $[t_0; T)$. Положим при $t_{n-1} \le t \le t_n$:

$$F(t) = t^2 \cdot x_n - 2t \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} t_i \Delta x_{i+1} \right) + \left(\sum_{i=0}^{n-1} t_i^2 \Delta x_{i+1} \right); \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Нетрудно проверить, что отображение F однородно дифференцируемо на каждом отрезке $[t_0; t_n]$, но не является однородно дифференцируемым на $[t_0; T)$.

Предлагаемая ниже схема вывода формулы конечных приращений для H-дифференцируемых отображений позволяет получать некоторые новые оценки и для отображений в одно ЛВП.

Теорема 3.12. *Пусть $\overrightarrow{E}$ — индуктивная шкала отделимых вещественных ЛВП, $\overrightarrow{B}$ — шкала замкнутых выпуклых подмножеств $\overrightarrow{E}$. Если отображение $F : [a; b] \to \overrightarrow{E}$ H-дифференцируемо на $[a; b]$, причем $F'(t) \in g'(t) \cdot \overrightarrow{B}$, где g возрастает и дифференцируема на $[a; b]$, то*

$$F(b) - F(a) \in [g(b) - g(a)] \cdot \overrightarrow{B}. \tag{23}$$

Доказательство. Выбрав индекс $i_0 \in I$, отвечающий условию (20), $\varepsilon > 0$ и абсолютно выпуклую окрестность нуля U_{i_0} в E_{i_0}, найдем для каждого $t \in [a; b]$ такое $\delta_t > 0$, чтобы

$$\left| \frac{1}{S} - \frac{1}{g(b) - g(a)} \right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad \lambda < \delta_t; \ (S = \sum_{k=1}^{n} g'(\xi_k) \Delta t_k); \tag{24}$$

$$\frac{\Delta F}{\Delta t}(t) - F'(t) \in U_{i_0} \quad \text{при} \quad |\Delta t| < \delta_t \,, \tag{25}$$

где λ — шаг разбиения $[a; b]$, связанного с S.

Из покрытия $\{(t - \delta_t; t + \delta_t)\}_{t \in [a;b]}$ выберем конечное и впишем в него разбиение $a = t_0 < \ldots < t_n = b$; пусть ξ_k $(k = \overline{1, n})$ — один из концов отрезка $[t_{k-1}; t_k]$. Тогда из (25) следует $(\Delta F(t_k)/\Delta t_k) \in F'(\xi_k) + U_{i_0}$, откуда $\Delta F(t_k) \in (F'(\xi_k) + U_{i_0}) \cdot \Delta t_k$ и, в силу условия теоремы,

$$\Delta F(t_k) \in [g'(\xi_k) \cdot \overrightarrow{B} + U_{i_0}] \cdot t_k; \quad (k = \overline{1, n}). \tag{26}$$

Суммируя (26) с учетом выпуклости $\overrightarrow{B}$ и U_{i_0}, получаем

$$F(b) - F(a) \in S \cdot \overrightarrow{B} + (b - a) \cdot U_{i_0}.$$

Отсюда $F(b) - F(a) \in S \cdot B_{i_1} + (b - a) \cdot U_{i_1}$, где можно считать U_{i_1} произвольной абсолютно выпуклой окрестностью нуля в E_{i_1}, $i_0 \preccurlyeq i_1 \in I$. Следовательно,

$$\frac{1}{S}(F(b) - F(a)) \in B_{i_1} + \frac{b - a}{S} U_{i_1}. \tag{27}$$

Из (24) и (27) вытекает, что $\forall\,\varepsilon > 0$ следующие два множества пересекаются:

$$\left(\left(\frac{1}{g(b)-g(a)}-\varepsilon;\frac{1}{g(b)-g(a)}+\varepsilon\right)\cdot(F(b)-F(a))\right) \bigcap\left(B_{i_1}+\left(\frac{b-a}{g(b)-g(a)}-\varepsilon;\frac{b-a}{g(b)-g(a)}+\varepsilon\right)\cdot U_{i_1}\right)\neq\varnothing.$$

Отсюда следует, что при любом $\varepsilon > 0$:

$$\frac{F(b)-F(a)}{g(b)-g(a)}\bigcap\left(B_{i_1}+\left(\frac{b-a}{g(b)-g(a)}-\varepsilon;\frac{b-a}{g(b)-g(a)}+\varepsilon\right)\cdot U_{i_1}\right)\neq\varnothing,$$

