Математическая физика, анализ, геометрия
2002, т. 9, № 1, с. 66–78

Тантрисы кривых в пространствах постоянной кривизны S^3 и H^3

Л.А. Масальцев

Механико-математический факультет
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина
E-mail:masaltsev@univer.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 31 августа 2001 г.
Представлена А.А. Борисенко

Изучаются касательные индикатрисы кривых в пространствах постоянной кривизны S^3 и H^3. Решается задача восстановления кривой в пространствах S^3 и H^3 по заданной индикатрисе.·

Вивчаються дотичні індикатриси кривих у просторах постійної кривини S^3 і H^3. Вирішується задача відновлення кривої в S^3 і H^3 по заданій індикатрисі.

В статьях Дж. Вайнера [1] и Б. Соломона [2] обсуждался вопрос: когда погруженная кривая в S^2, гомеоморфная окружности, является касательной индикатрисой (тантрисой) другой замкнутой сферической кривой. В [1] доказана теорема: погруженная окружность в S^2 образует тантрису некоторой другой сферической кривой тогда и только тогда, когда ее полная геодезическая кривизна равна нулю и она не содержит никакой дуги с полной геодезической кривизной π. Отсюда следует теорема Якоби [3] о том, что индикатриса главных нормалей замкнутой пространственной кривой в R^3 с ненулевой кривизной, будучи вложенной в S^2, делит площадь сферы пополам. В этом смысле Б. Соломон справедливо отмечает, что в классические руководства целесообразнее было бы включать теорему Дж. Вайнера, а не Якоби, которая является ее следствием. Заметим, что данный вопрос не является новым и уже обсуждался в отечественной литературе в статьях М. Выгодского [4], М.Г. Крейна [5], Ю.А. Аминова [6, 7]. В большой статье В.И. Арнольда [8] рассмотрены более общие объекты — волновые фронты на S^2 — и указано необходимое и достаточное условие на иммерсированную в S^2 кривую, при котором она является производной (тантрисой) замкнутого

· Mathematics Subject Classification 2000: 53A04.

волнового фронта: площадь некоторой характеристической 2-цепи, ограниченной данной кривой, должна быть кратной 2π.

В данной статье рассматривается вариант сферической индикатрисы кривой (параметризованной длиной дуги) в пространстве постоянной кривизны S^3 (или H^3), который получается путем параллельного переноса касательных векторов в фиксированную точку пространства. При этом удается перенести результаты Дж. Вайнера с евклидова на сферический и гиперболический случаи: приводятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы заданная сферическая кривая была тантрисой сферической кривой пространства S^3 (теорема 3) или трехмерного пространства Лобачевского H^3 (теорема 6).

Автор благодарен рецензенту за замечания, корректирующие содержание работы.

1. Тантриса гладкой кривой в S^3

Рассмотрим следующий вариант касательной индикатрисы гладкой кривой $r(t) = (x(t), y(t), z(t), w(t)) \subset S^3$, причем считаем, что t является длиной дуги, т.е. $x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 + w'(t)^2 = 1$. Пусть m — некоторая фиксированная точка S^3. Соединим точку m и $r(t)$ геодезической γ в S^3 и перенесем вектор $r'(t)$ параллельно вдоль γ из точки $r(t)$ в m. При этом результат Tr' параллельного переноса вектора r' принадлежит единичной сфере касательного пространства T_mS^3. Назовем тантрисой (индикатрисой касательной) кривой $r(t)$ в сфере S^3, параметризованной длиной дуги t, сферическую кривую $Tr'(t)$. Конечно, вид тантрисы зависит от выбора точки m, однако, как будет видно дальше, для некоторых кривых он имеет некоторые инвариантные относительно выбора m свойства. Установим вид тантрисы кривой $r(t) = (x(t), y(t), z(t), w(t)) \subset S^3$. В качестве точки m возьмем $(0,0,0,1)$, и пусть кривая $r(t)$ не проходит через ее диаметрально противоположную точку $(0,0,0,-1)$.

