Математическая физика, анализ, геометрия
2001, т. 8, № 4, с. 440–454

Свойство близости a-точек и структура римановых поверхностей класса F_q

И.Э. Чижиков

Механико-математический факультет
Львовский национальный университет им. И. Франко
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, Украина
E-mail:matstud@franko.lviv.ua

Статья поступила в редакцию 22 января 2001 г.
Представлена Г.М. Фельдманом

В статье уточняется результат Г. Барсегяна об однолистных областях наполнения для мероморфных функций f таких, что риманова поверхность функции f^{-1} принадлежит классу F_q. В частности, получена точная оценка для количества таких областей. ·

1. Введение

В серии работ Г.А. Барсегян дополнил и уточнил теорию поверхностей наложения Л. Альфорса, а также результаты, касающиеся взаимного геометрического расположения a-точек мероморфных функций для различных значений $a \in \mathbb{C}$, выявив при этом общую закономерность их расположения — свойство близости a-точек. Наиболее сильные результаты опубликованы в [1].

Пусть f — мероморфная в $D_R = \{z : |z| < R\}$ $(0 < R \le \infty)$ функция. Введем следующие характеристики $f(z)$. Через $n(r, a, f)$ обозначим количество a-точек в $\overline{D}_r$, а через $\overset{\circ}{f}(z) = \dfrac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$ — сферическую производную f. Тогда величина

$$A(r,f) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\overline{\mathbb{C}}} n(r,a,f)\,d\omega(a) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^r\int\limits_0^{2\pi} \overset{\circ}{f}{}^2(re^{i\varphi})r\,dr\,d\varphi\,,$$

· Mathematics Subject Classification 2000: 30C99, 30D35, 30F99.

Работа была частично поддержана INTAS, проект 99-00089.

где $d\omega(a)$ — элемент площади на сфере Римана в сферической метрике, равна среднему числу листов римановой поверхности $\mathcal{F}_r = f(\overline{D}_r)$, понимаемой в смысле Стоилова [2], а

$$L(r,f) = \int\limits_0^{2\pi} \overset{\circ}{f}\,(re^{i\varphi})r\,d\varphi$$

— длина границы $\mathcal{F}_r$.

Теорема А (Барсегян, 1985). *Пусть $f(z)$ — мероморфная в $\mathbb{C}$ функция, $\varphi(r) \uparrow +\infty$ при $r \uparrow +\infty$ ($\varphi(r) < A^{\frac{1}{35}}(r,f)$). Тогда в круге $\overline{D}_r$ найдутся $\Phi(r)$ попарно не пересекающиеся области $E_j(r)$, $1 \le j \le \Phi(r)$, для которых справедливы следующие утверждения:*

i) $|\Phi(r) - A(r,f)| = o(A(r,f)), \quad r \to +\infty,\ r \notin E,$
где E — некоторое множество конечной логарифмической меры (т.е. $\int_{E\cap[1,+\infty)} \frac{dr}{r} < +\infty$);

ii) f однолистна в $\overline{E_j}$, множество $\overline{f(E_j)}$, спроектированное на сферу Римана совпадает со сферой, из которой исключены k_j односвязных областей Δ_i^j ($1 \le i \le k_j$);

iii) $d_s(\Delta_i^j) < \frac{1}{\varphi(r)}, \quad j = 1,2,\ldots,\Phi(r),\ r \notin E,$
где $d_s(\Delta_i^j)$ — диаметр Δ_i^j в сферической метрике;

iv) $\sum_{j=1}^{\Phi(r)} k_j \le (4 + o(1))A(r,f), \quad r \to +\infty,\ r \notin E;$

v) $\sum_{j=1}^{\Phi(r)} d_e(E_j(r)) \le K_1\varphi^7(r) r A^{\frac{1}{2}}(r),$
где K_1 — абсолютная постоянная, не зависящая от f, $d_e(E_j(r))$ — эвклидов диаметр области $E_j(r)$.

Эта теорема, в частности, усиливает некоторые результаты Л. Альфорса [3]. Как отмечено в [1], она справедлива также при $R < +\infty$ для мероморфных в D_R функций таких, что $\dfrac{A(r,f)}{R-r} \to +\infty$ при $r \uparrow R$. При этом исключительное множество E таково, что $\int_{E\cap[0,R)} \frac{dr}{R-r} < +\infty$.

Обсудим точность утверждения теоремы А. Постоянная 4 в iv) точная. В самом деле, хорошо известно, что функция Вейерштрасса $\wp(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3),$$

откуда следует, что $\wp(z)$ имеет четыре вполне разветвленных значения e_1, e_2, e_3 и ∞ кратности 2. Поэтому $k_j \geq 4$ для всех j. Если снять требование конформности f на границе E_j, то в iv) постоянную 4 можно заменить на 2 [1], причем в этом случае постоянная 2 также точна.

Оценка v) точна в общем случае, в том смысле, что $\varphi^7(r)$ нельзя заменить на $o(1)$ при $r \to +\infty$, как показывает пример той же $\wp(z)$, для которой $d_e(E_j(r)) = O(1)$. Но v) может быть значительно уточнена для класса мероморфных функций, у которых нули близки к полюсам [4].

Возникает вопрос: насколько точным является соотношение i)?

Из первого основного предложения, полученного при доказательстве теоремы А [1, с. 413] вытекает, что $o(A(r,f))$ в i) можно заменить на $O(A^{\frac{35}{36}+\varepsilon}(r,f))$, где ε — произвольное положительное число. С другой стороны, остаточный член в 1-й и 2-й теоремах Альфорса имеет порядок $O(L(r,f))$.

Для $\wp(z)$ количество параллелограммов периодов, пересекающихся с $\overline{D}_r$, внутренности которых можно взять в качестве $E_j(r)$, равна $r^2 + O(r) = A(r,\wp) + O(A^{\frac{1}{2}}(r,\wp))$.

Оказывается, что существуют классы функций, для которых разность $\Phi(r) - A(r,f)$ может быть оценена, как $O(L(r,f))$.

Хорошо известно, что для мероморфной в D_R функции и для произвольного $\delta > 0$ имеем $L(r,f) = o(A^{\frac{1}{2}+\delta}(r,f))$ при $r \uparrow R$, $r \notin E$, где E таково, что $\int_{E\cap[1,+\infty]} \frac{dt}{t} < +\infty$ при $R = \infty$ и $\int_{E\cap[0,R)} \frac{dt}{R-t} < +\infty$ при $R < \infty$.