т.е. $(F(b)-F(a)/g(b)-g(a))$ — предельная точка записанного выше множества. Так как E_{i_1} — отделимое ЛВП, то $(F(b)-F(a)/g(b)-g(a))$ — предельная точка B_{i_1} (см. [11]), т.е. $(F(b)-F(a)/g(b)-g(a))\in B_{i_1}$. ■

Следствие 3.13. *Результат теоремы 3.12 остается в силе, если оценка $F'(t)\in g'(t)\cdot\overrightarrow{B}$ выполнена на $[a;b]$ всюду, кроме конечного числа точек $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, и F локально H-дифференцируемо на каждом из интервалов $(x_{i-1};x_i)$, $i=\overline{1,n}$.*

Для доказательства достаточно применить (23) на отрезках $[x_{i-1}-\delta;x_i+\delta]$, перейти к пределу при $\delta\to 0$ и просуммировать оценки.

Следствие 3.14. *Результат теоремы 3.12 остается в силе, если $\overrightarrow{B}$ — шкала замкнутых аффинных подпространств $\overrightarrow{E}$, g — дифференцируемая на $[a;b]$ функция ограниченной вариации.*

Действительно, т.к. g абсолютно непрерывна, то оценка (24) в доказательстве теоремы остается в силе. При этом неотрицательность g' уже не требуется при суммировании оценок (26), если $\overrightarrow{B}$ — шкала замкнутых аффинных подпространств $\overrightarrow{E}$.

3.4. Формула Лагранжа в общих индуктивных шкалах Рассмотрим общую индуктивную шкалу ТВП $\overrightarrow{E}=\{E_i\}_{i\in I}$ с нетождественными, вообще говоря, согласованными линейными непрерывными вложениями $e_{i_2i_1}$: $E_{i_1}\underset{\to}{\subsetneq}E_{i_2}$ $(i_1\preccurlyeq i_2)$, $e_{i_3i_1}=e_{i_3i_2}\circ e_{i_2i_1}$ $(i_1\preccurlyeq i_2\preccurlyeq i_3)$, $e_{ii}=I_{E_i}$ (см.[7], гл.1). Шкалой подмножеств $\overrightarrow{E}$ мы назовем такую систему $\overrightarrow{B}=\{B_i\subset E_i\}_{i\in I}$, что $e_{i_2i_1}(B_{i_1})=B_{i_2}$ $(i_1\preccurlyeq i_2)$. В частности, шкалы точек $\overrightarrow{x}=\{x_i\in E_i\}_{i\in I}$ образуют носитель шкалы $|\overrightarrow{E}|=E$, если вложения инъективны. В общем случае мы полагаем $\overrightarrow{x}\sim\overrightarrow{x}'$, если $x_i=x_i'$ при некотором $i=i_0\in I$ (а значит, и при $i\succcurlyeq i_0$), и E состоит из классов эквивалентности. Отображения $x_i\mapsto\overrightarrow{x}$ порождают вложения $e^i:E_i\to E$, так что $E=\underset{i}{\cup}e^i(E_i)$.

Значениями отображения в шкалу $F : [a;b] \to \overrightarrow{E}$ мы считаем шкалы точек (с точностью до эквивалентности) $\overrightarrow{x} \in E$. При этом, в соответствии с определением сходимости в шкале, $\overrightarrow{x} = F(t) \to \overrightarrow{x}^0$ при $t \to t_0$, если $x_i \to x_i^0$ при некотором $i = i_0 \in I$ (а значит, и при $i \succcurlyeq i_0$). Аналогично выглядит запись непрерывности и дифференцируемости F.

Наконец, включение $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{B}$ понимается покоординатно: $x_i \in B_i$ $(i \succcurlyeq i_0)$, аналогично другим отношениям для шкал подмножеств. Функциональной шкалой $\overrightarrow{l}$ на $\overrightarrow{E}$ мы называем систему $\{l_i \in E_i^*\}_{i \in I}$, удовлетворяющую условиям согласованности $l_{i_2} \circ e_{i_2 i_1} = l_{i_1}$ $(i_1 \preccurlyeq i_2)$. На общие линейные индуктивные шкалы ЛВП распространяется теорема Хана–Банаха [8].