Теорема 1. *Тантриса Tr' кривой $r(t) \subset S^3$ в $T_{(0,0,0,1)}S^3$ имеет следующее уравнение:*

$$Tr' = A_t r'(t)$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\frac{x^2}{1+w} & -\frac{xy}{1+w} & -\frac{xz}{1+w} & -x \\ -\frac{xy}{1+w} & 1-\frac{y^2}{1+w} & -\frac{yz}{1+w} & -y \\ -\frac{xz}{1+w} & -\frac{yz}{1+w} & 1-\frac{z^2}{1+w} & -z \\ x & y & z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} = (1+w) \begin{pmatrix} \left(\frac{x}{1+w}\right)' \\ \left(\frac{y}{1+w}\right)' \\ \left(\frac{z}{1+w}\right)' \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Последнее равенство означает, что сферическая тантриса кривой $r(t) \subset S^3$ в $T_{(0,0,0,1)}S^3$, которое можно отождествить с подпространством $w = 1$, *совпадает (после параллельного переноса пространства* R^4*:* $(x,y,z,w) \to (x,y,z,w-1)$*) с евклидовой тантрисой кривой* $r_1(t) = \left(\frac{x}{1+w}, \frac{y}{1+w}, \frac{z}{1+w}\right)$*, которая является стереографической проекцией* $r(t)$ *на подпространство* $w=0$ *из диаметрально противоположной точки* $(0,0,0,-1)$.

Доказательство. Уравнение геодезической S^3, соединяющей точку $r=(x,y,z,w)$ с точкой $(0,0,0,1)$, имеет вид $\gamma(s) = r\cos s + v\sin s$. Вектор касательной v к геодезической γ в точке r есть

$$v = \left(-\frac{wx}{\sqrt{1-w^2}},\ -\frac{wy}{\sqrt{1-w^2}},\ -\frac{wz}{\sqrt{1-w^2}},\ \sqrt{1-w^2}\right).$$

Очевидно, $|v|=1$, $<r,v>=0$ и геодезическая γ попадает в точку $(0,0,0,1)$ при значении $s_1 = \arccos w$. Вычисляем касательный вектор $\gamma'(s_1) = -\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}(x,y,z,0)$. В силу известных свойств трансвекции в симметрических римановых пространствах [9, с. 179] оператор T представляет собой некоторую матрицу $A_t \in SO(4)$, удовлетворяющую следующим условиям: 1) $A_t(x,y,z,w)^t = (0,0,0,1)^t$; 2) $A_t v^t = \gamma'(s_1)^t$, где верхний индекс t означает транспонирование; 3) на подпространстве, ортогональном r и v, изометрия A_t действует тождественно. Дополним векторы $e_1 = r, e_2 = v$ до базиса в R^4 векторами $e_3 = (y^2+z^2)^{-1/2}(0,-z,y,0)^t$ и $e_4 = ((x^2+y^2+z^2)(y^2+z^2))^{-1/2}(y^2+z^2,-xy,-xz,0)^t$. Очевидно, A_t действует в данном базисе следующим образом:

$$\begin{aligned}
A_te_1 &= \cos s_1 e_1 + \sin s_1 e_2 = (0,0,0,1)^t,\\
A_te_2 &= -\sin s_1 e_1 + \cos s_1 e_2 = \gamma'(s_1),\\
A_te_3 &= e_3, \quad A_te_4 = e_4.
\end{aligned}$$

Преобразование A_t в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 имеет вид

$$\overline{A}_t = \begin{pmatrix} w & \sqrt{1-w^2} & 0 & 0\\ -\sqrt{1-w^2} & w & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в исходном базисе преобразование будет иметь вид $A_t = C^{-1}\overline{A}_tC$, где C — матрица перехода базисов. Вычисления дают вид A_t, который приведен в формулировке теоремы. Последнее равенство $A_tr'(t) = (1+w)\left((\frac{x}{1+w})', (\frac{y}{1+w})', (\frac{z}{1+w})', 0\right)^t$ проверяется вычислением. ■

Следующее утверждение вытекает из полученной формулы.

Следствие 1. *Тантриса сферической кривой эквивариантна относительно изометрий S^3, фиксирующих точку m, т.е. $T(\phi r)' = \phi_* Tr'$.*

Действительно, изометрия S^3, оставляющая неподвижной точку $(0,0,0,1)$, имеет вид

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\phi_1 \in O(3)$. Тогда $\phi(x,y,z,w)^t = (\phi_1(x,y,z),w)^t$. Следовательно,

$$\begin{aligned} T\phi r' &= (1+w)\left((\frac{(\phi_1 r)_x}{1+w})', (\frac{(\phi_1 r)_y}{1+w})', (\frac{(\phi_1 r)_z}{1+w})', 0 \right)^t \\ &= (1+w)\left(\phi_1((\frac{x}{1+w})', (\frac{y}{1+w})', (\frac{z}{1+w})')^t, 0 \right)^t \\ &= \phi_*(1+w)\left((\frac{x}{1+w})', (\frac{y}{1+w})', (\frac{z}{1+w})', 0 \right)^t. \end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо ввиду того, что в точке $(0,0,0,1)$ дифференциал ϕ_* совпадает с ϕ. ■

По форме тантрисы Tr' кривой r в S^3 можно восстановить саму кривую.