Рассмотрим класс мероморфных функций f таких, что риманова поверхность функции $f^{-1}(w)$ принадлежит классу $F_q = F_q(b_1,\ldots,b_q)$ [5, гл. 7, §4], т.е. множество $\{b_j\}_{j=1}^q$ разветвленных и асиптотических значений f конечно.

Этот класс часто использовался для решения обратной задачи теории Неванлинны [5, гл. 7, §§4–8], а также используется в теории итераций мероморфных функций.

Пусть $\rho(\cdot,\cdot)$ — расстояние между точками на сфере Римана $\mathcal{S}$ радиуса $\frac{1}{2}$.

Справедлива следующая теорема

Теорема. *Пусть f — мероморфная в D_R, $0 < R \leq +\infty$ функция такая, что риманова поверхность f^{-1} принадлежит классу $F_q(b_1,\ldots,b_q)$, $q \geq 2$, $\delta = \min\{\rho(b_i,b_j), i \neq j\}$ и $\varepsilon \in (0, \frac{\delta}{100q})$. Тогда в $\overline{D}_r$ существуют попарно не пересекающиеся области $E_j(r,\varepsilon)$, $1 \leq j \leq \Phi(r,\varepsilon)$, такие, что:*

i) $|\Phi(r,\varepsilon) - A(r,f)| \leq K_2 \dfrac{q}{\varepsilon\delta} L(r,f), \quad r \uparrow R;$

ii) f однолистна в $\overline{E}_j$, $\overline{f(E_j)}$ совпадает со сферой Римана, из которой исключены k_j кружков сферического радиуса ε;

iii) $\sum_{j=1}^{\Phi(r,\varepsilon)} k_j \leq 4A(r,f) + K_3 \dfrac{q}{\varepsilon^2} L(r,f), \quad r \uparrow R;$

iv) $\sum_{j=1}^{\Phi(r,\varepsilon)} d_e(E_j(r)) \le \dfrac{4\sqrt{\pi}(q+1)}{\varepsilon} r A^{\frac{1}{2}}(r),$

где постоянные K_2 и K_3 не зависят от r, ε, q и δ.

2. Сведения из теории Л. Альфорса

Напомним основные понятия теории поверхностей наложения [3; 2, гл. X]. Пусть γ — простая (замкнутая) кривая на сфере Римана $\mathcal{S}$. Предположим в некоторой окрестности $U(p)$ точки $p \in \mathcal{S}$ проведена замкнутая кривая длины l. Кривая γ называется *регулярной*, если сумма длин дуг γ, лежащих в области, ограниченной проведенной кривой, не превосходит hl, где h — постоянная, зависящая только от $U(p)$.

Кроме того, нам понадобится понятие сильно регулярной кривой[1, с. 389]. Пусть $U^{\varepsilon}(M)$ обозначает сферическую ε-окрестность множества $M \subset \mathcal{S}$. Простая (замкнутая или открытая) кривая $\gamma \subset \mathcal{S}$ *сильно регулярна,* если существуют такие числа $\tilde{h} > 1$ и $d < \frac{\pi}{2}$, что для любой точки $p \in \mathcal{S}$ при $d' < d$ суммарная длина частей γ, лежащих в $U^{d'}(p)$, не превосходит $\tilde{h}d'$.

Пусть поверхность F накрывает поверхность $F_0 \subset \mathcal{S}$. *Относительная граница* поверхности F по отношению к поверхности F_0 состоит из тех точек границы F, которые проектируются во внутренние точки F_0. *Островом* поверхности F над (замкнутой) областью $D \subset F_0$ называется связная компонента F, лежащая над D и не имеющая по отношению к D относительной границы.

Нам будет удобно ввести понятие острова над регулярной кривой. Пусть $\gamma_0 = \gamma \setminus \partial\gamma$ — это кривая γ, из которой исключены ее концы. Островом над регулярной кривой $\gamma \subset \mathcal{S}$ будем называть связную компоненту F, лежащую над γ, граница которой (если последняя существует) не имеет общих точек с γ_0. Те связные компоненты F, лежащие либо над D, либо над γ, которые не удовлетворяют определению острова, называются *полуостровами.*

Кратностью острова называется количество его листов, *порядком* — величина, на единицу меньшая кратности. Сумму кратностей всех островов F над D будем обозначать через $n(D)$, а сумму порядков — $n_1(D)$. Количество простых островов над D обозначим через $n_0(D)$, а количество островов без учета кратности — через $\bar{n}(D) = n(D) - n_1(D)$. Отношение $S(D)$ площади (в сферической метрике) части поверхности F, лежащей над D, к площади D, называется *средним числом листов накрытия F над D.* Подобным образом определяется величина $s(\gamma)$ — среднее число листов накрытия F над регулярной кривой $\gamma \subset F_0$.

В сделанных выше предположениях справедливы следующие утверждения [2, с. 352, 355]; [3, с. 227, 228].

Первая теорема о покрытиях. *Пусть Δ — подобласть F_0. Тогда*

$$|S(F_0) - S(\Delta)| < h_1 L,$$

где L — длина относительной границы F по отношению к F_0, h_1 — постоянная, зависящая лишь от Δ и F_0.

З а м е ч а н и е 1. В случае когда $F_0 = \mathcal{S}$ и граница Δ кусочно аналитическая, первая теорема о покрытиях справедлива с $h_1 = 1/|\Delta|$, где $|\Delta|$ — сферическая площадь Δ [1, теор. A, с. 389]; [6, теор. A].

Вторая теорема о покрытиях. *Пусть γ — регулярная кривая на F_0. Тогда*

$$|S(F_0) - s(\gamma)| < h_2 L,$$

где h_2 — постоянная, зависящая лишь от γ и F_0.

Отметим, что в качестве кривой γ можно выбрать одну из граничных дуг F_0, если таковые существуют.