Сказанное выше позволяет без труда распространить рассмотренные выше разновидности формулы Лагранжа на отображения в общие индуктивные шкалы пространств. Как следствие, на общий случай переносятся и результаты следующего раздела.

4. Некоторые приложения формулы конечных приращений

4.1. Теоремы о среднем значении Пусть $\overline{\operatorname{conv}}\, A$ означает замкнутую выпуклую оболочку A в ТВП E. Сначала мы рассмотрим теорему о среднем для отображений в ЛВП E.

Теорема 4.1. *Если E — отделимое вещественное ЛВП, отображение $F : [a;b] \to E$ непрерывно на $[a;b]$ и дифференцируемо на $[a;b]\backslash e$, где множество $e \subset [a;b]$ измеримо, причем $F(e)$ имеет скалярную меру нуль в E, то*

$$F(b) - F(a) \in \mu([a;b]\backslash e) \cdot \overline{\operatorname{conv}}\, F'([a;b]\backslash e). \tag{28}$$

Для доказательства применима оценка (12) при $B = \overline{\operatorname{conv}}\, F'([a;b]\backslash e)$, $\varphi(t) = t$. Отметим, что стандартная теорема о среднем в ЛВП ([1],[2]):

$$(F(b) - F(a)/b - a) \in \overline{\operatorname{conv}}\, F'([a;b]\backslash e) \tag{29}$$

следует из (28) при $\mu(e) = 0$. Для получения аналога оценки (28) в ТВП нам понадобится еще одно понятие.

Определение 4.2. *Назовем функционально отделимой выпуклой оболочкой $\widehat{\operatorname{conv}}\, A$ множества A в ТВП E пересечение всех функционально отделимых выпуклых подмножеств E, содержащих A.*

Теорема 4.3. *Если E — вещественное ТВП, отображение $F : [a;b] \to E$ удовлетворяет условиям теоремы 4.1, то*

$$F(b) - F(a) \in \mu([a;b]\backslash e) \cdot \widehat{\operatorname{conv}}\, F'([a;b]\backslash e). \tag{30}$$

Для доказательства применим оценку (16) при $A = \widehat{\mathrm{conv}}\, F'([a;b]\backslash e)$, $\varphi(t) = t$.

Теоремы 4.1 и 4.3 переносятся на отображения в шкалы пространств по аналогии с теоремами 2.1 и 2.4.

Теорема 4.1*. *Если* $\overrightarrow{E}$ *— линейная шкала отделимых вещественных ЛВП, отображение* $F : [a;b] \to \overrightarrow{E}$ *непрерывно на* $[a;b]$ *и дифференцируемо на* $[a;b]\backslash e$*, где множество* $e \subset [a;b]$ *измеримо, причем* $F(e)$ *имеет скалярную меру нуль в* $\overrightarrow{E}$*, то верна оценка (28).*

Теорема 4.3*. *Если* $\overrightarrow{E}$ *— индуктивная шкала вещественных ТВП, отображение* $F : [a;b] \to \overrightarrow{E}$ *удовлетворяет условиям теоремы 4.1*, то верна оценка (30).*

Аналогичным образом, из оценки (23) вытекает теорема о среднем для однородно дифференцируемых отображений.

Теорема 4.4. *Если* $\overrightarrow{E}$ *— индуктивная шкала отделимых вещественных ЛВП и отображение* $F : [a;b] \to \overrightarrow{E}$ H*–дифференцируемо на* $[a;b]$*, то верна оценка (29).*

Теперь рассмотрим теорему о среднем для двух функций ("теорему Коши").