Теорема 2. *Пусть $Tr' = (\alpha(t),\beta(t),\gamma(t))^t$ тантриса кривой $r = (x(t),y(t),z(t),w(t))^t$ в S^3. Тогда*

$$x(t) = \frac{2\overline{\alpha}}{1+\overline{\alpha}^2+\overline{\beta}^2+\overline{\gamma}^2}, \quad y(t) = \frac{2\overline{\beta}}{1+\overline{\alpha}^2+\overline{\beta}^2+\overline{\gamma}^2},$$

$$z(t) = \frac{2\overline{\gamma}}{1+\overline{\alpha}^2+\overline{\beta}^2+\overline{\gamma}^2}, \quad w(t) = \frac{1-\overline{\alpha}^2-\overline{\beta}^2-\overline{\gamma}^2}{1+\overline{\alpha}^2+\overline{\beta}^2+\overline{\gamma}^2},$$

где

$$\overline{\alpha}(t) = \int \alpha(t)dt, \quad \overline{\beta}(t) = \int \beta(t)dt, \quad \overline{\gamma}(t) = \int \gamma(t)dt.$$

Доказательство. Как следует из теоремы 1, процесс восстановления r можно разбить на два шага: 1) сначала восстановить кривую $(\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma})$ в R^3, для которой (α,β,γ) является евклидовой тантрисой, 2) восстановить прообраз в S^3 при стереографической проекции кривой $(\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma})$, лежащей в подпространстве $w=0$. Первый шаг выполняется интегрированием, а второй — обращением формул $\overline{\alpha} = \frac{x}{1+w}, \overline{\beta} = \frac{y}{1+w}, \overline{\gamma} = \frac{z}{1+w}$. ■

В частности, 1) прообразом постоянного отображения $(\alpha(t),\beta(t),\gamma(t)) = (a_0,b_0,c_0)$ служат окружности, 2)прообразом больших окружностей также служат окружности [10, с. 55].

2. Полная геодезическая кривизна тантрисы замкнутой кривой в S^3

Пусть в S^3 дана замкнутая гладкая кривая $r(t) = (x(t), y(t), z(t), w(t))$ класса C^3, параметризованная длиной дуги. Предположим, что $w(t) \neq -1$ и рассмотрим ее стереографическую проекцию $r_1 = \left(\frac{x}{1+w}, \frac{y}{1+w}, \frac{z}{1+w}\right)$ на подпространство $w = 0$ из точки $(0,0,0,-1)$. Обозначим через k_2, σ кручение и длину дуги кривой r_1, а через k_g, s — геодезическую кривизну и длину дуги тантрисы Tr' на единичной сфере в $T_{(0,0,0,1)}S^3$.

Лемма 1. *В указанных обозначениях имеют место следующие равенства:*

$$\begin{aligned} 1)\ d\sigma &= \frac{1}{1+w}\,dt, \\ 2)\ ds &= \sqrt{(1+w)^2(r_1'')^2 - w'^2(1+w)^{-2}}\,dt, \\ 3)\ k_g &= \frac{(1+w)^3(r_1''', r_1'', r_1')}{\left((1+w)^2(r_1'')^2 - (1+w)^{-2}w'^2\right)^{3/2}}, \\ 4)\ k_2 &= -\frac{(r_1''', r_1'', r_1')}{(1+w)^{-2}(r_1'')^2 - (1+w)^{-6}w'^2}. \end{aligned}$$

Доказательство. Поскольку $Tr' = (1+w)r_1'$ и T — изометрия, то $|Tr'| = |r'| = 1 = (1+w)|r_1'|$. Следовательно, $|r_1'| = (1+w)^{-1}$ и 1) доказано.

Для доказательства 2) воспользуемся уравнением $Tr' = (1+w)r_1'$. Продифференцировав его, получим

$$\begin{gathered} (Tr')' = r_1''(1+w) + r_1'w', |Tr'|^2 = (r_1'')^2(1+w)^2 + 2w'(1+w) < r_1', r_1'' > \\ +w'^2 {r_1'}^2 = (r_1'')^2(1+w)^2 + 2w'(1+w)^{-2}(-w') + (1+w)^{-2}w'^2 \\ = (1+w)^2(r_1'')^2 - (1+w)^{-2}w'^2. \end{gathered}$$

Здесь использовано равенство

$$2 < r_1', r_1'' > = \frac{d}{dt}(r_1')^2 = \frac{d}{dt}(1+w)^{-2} = -2w'(1+w)^{-3}.$$

Для вычисления геодезической кривизны тантрисы Tr' на единичной сфере используем следующую формулу [11, с. 148]:

$$\begin{gathered} k_g = \frac{((Tr')'', (Tr')', n)}{|(Tr')'|^3} = \frac{((Tr')'', (Tr')', Tr')}{|(Tr')'|^3} \\ = \frac{(w''r_1' + 2w'r_1'' + (1+w)r_1''', w'r_1' + (1+w)r_1'', (1+w)r_1')}{(|Tr')'|^3}. \end{gathered}$$

Здесь мы воспользовались уравнением $r_1'(1+w) = Tr'$ и следствиями, которые получаются при его дифференцировании. Упрощая смешанное произведение, получим формулу для k_g.