З а м е ч а н и е 2. Пусть $F_0 = \mathcal{S}$, а кривая γ сильно регулярна и кусочно аналитична. Обозначим $h'(\gamma) = 2\max\{|\gamma|/d, \tilde{h}\}$, где d и $\tilde{h}$ — величины, фигурирующие в определении сильной регулярности γ, а $|\gamma|$ — длина γ. Тогда ([1, теор. A$'$, с. 390]; [6, теор. A$'$]) если γ замкнута, то в качестве h_2 можно взять $h_{2,1}(\gamma) = 2h'(\gamma)/\min\{|\mathrm{Int}\,\gamma|, |\mathrm{Ext}\,\gamma|\}$, если же γ открыта, а γ' — замкнутая сильно регулярная и кусочно аналитическая кривая, содержащая γ, то за h_2 можно взять $h_{2,2}(\gamma) = h_{2,1}(\gamma') + h'(\gamma')/|\gamma|$.

3. Вспомогательные утверждения

Для доказательства теоремы нам необходима следующая лемма геометрического характера. Пусть выполнены условия теоремы.

Лемма 1. *На $\mathcal{S}$ существует регулярная кривая γ^*, содержащая все точки b_j, $j = 1, \dots, q$, и обладающая следующими свойствами (считаем, что точки b_j перенумерованы в порядке обхода по кривой):*

а) Замкнутая $\frac{\delta}{32}$-окрестность дуги $b_j b_{j+1}$, $1 \le j \le q-1$, кривой γ^* не пересекает ни одной из замкнутых $\frac{\delta}{32}$-окрестностей точек b_i, $i \ne j, j+1$.

б) Для $\gamma_j = b_j b_{j+1} \setminus \left(U^{\frac{\delta}{32}}(b_j) \cup U^{\frac{\delta}{32}}(b_{j+1})\right)$ выполняется

$U^{\frac{\delta}{64}}(\gamma_i) \cap U^{\frac{\delta}{64}}(\gamma_j) = \varnothing$ *при $i \ne j$.*

в) Длина дуги γ^* не превосходит $\dfrac{12\pi^2}{\delta}$.

г) γ^* сильно регулярна с постоянными $d = \delta/64$ и $\tilde{h} = 8$.

К сожалению, известное автору строгое доказательство леммы 1 довольно громоздко, хотя правильность утверждения интуитивно очевидна. Доказательство леммы 1 приводится в конце статьи.

Для произвольного $r \in (0, R)$ рассмотрим накрытие $\mathcal{S}$ поверхностью $\mathcal{F}_r$ с перенесенной на нее сферической метрикой. Так как r у нас фиксировано, то будем опускать его в некоторых обозначениях. Теперь $S = S(\mathcal{S}) = A(r)$, $L = L(r)$, $n(b_i) = n(r, b_i)$ и т. п.

Лемма 2. *Пусть $H_1, \dots, H_m$ — односвязные области или регулярные кривые такие, что $\min_{i \neq j} \rho(H_i, H_j) \geq \varepsilon$ и $\mathcal{F}_r$ не разветвлена над $\mathcal{S} \setminus \bigcup_{i=1}^m H_i$. Тогда $\sum_{i=1}^m m_i \leq \frac{L}{\varepsilon}$, где m_i — количество полуостровов над H_i.*

Доказательство леммы 2. Кривая $\Gamma_r = \partial \mathcal{F}_r$ должна пересечь не менее m_i различных связных компонент $\mathcal{F}_r$ над H_i. Причем при движении по Γ_r в фиксированном направлении между пересечением различных компонент над одним и тем же H_i кривая Γ_r должна обогнуть или пересечь как минимум одну компоненту над H_j, $j \neq i$, чтобы перейти на один из листов, соответствующий другой компоненте над H_i. Таким образом, если при обходе Γ_r на каждом полуострове над H_i, $i = 1, \dots, q$, отметить последнюю точку h_i пересечения с Γ_r, а h_i поставить в соответствие длину дуги Γ_r от h_i до первого пересечения с компонентой, соответствующей другому полуострову, (эта длина в силу выше сказанного не меньше ε), то получим $\sum_{i=1}^m m_i \varepsilon \leq L$, что и требовалось доказать. ■

4. Доказательство теоремы

Пусть $\varepsilon < \frac{\delta}{100q}$. Согласно лемме 1 существует регулярная кривая γ^*, обладающая свойствами а)–г), которые описаны в лемме с ε вместо $\delta/32$ и $\varepsilon/2$ вместо $\delta/64$ в пп. а) и б). При этом $\gamma_i = b_i b_{i+1} \setminus \Big(U^\varepsilon(b_i) \cup U^\varepsilon(b_{i+1})\Big)$, где $b_i b_{i+1}$ — дуга кривой γ^*, $1 \leq i \leq q-1$. Согласно этим свойствам множество $U^{\frac{\varepsilon}{2}}(\gamma_i) \setminus \overline{U^{\frac{\varepsilon}{4}}(\gamma_i) \cup U^\varepsilon(b_i) \cup U^\varepsilon(b_{i+1})}$ состоит из двух односвязных* компонент. В каждой из них проведем соединяющую $\partial U^\varepsilon(b_i)$ с $\partial U^\varepsilon(b_{i+1})$ сильно регулярную кривую с постоянной $\tilde{h}$, которая не превосходит удвоенную соответствующую постоянную для γ^* при той же постоянной d (т.е. $d = \frac{\delta}{64}$, $h = 16$). Пусть σ_i^+ — та из них, для которой при движении по ней от $U^\varepsilon(b_i)$ до $U^\varepsilon(b_{i+1})$ область $U^{\frac{\varepsilon}{4}}(\gamma_i)$ остается слева, а σ_i^- — другая. σ_i^+, σ_i^- и дуги окружностей

*Под односвязностью мы понимаем односвязность в $\overline{\mathbb{C}}$: $D \subset \mathcal{S}$ — односвязна, если для каждой замкнутой жордановой кривой γ, целиком содержащейся в D, либо $\operatorname{Int} \gamma \subset D$, либо $\operatorname{Ext} \gamma \subset D$.

$\partial U^\varepsilon(b_i)$, $\partial U^\varepsilon(b_{i+1})$ ограничивают область, содержащую γ_i, которую мы обозначим D_i (дуги $\partial U^\varepsilon(b_i)$ и $\partial U^\varepsilon(b_{i+1})$ выбираем так, чтобы D_i не содержала $U^\varepsilon(b_i)$, $U^\varepsilon(b_{i+1})$) (см. рис. 1).