Теорема 4.5. *Если* E *— отделимое вещественное ЛВП, отображение* $F : [a;b] \to E$ *удовлетворяет условиям теоремы 4.1, функция* g *непрерывна и строго монотонна на* $[a;b]$*, дифференцируема на* $[a;b]\backslash e$*, где множество* $e \subset [a;b]$ *измеримо, причем* $g' \neq 0$*, то*

$$F(b) - F(a) \in \mu\, g([a;b]\backslash e) \cdot \overline{\mathrm{conv}}\, \frac{F'}{g'}([a;b]\backslash e). \tag{31}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прямой подсчет показывает, что для композиции $H = F \circ g^{-1}$ на отрезке $[g(a); g(b)]$ с исключительным множеством $g(e)$ выполняются условия теоремы 4.1, откуда

$$F(b) - F(a) = H(g(b) - g(a)) \in \mu\, g([a;b]\backslash e) \cdot \overline{\mathrm{conv}} H'(g([a;b]\backslash e)) =$$
$$= \mu\, g([a;b]\backslash e) \cdot \overline{\mathrm{conv}} \frac{F'}{g'}([a;b]\backslash e).$$

■

Аналогичным образом, из теоремы 4.3 вытекает теорема Коши с функционально отделимой выпуклой оценкой.

Теорема 4.6. *Если E — вещественное ТВП, отображение F удовлетворяет условиям теоремы 4.5, то*

$$F(b) - F(a) \in \mu\, g([a;b]\backslash e) \cdot \widehat{\mathrm{conv}}\, \frac{F'}{g'}([a;b]\backslash e). \tag{32}$$

Отметим, что оценки

$$\frac{F(b)-F(a)}{g(b)-g(a)} \in \overline{\mathrm{conv}} \frac{F'}{g'}([a;b]\backslash e) \quad \text{и} \quad \frac{F(b)-F(a)}{g(b)-g(a)} \in \widehat{\mathrm{conv}} \frac{F'}{g'}([a;b]\backslash e);$$

вытекают соответственно из (31) и (32) при $\mu\, g(e) = 0$.

Теоремы 4.5 и 4.6 также переносятся на отображения в шкалы пространств по аналогии с теоремами 4.1 и 4.3.

Теорема 4.5*. *Если $\overrightarrow{E}$ — линейная шкала отделимых вещественных ЛВП, отображение $F : [a;b] \to \overrightarrow{E}$ удовлетворяет условиям теоремы 4.1*, а функция g — условиям теоремы 4.5, то верна оценка (31).*

Теорема 4.6*. *Если $\overrightarrow{E}$ — индуктивная шкала вещественных ТВП, отображения F и g — такие же, как в теореме 4.5*, то верна оценка (32).*

Аналогичным образом, из теоремы 4.4 вытекает теорема Коши для однородно дифференцируемых отображений.

Теорема 4.7. *Если $\overrightarrow{E}$ — индуктивная шкала отделимых вещественных ЛВП и отображение $F : [a;b] \to \overrightarrow{E}$ H-дифференцируемо на $[a;b]$, функция g строго монотонна и дифференцируема на $[a;b]$, причем $g' \neq 0$, то*

$$\frac{F(b)-F(a)}{g(b)-g(a)} \in \overline{\mathrm{conv}} \frac{F'}{g'}([a;b]).$$

4.2. Формула Тейлора. Здесь мы сразу рассмотрим обобщенную формулу Тейлора с "исключительным множеством" e, отвечающую обобщенной формуле конечных приращений (12) в ЛВП.

Определение 4.8. *Для фиксированного $[a;b] \subset \mathbb{R}$ (где возможно $b \leqslant a$) и измеримого $e \subset [a;b]$ введем при $h \in [0; b-a]$ функцию $h_e = \mu([a;a+h]\backslash e)$ (с учетом знака h).*

Нетрудно проверить, что при $h > 0$ для $k = 1, 2, \ldots$ функции $(h_e)^k$ возрастают, удовлетворяют условию Липшица, $\mu h_e^k(e) = 0$, $(h_e^k)' = k \cdot h_e^{k-1}$ на $([a;b]\backslash e)'$ и $(h_e^k)' = 0$ на e' (где A' — множество точек плотности A).