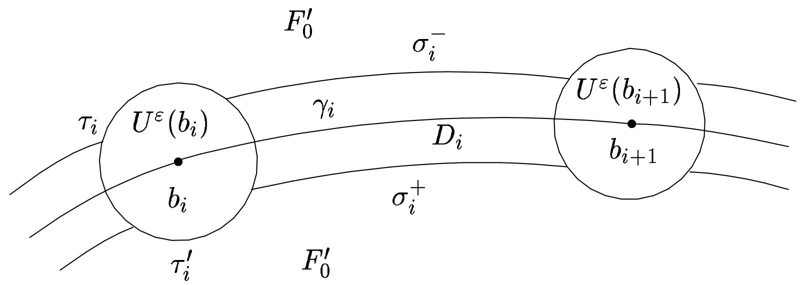

Рис. 1.

Из свойств а), б) и включения $D_i \subset U^{\frac{\varepsilon}{2}}(\gamma_i)$ следует, что $\bigcup_{i=1}^{q} \overline{U}^\varepsilon(b_i) \cup \bigcup_{i=1}^{q-1} \overline{D_i}$ — односвязная замкнутая область на $\mathcal{S}$, а значит, таковой является и область $F'_0 = \mathcal{S} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{q} \overline{U}^\varepsilon(b_i) \cup \bigcup_{i=1}^{q-1} \overline{D_i}\right)$. Используя структуру $\mathcal{S} \setminus F_0$ и свойство в) из леммы 1, нетрудно получить следующую оценку: $|F_0| > \pi - 2\pi q\varepsilon^2 - (q-1)\frac{12\pi^2}{\delta}2\varepsilon > \frac{1}{2}$ при $\varepsilon < \delta/(100q)$. Первая теорема о покрытиях, примененная к F'_0 и $\mathcal{S}$, с учетом замечания 1 дает $|S(F'_0) - S| \le 2L$. Поскольку риманова поверхность $w^{-1}(z)$ принадлежит классу $F_q(b_1, \dots, b_q)$, то над F'_0 нет точек ветвления, а значит, $n(F'_0) = n_0(F'_0)$. Учитывая, что $S(F'_0) = n(F'_0) + m(F'_0)$, где $m(F'_0)$ — вклад полуостровов, выводим

$$|n_0(F'_0) - S| \le 2L + m(F'_0). \tag{1}$$

Так как $\rho(U^{\frac{\varepsilon}{2}}(b_i), F'_0) = \frac{\varepsilon}{2}$, $i = 1, \dots, q$, $\rho(b_i, b_j) \ge \delta > 32\varepsilon$, то применив лемму 2 с $H_i = U^{\frac{\varepsilon}{2}}(b_i)$, $i = 1, \dots, q$, $H_0 = F'_0$, получаем, что $\sum_{i=0}^{q} \mu_i \le \frac{2L}{\varepsilon}$, где μ_i — количество полуостровов над H_i, $i = 0, \dots, q$. Поскольку над F'_0 нет точек ветвления, $m(F'_0) \le \mu_0$. Таким образом, из (1) следует

$$|n_0(F'_0) - S| \le \frac{K_4}{\varepsilon} L, \tag{2}$$

где K_4 — постоянная, не зависящая от ε, r, q и w.

Отметим, что поскольку $\mathcal{F}_r$ содержит $\Gamma_r = \partial\mathcal{F}_r$, то согласно определению острова из включения $\gamma \subset \partial D$, для области $D \subset \mathcal{S}$ и регулярной кривой γ, следует что каждый остров над γ является частью острова над D. В частности, $n(\gamma) \ge n(D)$.

Поэтому $n_0(\sigma_i^\pm) \ge n_0(F_0')$. С другой стороны, по второй теореме о покрытиях, согласно замечанию 2 (при подсчете $h_{2,2}(\sigma_i^\pm)$ кривая $\sigma_i^\pm$ дополняется дугой большой окружности так, чтобы для образовавшейся замкнутой кривой $\tilde\sigma_i^\pm$ выполнялось $\min\{|\mathrm{Int}\,\tilde\sigma_i^\pm|, |\mathrm{Ext}\,\tilde\sigma_i^\pm|\} \ge 1$), $|s(\sigma_i^\pm) - S| \le \frac{K_5}{\delta}L$. Учитывая, что $n_0(\sigma_i^\pm) \le s(\sigma_i^\pm)$ и (2), получаем

$$|n_0(\sigma_i^\pm) - S| \le \frac{K_6 L}{\varepsilon}, \quad 1 \le i \le q-1. \tag{3}$$

Применив лемму 2 к системе областей $U^{\frac{\varepsilon}{2}}(b_i)$, $i = 1, \dots, q$, D_i, $i = 1, \dots, q-1$, и приняв во внимание, что вклад полуостровов над D_i не превышает их количества, в силу неразветвленности $\mathcal{F}_r$ над D_i, получим ($|D_i| \ge K_7 \varepsilon\delta$)

$$|n_0(D_i) - S| = |n(D_i) - S| \le |S(D_i) - S| + m(D_i) \le \frac{K_8 L}{\varepsilon\delta}. \tag{4}$$

Для произвольных областей $A, B \subset \mathcal{S}$ обозначим через $n_0(\gamma, A, B)$ количество простых островов над кривой γ, являющихся одновременно частями простых островов над A и B. Из (2)–(4) вытекает, что

$$n_0(\sigma_1^-, F_0', D_1) \ge n_0(F_0') + n_0(D_1) - n(\sigma_1^-) \ge S - \frac{K_9}{\varepsilon\delta}L - K_9'.$$

Таким образом, над областью $(F_0' \sqcup D_1) \setminus \sigma_1^+$ (тут $A \sqcup B \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Int}\,(\overline{A \cup B})$) лежит не менее $S - \frac{K_9}{\varepsilon\delta}L - K_9'$ простых островов.

Подобным образом выводим

$$n_0(\sigma_2^-, (F_0' \sqcup D_1) \setminus \sigma_1^+, D_2) \ge S - \frac{K_9}{\varepsilon\delta} - \frac{K_6}{\varepsilon}L - \frac{K_8}{\varepsilon\delta}L - K_9'.$$

Продолжая рассуждать подобным образом, в результате получим, что над областью $(F_0' \sqcup D_1 \sqcup \cdots \sqcup D_{q-1}) \setminus \bigcup_{i=1}^{q-1} \sigma_i^+)$ лежит $\Phi \ge S - \frac{qK_{10}}{\varepsilon\delta}L$ простых островов $G(j)$, $j = 1, \dots, \Phi$, где постоянная K_{10} не зависит от r, ε, δ, q и w.

Пусть $\tau_i \subset \partial U^\varepsilon(b_i)$, $i = 2, \dots, q-2$, та из дуг, соединяющих концы σ_i^+ и σ_{i-1}^+, которая содержит концы σ_i^- и σ_{i-1}^-, τ_i' — ее дополнение в $\partial U^\varepsilon(b_i)$ (см. рис. 1). При $i = 1$ или $i = q-1$ положим $\tau_i = \partial U^\varepsilon(b_i)$.

Обозначим через $B_i(j)$ простой остров над $U^\varepsilon(b_i)$ (если такой существует), примыкающий к $G(j)$ над τ_i. Обозначим часть границы $G(j)$, лежащую над τ_i, через $\hat\tau_{ij}$, и $\tilde G(j) = G(j) \cup \bigcup_i (B_i(j) \cup \hat\tau_{ij})$.

Отметим некоторые свойства областей $\tilde G(j)$ на $\mathcal{F}_r$. $\tilde G(j)$ однолистны и односвязны. Дополнение к замыканию проекции $\tilde G(j)$ на $\mathcal{S}$ состоит из k_j областей $U^\varepsilon(b_i)$, $0 \le k_j \le q$.

Сразу видно, что $\sum_j k_j \le q\Phi$, но можно получить более точную оценку, не зависящую от q. Пусть $n_0^*(U^\varepsilon(b_i))$ — количество простых островов над $U^\varepsilon(b_i)$, не граничащих с $G(j)$ по кривым над τ_i, $j = 1, \dots, \Phi$. Тогда

$$n_0^*(U^\varepsilon(b_i)) \le n_0(\tau_i) - \Phi, \quad i = 1, \dots, q. \tag{5}$$

В то же время, подобно (3), $|n_0(\tau_i) - S| \le \frac{K_{11}}{\varepsilon} L$, $i = 1, \ldots, q$. Из последней оценки, (5) и оценки для Φ получаем

$$\sum_{i=1}^{q} n_0^*(U^\varepsilon(b_i)) \le \sum_{i=1}^{q} (n_0(\tau_i) - \Phi) \le \frac{K_{12}' q}{\varepsilon\delta} L.$$

Поскольку площади областей $U^\varepsilon(b_i)$ равны $K_{13}\varepsilon^2$, а попарные расстояния между этими областями не меньше 30ε, то выполняется следующее неравенство ([1, с. 391, (2.1)])

$$\sum_{i=1}^{q} (S - n_0(U^\varepsilon(b_i)) \le 4S + \frac{K_{13}' q}{\varepsilon^2} L.$$

Следовательно, количество всех простых островов над $U^\varepsilon(b_i)$, $i = 1, \ldots, q$, граничащих с $G(j)$ по τ_i, $j = 1, \ldots, \Phi$,

$$P = \sum_{i=1}^{q} [n_0(U^\varepsilon(b_i)) - n_0^*(U^\varepsilon(b_i))] \ge (q-4)S - \frac{K_{14} q}{\varepsilon^2} L.$$

Чтобы получить оценку сверху для количества $\sum_{j=1}^{\Phi} k_j$ нам надо посчитать количество полуостровов и кратных полуостровов над $U^\varepsilon(b_i)$, примыкающих по $\hat{\tau}_{ij}$ к $G(j)$. Если к $\hat{\tau}_{ij}$ примыкает $B_i(j)$, то $\sum_{i=1}^{\Phi} k_j$ не получает приращения, а обе величины $n(\tau_i)$ и P получают приращение 1. Если же не найдется $B_i(j)$ для данных i и j, то $\sum_{j=1}^{\Phi} k_j$ и $n(\tau_i)$ получают приращение 1, а P не изменяется. Таким образом:

$$\sum_{j=1}^{\Phi} k_j \le \sum_{i=1}^{q} n(\tau_i) - P \le 4S + \frac{K_{15} q}{\varepsilon^2} L. \tag{6}$$

Оценим теперь величины областей однолистности. Пусть $E_j(r)$ — прообраз $\tilde{G}(j)$ при отображении $w(z)$, $\hat{\sigma}_i^j$ — часть границы $\tilde{G}(j)$, проектирующаяся в σ_i^+, ($\hat{\sigma}_i^j$ состоит из одной или двух простых дуг, проектирующихся в σ_i^+, или их частей).

Пусть $\Sigma_i^j = \{p \in \mathcal{F}_r : \rho(p, \hat{\sigma}_i^j) < \frac{\varepsilon}{2}, \rho(p, \hat{b}_i) > \varepsilon, \rho(p, \hat{b}_{i+1}) > \varepsilon\}$, где $\hat{b}_i$, $\hat{b}_{i+1}$ — множества точек, лежащих над b_i, b_{i+1}, соотвественно. Обозначим через $E_j^*(r)$ прообраз $G(j) \setminus \bigcup_{i=1}^{q-1} \overline{\Sigma}_i^j$. Пусть далее $\Phi(x, r)$ $(\Phi(y, r))$ — количество областей $E_j^*(r)$, имеющих общие точки с $I_x(r) = \{z : \mathrm{Re}\, z = \mathrm{x}, |\mathrm{z}| < \mathrm{r}\}$ $(I_y(r) = \{z : \mathrm{Im}\, z = y, |z| < r\})$, $L_x(r)$ $(L_y(r))$ — сферическая длина $w(I_x(r))$ $(w(I_y(r)))$.