Теорема 4.9. *Пусть E — вещественное отделимое ЛВП, $F : [a;b] \to E$, $F \in C^n[a;b]$ $(n \geq 0)$, $F^{(n)}$ дифференцируемо на $[a;b]\backslash e$, где множество*

$e \subset [a;b]$ измеримо, и все $F^{(k)}(e)$ $(k = \overline{0,n})$ — скалярной меры нуль в E. Тогда

$$F(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{h_e^k}{k!} F^{(k)}(a) \in \frac{h_e^{n+1}}{(n+1)!} \overline{\mathrm{conv}}\, F^{(n+1)}([a;a+h]\backslash e). \tag{33}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n = 0$ оценки (33) и (28) совпадают. Пусть (33) верно для порядка $(n-1)$, $R_F^n(h)$ — левая часть (33). Так как, ввиду свойств $(h_e)^k$, слагаемые слева в (33) — липшицевы, то $R_F^n(h)$ — липшицево. Поскольку $\mu h_e^k(e) = 0 = \mu F(e)$, то $R_F^n(e)$ — скалярной меры нуль. Из формул для $(h_e^k)'$ следует

$$(R_F^n)'(h) = F'(a+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h_e^k}{k!} F^{(k+1)}(a) = R_{F'}^{n-1}(h) \quad \text{на} \quad ([a;b]\backslash e)'.$$

Введем непрерывную, строго возрастающую и дифференцируемую на $([a;b]\backslash e)'$ функцию $g^\varepsilon(h) = h_e^{n+1} + \varepsilon(n+1)h$, и применим к паре $\{R_F^n, g^\varepsilon\}$ "теорему Коши" 4.5:

$$R_F^n(h) - R_F^n(0) \in \mu g^\varepsilon(([a;a+h]\backslash e)') \cdot \overline{\mathrm{conv}}\, \frac{(R_F^n)'}{(g^\varepsilon)'}(([a;a+h]\backslash e)')$$

$$= [(\mu([a;a+h]\backslash e))^{n+1} + \varepsilon \cdot (n+1) \cdot \mu([a;a+h]\backslash e)] \cdot \overline{\mathrm{conv}}\, \frac{R_{F'}^{n-1}}{(g^\varepsilon)'}(([a;a+h]\backslash e)').$$

Отсюда, применяя к $R_{F'}^{n-1}$ допущение индукции и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$R_F^n(h) \in \frac{h_e^{n+1}}{(n+1)!} \overline{\mathrm{conv}}\, F^{(n+1)}(([a;a+h]\backslash e)') \subset \frac{h_e^{n+1}}{(n+1)!} \overline{\mathrm{conv}}\, F^{(n+1)}([a;a+h]\backslash e).$$

■

В частности, при $\mu(e) = 0$ в (33) $h_e = h$, что дает стандартную "форму Лагранжа" для формулы Тейлора в ЛВП (см. [1]). Сформулируем аналог формулы (33) с функционально отделимой выпуклой оценкой.

Теорема 4.10. *Если E — вещественное ТВП, $F : [a;b] \to E$ удовлетворяет условиям теоремы 4.9, то*

$$F(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{h_e^k}{k!} F^{(k)}(a) \in \frac{h_e^{n+1}}{(n+1)!} \widehat{\mathrm{conv}}\, F^{(n+1)}([a;a+h]\backslash e). \tag{34}$$

Как и ранее, теоремы 4.9–4.10 переносятся на шкалы пространств.

Теорема 4.9*. *Если $\overrightarrow{E}$ — линейная шкала отделимых вещественных ЛВП, отображение $F : [a;b] \to \overrightarrow{E}$ из класса $C^n[a;b]$, $F^{(n)}$ дифференцируемо на $[a;b]\backslash e$, где множество $e \subset [a;b]$ измеримо, все $F^{(k)}(e)$ $(k = \overline{0,n})$ — скалярной меры нуль в $\overrightarrow{E}$, то верна оценка (33).*

Теорема 4.10*. *Если $\overrightarrow{E}$ — индуктивная шкала вещественных ТВП, отображение $F : [a;b] \to \overrightarrow{E}$ удовлетворяет условиям теоремы 4.9*, то верна оценка (34).*

Аналогичным образом получаем формулу Тейлора для однородно дифференцируемых отображений.

Теорема 4.11. *Если $\overrightarrow{E}$ — индуктивная шкала отделимых вещественных ЛВП, $F : [a;b] \to \overrightarrow{E}$ из класса $C^n[a;b]$, $F^{(n)}$ H-дифференцируемо на $[a;b]$, то*

$$F(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} F^{(k)}(a) \in \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \overline{\operatorname{conv}}\, F^{(n+1)}([a;a+h]).$$

Приведем в заключение асимптотическую и интегральную формы обобщенной формулы Тейлора.