Из определения $E_j^*(r)$ и построения вытекает, что $\frac{\varepsilon}{2}$-окрестности образов $E_j^*(r)$ не пересекаются при разных j. Таким образом, при фиксированном x для каждой $E_j^*(r)$, имеющей общие точки с $I_x(r)$, найдется интервал на

$I_x(r)$, образ которого λ_j при отображении $w(z)$ полностью содержится в $\frac{\varepsilon}{2}$-окрестности $w(E_j^*(r))$ и $|\lambda_j| \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Поскольку $\sum_{\varkappa=1}^{\Phi(x,r)} |\lambda_{j_\varkappa}| \leq L_x(r)$, то

$$\Phi(x,r) = \sum_{\varkappa=1}^{\Phi(x,r)} 1 \leq \frac{2}{\varepsilon} \sum_{\varkappa=1}^{\Phi(x,r)} |\lambda_{j_\varkappa}| \leq \frac{2}{\varepsilon} L_x(r).$$

Аналогично $\Phi(y,r) \leq \frac{2}{\varepsilon} L_y(r)$. Теперь

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\Phi} d_e(E_j^*(r)) &\leq \sum_{j=1}^{\Phi} (\sup_{z\in E_j^*(r)} \operatorname{Re} z - \inf_{z\in E_j^*(r)} \operatorname{Re} z) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\Phi} (\sup_{z\in E_j^*(r)} \operatorname{Im} z - \inf_{z\in E_j^*(r)} \operatorname{Im} z) \\
&= \int_{-r}^{r} \Phi(x,r)\,dx + \int_{-r}^{r} \Phi(y,r)\,dy \leq \frac{2}{\varepsilon}\Big(\int_{-r}^{r} L_x(r)\,dx + \int_{-r}^{r} L_y(r)\,dy\Big) \\
&= \frac{2}{\varepsilon}\bigg(\int_{-r}^{r}\Big(\int_{I_x\cap D_r} \mathring{w}(z)\,dy\Big)dx + \int_{-r}^{r}\Big(\int_{I_y\cap D_r} \mathring{w}(z)\,dx\Big)dy\bigg) \\
&\leq \frac{4}{\varepsilon} \iint\limits_{D_r} \mathring{w}(re^{i\varphi}) r\,dr\,d\varphi \leq \frac{4}{\varepsilon} \sqrt{\iint\limits_{D_r} (\mathring{w}(re^{i\varphi}))^2 r\,dr\,d\varphi}\sqrt{\iint\limits_{D_r} r\,dr\,d\varphi} \\
&= \frac{4\sqrt{\pi}}{\varepsilon} r\sqrt{A(r)}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Кроме того,

$$\sum_{j=1}^{\Phi} d_e(E_j(r)) \leq \sum_{j=1}^{\Phi} d_e(E_j^*(r)) + 2\sum_{j=1}^{\Phi}\sum_{i=1}^{q} d_e(w^{-1}(\Sigma_i^j)).$$

Из определения Σ_i^j следует, что Σ_i^j содержит открытый круг диаметра $\varepsilon/2$. Каждому Σ_i^j можно поставить в соответствие интервал на $I_x(r)$, образ которого $\tilde{\lambda}_j$ содержится в Σ_i^j и $|\tilde{\lambda}_j| \geq \varepsilon/2$, как только $w^{-1}(\Sigma_i^j)$ имеет общие точки с $I_x(r)$. Используя это обстоятельство и проводя рассуждения, подобные предыдущим, получим

$$\sum_{j=1}^{\Phi}\sum_{i=1}^{q} d_e(w^{-1}(\Sigma_i^j)) \leq \frac{4q\sqrt{\pi}}{r} A^{\frac{1}{2}}(r).$$

С учетом (7) теперь получаем

$$\sum_{j=1}^{\Phi} d_e(E_j(r)) \leq \frac{4\sqrt{\pi}(q+1)}{\varepsilon} r A^{1/2}(r).$$

Теорема доказана.

5. Доказательство леммы 1

Поскольку $\rho(b_i, b_j) \geq \delta$, $1 \leq i < j \leq q$, то на сфере Римана $\mathcal{S}$ найдется точка O такая, что $\rho(b_j, O) \geq \delta/2$, $1 \leq j \leq q$. Будем использовать на $\mathcal{S}$: $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4}$, помещенной в трехмерное пространство, сферическую систему координат (ψ, φ), $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ (для $\varphi > 2\pi$ за значение долготы будем брать $\tilde{\varphi} \equiv \varphi \pmod{2\pi}$, $0 \leq \tilde{\varphi} < 2\pi$). При этом $\xi = \frac{1}{2}\cos\psi\cos\varphi$, $\eta = \frac{1}{2}\cos\psi\sin\varphi$, $\zeta = \frac{1}{2}\sin\psi$. Легко видеть, что в $\frac{\delta}{4}$-окрестности O существует точка O^* такая, что если ее взять в качестве южного полюса ($\psi = -\frac{\pi}{2}$), то в $\delta/4$-окрестности северного полюса не будет точек b_j, $j = 1, \dots, q$. Зададим кривую $\tilde{\gamma}$ на $\mathcal{S}$ уравнением $\tilde{\gamma}(t) = (\psi(t), \varphi(t))$, где $\psi(t) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}t$, $\varphi(t) = 2\pi t$, $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\delta}$.

Во-первых, отметим, что точки $\tilde{\gamma}$, лежащие на одном меридиане ($\varphi = \text{const}$), отстоят друг от друга на расстоянии, кратном $\delta/4$. Поэтому каждой точке b_j мы можем поставить в соответствие точку $c_j = (\psi_j, \varphi_j) = \tilde{\gamma}(t_j)$, где t_j определяется следующей системой:

$$\left|\psi_j + \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}t_j\right| \leq \frac{\delta}{4}, \quad \varphi_j = 2\pi t_j (\text{mod } 2\pi). \tag{8}$$

Если для некоторого решения t_j в (8) имеет место строгое неравенство, то решение единственно. В противном случае существует два решения t'_j, t''_j, $t'_j < t''_j$, при этом $t''_j = t'_j + 1$. Тогда за t_j возьмем t'_j. Точки b_j, $j = 1, \dots, q$, считаем перенумерованными таким образом, чтобы большему значению j соответствовало большее значение параметра t_j.

Напомним, что расстояние в сферической метрике между точками $\alpha = (\psi_\alpha, \varphi_\alpha)$ и $\beta = (\psi_\beta, \varphi_\beta)$ определяется по формуле

$$\rho(\alpha, \beta) = \arcsin\sqrt{\sin^2\Big(\frac{\psi_\alpha - \psi_\beta}{2}\Big) + \sin^2\Big(\frac{\varphi_\alpha - \varphi_\beta}{2}\Big)\cos\psi_\alpha\cos\psi_\beta}.$$

Покажем, что существуют точки $c_j^- = \tilde{\gamma}(t_j^-)$, $2 \leq j \leq q$, и $c_j^+ = \tilde{\gamma}(t_j^+)$, $1 \leq j \leq q-1$ кривой $\tilde{\gamma}$ такие, что $\rho(b_j, c_j^+) = \rho(b_j, c_j^-) = \frac{\delta}{4}$, и $t_j - \frac{1}{2} \leq t_j^- < t_j < t_j^+ \leq t_j + \frac{1}{2}$ (Рис. 2).

Рассмотрим непрерывную функцию $\omega_j(t) = \rho(b_j, \tilde{\gamma}(t))$. По определению t_j имеем $\rho(b_j, c_j) = \dfrac{|\psi_j + \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}t_j|}{2} \leq \frac{\delta}{8}$. С другой стороны,

$$\rho\Big(\tilde{\gamma}(t_j - \frac{1}{2}), \tilde{\gamma}(t_j)\Big) = \arcsin\sqrt{\sin^2\frac{\delta}{8} + \cos\psi_j\cos(\psi_j - \delta/4)}.$$

По выбору точки O^* $-\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2} \leq \psi_j \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}$. Таким образом,

$$\rho\Big(\tilde{\gamma}(t_j - \frac{1}{2}), \tilde{\gamma}(t_j)\Big) \geq \arcsin\sqrt{\sin^2\frac{\delta}{8} + \sin\frac{\delta}{4}\sin\frac{\delta}{2}} = \arcsin\sqrt{\frac{1 - \cos\frac{3\delta}{4}}{2}} = \frac{3\delta}{8}.$$

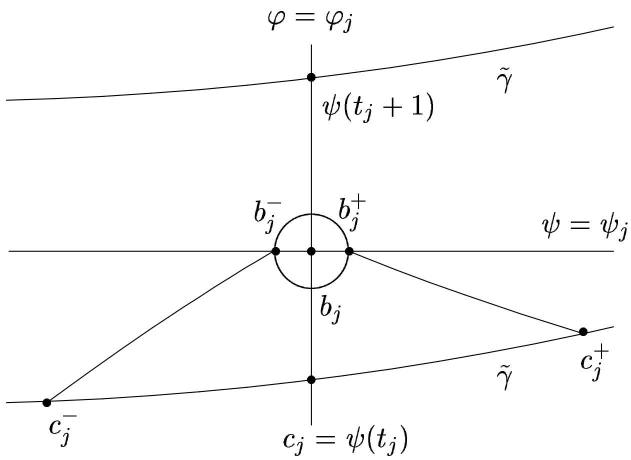

Рис. 2.

Из последних соотношений получаем

$$\omega\Big(t_j - \frac{1}{2}\Big) \geq \rho\Big(\tilde\gamma(t_j), \tilde\gamma\big(t_j - \frac{1}{2}\big)\Big) - \rho\Big(b_j, \tilde\gamma(t_j)\Big) \geq \frac{3\delta}{8} - \frac{\delta}{8} = \frac{\delta}{4}.$$

Из непрерывности $\omega_j(t)$ следует существование решения уравнения $\omega_j(t) = \delta/4$ на отрезке $[t_j - \frac{1}{2}, t_j]$. Через t_j^- обозначим максимальное решение* Подобным образом t_j^+ определим как минимальное решение уравнения $\omega(t) = \frac{\delta}{2}$ на отрезке $[t_j, t_j + \frac{1}{2}]$. Из построения также вытекает, что $t_j^- \geq t_{j-1}^+$, $j = 2, \ldots, q$.

Далее, пусть b_j^- и b_j^+ точки пересечения сферической окружности с центром в точке b_j радиуса $\frac{\delta}{32}$ с параллелью $\psi = \psi_j$, причем при движении от b_j^- до b_j^+ по кратчайшей части параллели слева остаются точки с большими значениями широты. Для $j = 2, \ldots, q-1$ соединим c_j^- с b_j^- и b_j^+ с c_j^+ кратчайшими дугами больших окружностей и дуги $c_j^- c_j^+$ кривой $\tilde\gamma$ заменим объединением $c_j^- b_j^- \cup b_j^- b_j^+ \cup b_j^+ c_j^+$, где $b_j^- b_j^+$ — меньшая по длине часть параллели $\psi = \psi_j$ (Рис. 2). Отбросим теперь дуги $\tilde\gamma$ до b_1 и после b_q.

Параметризуем полученное множество так, чтобы для полученной кривой $\gamma^*(t) = (\psi^*(t), \varphi^*(t))$ выполнялось $\varphi(t) = \varphi^*(t)$ для всех $t \in [t_1, t_q]$.

*На самом деле можно показать, что на $[t_j - \frac{1}{2}, t_j]$ решение уравнения $\omega_j(t) = \frac{\delta}{4}$ единственно.

Покажем, что γ^* обладает требуемыми свойствами.

Регулярность γ^* очевидна, поскольку γ^* состоит из частей регулярной кривой $\tilde{\gamma}$, конечного числа дуг больших диаметров и параллелей.

Зафиксируем j, $1 \le j \le q-1$. Предположим, от противного, что некоторая точка $p_t \in b_j b_{j+1}$ кривой γ^* попадает в $\frac{\delta}{16}$-окрестность точки b_i, $i \ne j, j+1$. Отметим, что по построению в $U^{\frac{\delta}{4}}(b_j)$ мы изменили только части дуг $c_{j-1}c_j$ $(2 \le i \le q)$ и $c_j c_{j+1}$ $(1 \le i \le q-1)$ кривой $\tilde{\gamma}(t)$, долгота которых φ удовлетворяет неравенству $|\varphi - \varphi_j| \le \pi$. Поэтому точка p_t является точкой кривой $\tilde{\gamma}(t)$, т.е. $p_t = (\psi(t), \varphi(t))$. Из неравенства $\rho(p_t, b_j) \le \frac{\delta}{16}$ выводим $|\psi(t) - \psi_j| \le \frac{\delta}{8}$.