Теорема 4.12. *Пусть E — отделимое вещественное ЛВП, $F : [a;b] \to E$ непрерывно относительно $[a;b]\backslash e$ (где множество $e \subset [a;b]$ измеримо) дифференцируемо n раз в точке a, и все $F^{(k)}((a-\delta;a+\delta) \cap e)$ — скалярной меры нуль в E при некотором $\delta > 0$. Тогда*

$$F(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{h_e^k}{k!} F^{(k)}(a) = o(h_e^n).$$

Отметим, что, в отличие от классического результата, отказаться от относительной непрерывности $F^{(n)}$ в точке a здесь, вообще говоря, нельзя.

Теорема 4.13. *Пусть E — отделимое вещественное ЛВП, $F : [a;b] \to E$ скалярно (см. [10, гл. VI, § 1]) абсолютно непрерывно дифференцируемо n раз на $[a;b]$, и все $F^{(k)}(e)$ $(k = \overline{0,n-1})$ — скалярной меры нуль, где множество $e \subset [a;b]$ измеримо. Тогда для любого $l \in E^*$*

$$l\left(F(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{h_e^k}{k!} F^{(k)}(a)\right) = \frac{1}{n!} \int\limits_{[a;a+h]\backslash e} l(F^{(n)})'(t) \cdot [(t+h)_e - t_e]^n \, dt.$$

Теоремы 4.12 и 4.13 также могут быть перенесены на линейные шкалы ЛВП.

Некоторые другие приложения рассмотрены в [9].

Список литературы

[1] *О.Г. Смолянов*, Анализ на топологических линейных пространствах и его приложения. Изд-во МГУ, Москва (1979).

[2] *H.H. Keller*, Differential calculus in locally convex spaces. — *Lect. Notes Math.* (1974).

[3] *A. Frölicher, A. Kriegl*, Differentiable extensions of functions. — *Diff. Geom. Appl.* (1993), v. 3, No. 1, p. 71–90.

[4] *И.В. Орлов*, Теорема Лагранжа и ее обобщение в современной математике. — Математика сегодня'87. Вища школа, Киев (1987), с. 169–188.

[5] *И.В. Орлов*, Теорема Лагранжа в топологических и псевдотопологических векторных пространствах. — *Уч. зап. Симферопольск. гос. ун-та. Математика, физика, химия* (1995), № 1–2 (40–41), с. 113–122.

[6] *С.Г. Крейн, Ю.И. Петунин, Е.М. Семенов*, Интерполяция линейных операторов. Наука, Москва (1978).

[7] *Л.Р. Волевич, С.Г. Гиндикин*, Обобщенные функции и уравнения в свертках. Наука, Москва (1994).

[8] *И.В. Орлов*, Теорема Хана–Банаха в индуктивных шкалах пространств. — *Доп. НАН України* (1997), № 9, с. 32–36.

[9] *I.V. Orlov*, A termwise differentiation in the inductive scales of the locally convex spaces. — *Operator Theory: Adv. & Appl.* (2000), Birkhäuser, Basel, v. 118, p. 321–333.

[10] *Н. Бурбаки*, Интегрирование (Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления). Наука, Москва (1970).

[11] *Р. Эдвардс*, Функциональный анализ. Теория и приложения. Мир, Москва (1969).

[12] *I.V. Orlov*, Mean value theorem for the homogeneously differentiable mappings. — *Spectral and Evolutionary Problems*, SSU Publ., Simferopol (1995), v. 4, p. 185–190.

Finite increments formula for mappings into inductive scales of spaces

I.V. Orlov

Finite increments formula with closed convex estimate is transfered to the differentiable mappings into linear scales of locally convex spaces and homogeneously differentiable mappings into nonlinear scales. A weakened variant of the formula with functionally separable convex estimate is obtained for mappings into general inductive scales. Some generalizations and applications are considered.

Формула скінченних приростів для відображень в індуктивні шкали просторів

І.В. Орлов

Формула Лагранжа із замкнутою опуклою оцінкою перенесена на диференційовні відображення в лінійні шкали й однорідно диференційовні відображення у нелінійні шкали локально опуклих просторів. Для відображень у загальні індуктивні шкали одержано ослаблений варіант формули з функціонально відокремлюваною опуклою оцінкою. Розглянуто узагальнення й додатки.