Очевидно, что $|\varphi(t) - (\varphi_i + 2\pi k)| \le \pi$ для k, равного либо 1, либо -1. Пусть для определенности $k = 1$, случай $k = -1$ рассматривается аналогично. Возможны два варианта: i) $|t - t_i + 1| \ge \frac{1}{4}$, ii) $|t - t_i + 1| < \frac{1}{4}$. В соответствии с выбором точки O^* и построением γ^* выполняется $-\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2} \le \psi(t) \le \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}$. Поэтому в случае i) получаем $|\varphi(t) - \varphi(t_j + 1)| \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ и

$$\rho(p_t, b_i) > \arcsin\sqrt{\sin^2\frac{\varphi(t) - \varphi(t_{i+1})}{2}\cos\psi(t)\cos\psi_j} \ge \arcsin\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\delta}{2}\Big) > \frac{\delta}{16},$$

что противоречит преположению $p_t \in U^{\delta/16}(b_i)$.

В случае ii) получаем $\psi(t) > \psi(t_j + 1 - \frac{1}{4}) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}t_j + \frac{3\delta}{8}$. С другой стороны, $\psi_j \le \psi(t_j) + \frac{\delta}{4} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}t_j + \frac{\delta}{4}$. Отсюда $\psi(t) - \psi_j > \frac{\delta}{8}$, что противоречит $\rho(p_t, b_j) \le \frac{\delta}{16}$.

Следовательно, ни одна точка p_t кривой $\gamma^*(t)$, не принадлежащая $b_j b_{j+1}$ не попадает в $\overline{U}^{\frac{\delta}{16}}(b_j)$. Свойство а) доказано.

Докажем б). Пусть $\alpha = (\psi_\alpha, \varphi_\alpha) \in \gamma_i$, $\beta = (\psi_\beta, \varphi_\beta) \in \gamma_j$, $i < j$, — произвольные точки. Поскольку $\varphi^*(t) = \varphi(t) = 2\pi t$, то из неравенства $|\psi_\alpha - \psi_\beta| > \frac{\delta}{16}$ следует, что $\rho(\alpha, \beta) > \frac{\delta}{32}$. В противном случае, очевидно, $i + 1 = j$ и $\rho(\alpha, \beta) \ge \rho(b_j^-, b_j^+)$, где $b_j^- = (\psi_j, \hat{\varphi}_j^-)$, $b_j^+ = (\psi_j, \hat{\varphi}_j^+)$. Тогда из $\rho(b_j^-, b_j) = \rho(b_j, b_j^+) = \frac{\delta}{32}$ следует, что $\sin\big(\frac{\hat{\varphi}_j^\pm - \varphi_j}{2}\big) = \frac{\sin\frac{\delta}{32}}{\cos\psi_j}$, откуда

$$\rho(b_j^-, b_j^+) = \cos\psi_j \sin\Big(2\arcsin\big(\frac{\delta}{32\cos\psi_j}\big)\Big)$$
$$= \frac{\delta}{16}\sqrt{1 - \big(\frac{\delta}{32\cos\psi_j}\big)^2} \ge \frac{\delta}{16}\sqrt{1 - \big(\frac{\delta}{32\sin\delta}\big)^2} > \frac{\delta}{16}.$$

Свойство б) доказано.

Докажем в). Так как для элемента длины ds на сфере $\mathcal{S}$ имеем $ds = \frac{1}{2}\sqrt{(d\psi)^2 + \cos^2\psi(d\varphi)^2}$, то

$$|\tilde{\gamma}| = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi/\delta} \sqrt{\psi'(t)^2 + \varphi'(t)^2\cos^2\psi(t)}\,dt = \frac{1}{\delta}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + 4\pi^2\cos^2\psi}\,d\psi$$
$$\leq \frac{\pi}{\delta}\pi\sqrt{\frac{1}{4} + 16} < \frac{5\pi^2}{\delta}.$$

По построению $|c_jc_j^-| \geq \frac{\delta}{8}$, $|c_jc_j^+| \geq \frac{\delta}{8}$. Откуда

$$|c_j^-b_j^-| + |b_j^-b_j^+| + |b_j^+c_j^+| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{16} < \frac{9}{4}|c_j^-c_j^+|$$

и $|\gamma^*| \leq \frac{9}{4}|\tilde{\gamma}| \leq \frac{12\pi^2}{\delta}$.

По посторению γ^* и доказанным свойствам а) и б) для произвольных $d' < \frac{\delta}{64}$ и $p \in \mathcal{S}$ в d'-окрестность точки p попадет не более двух дуг больших окружностей, параллелей и кривой $\tilde{\gamma}$. Поскольку каждая из этих дуг не превосходит $4d'$, то за $\tilde{h}$ в определении сильной регулярности можна взять 8 при $d = \frac{\delta}{64}$.

Лемма доказана.

Список литературы

[1] *Г.А. Барсегян*, Свойство близости a-точек мероморфных функций и структура однолистных областей римановых поверхностей. — *Изв. АН АрмССР* (1985), т. 20, №№ 5,6, с. 375–400, 407–425.

[2] *С. Стоилов*, Теория функций комплексного переменного. Т. 2. — Изд-во иностр. лит., Москва (1962).

[3] *Л. Альфорс*, К теории поверхностей наложения. — *Успехи мат. наук* (1939), вып. 6, с. 222–250.

[4] *Г.А. Барсегян, Г. А. Сукиасян*, Свойство близости для мероморфных функций с близкими нулями и полюсами. — *Изв. АН АрмССР* (1990), т. 25, № 1, с. 21–33.

[5] *А.А. Гольдберг, И.В. Островский*, Распределение значений мероморфных функций.. — Наука, Москва (1970).

[6] *Г.А. Барсегян*, Свойство близости a-точек мероморфных функций. — *Мат. сб.* (1983), т. 120 (162), № 1, с. 42–67.

Closeness of a-points property and structure of Riemann's surfaces from F_q class

I.E. Chyzhykov

We improve G. Barsegyan's result on one-sheet filling domains for meromorphic functions f such that the Riemann surface of the function f^{-1} belongs to F_q class. In particular, a sharp estimate for quantity of these domains is obtained.

Властивість близькості a-точок і структура ріманових поверхонь класу F_q

I.E. Чижиков

У статті уточнюється результат Г. Барсегяна про однолисті області наповнення для мероморфних функцій f таких, що ріманова поверхня функції f^{-1} належить до класу F_q. Зокрема, отримано точну оцінку для кількості таких областей.