Вычислим кручение k_2 кривой r_1

$$k_2 = -\frac{(r_1', r_1'', r_1''')}{|r_1' \times r_1''|^2}$$

$$= -\frac{(r_1', r_1'', r_1''')}{(r_1')^2(r_1'')^2 - < r_1', r_1'' >^2} = -\frac{(r_1', r_1'', r_1''')}{(1+w)^{-2}(r_1'')^2 - (1+w)^{-6}w'^2}.$$

■

Теорема 3. *1) Погруженная окружность в S^2 образует тантрису некоторой сферической кривой в S^3 тогда и только тогда, когда она имеет полную геодезическую кривизну нуль и не содержит никакой дуги с полной геодезической кривизной π. Если тантриса не имеет самопересечений в S^2, то она ограничивает область на сфере площадью 2π.*

2) Для тантрисы произвольной кривой $\int k_g ds = -\int k_2 d\sigma$ (интеграл слева оценивает геодезическую кривизну тантрисы Tr' на S^2, а интеграл справа дает соответствующее интегральное кручение стереографической проекции кривой r на R^3).

Доказательство. 1) Из теоремы 1 следует, что тантриса замкнутой гладкой кривой $r(t) = (x(t), y(t), z(t), w(t))$ совпадает с тантрисой кривой $r_1(t) = (\frac{x}{1+w}, \frac{y}{1+w}, \frac{z}{1+w})$ в R^3. Если кривая $r(t)$ расположена на некоторой малой сфере $S^2(a) \subset S^3$, то в силу известных свойств мебиусовых преобразований $r_1(t)$ будет лежать на некоторой сфере в R^3. Поэтому можно применить теорему Вайнера из [1], которая дает необходимое и достаточное условие на то, чтобы сферическая кривая была тантрисой некоторой другой сферической кривой в R^3.

2) Утверждение следует из леммы 1. ■

Замечание. В [2] теорема Вайнера доказана другим способом с использованием параллельного векторного поля вдоль тантрисы. Можно также предложить следующее простое доказательство того факта, что $\int k_g ds = 0$ для замкнутой тантрисы гладкой сферической кривой $r(t) \subset R^3$ с необращающейся в нуль кривизной k_1. Если $|r(t)| = a = const$ и $|r'(t)| = 1$, то геодезическая кривизна ее тантрисы есть $k_g = \frac{(r', r'', r''')}{|r''|^3}$. Используя известные формулы для кривизны и кручения кривой $r(t)$ в R^3, получим $k_g = -\frac{k_2}{k_1}$ и для дифференциала длины дуги s тантрисы r': $ds = k_1 dt$. Поэтому $\int k_g ds = -\int k_2 dt$.

Поскольку $r(t)$ — сферическая кривая на $S^2(a)$, то ее кривизна и кручение связаны следующим образом ([12, с. 61]): $a^2 = \frac{1}{k_1^2}(1 + \frac{(k_1')^2}{(k_1 k_2)^2})$, откуда имеем $k_2 = -\frac{d}{dt}(\arcsin \frac{1}{ak_1})$. Поэтому, интегрируя по замкнутой кривой, получим нуль.

Как показывает следующий пример, прямое обобщение теоремы Якоби об индикатрисе главных нормалей в ситуации, когда объемлющим пространством является S^3, не имеет места. Таким образом, вложенная индикатриса главной нормали замкнутой кривой в S^3, вообще говоря, не делит площадь сферы пополам.

П р и м е р. Рассмотрим окружность в S^3, параметризованную длиной дуги: $r(t) = (\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\sqrt{2}t, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^t$. Касательный вектор $r' = \tau = (-\sin\sqrt{2}t, \cos\sqrt{2}t, 0, 0)^t$. Вычислим главную нормаль ν. По формуле Френе $\frac{D\tau}{dt} = k_1\nu$. Но $\frac{D\tau}{dt} = Pr_{T_{r(t)}S^3}\frac{d\tau}{dt}$, поскольку связность в S^3 есть проекция связности в R^4 на касательное пространство. Проекция вектора $\frac{d\tau}{dt} = -\sqrt{2}(\cos\sqrt{2}t, \sin\sqrt{2}t, 0, 0)^t$ в R^4 на нормаль к сфере $n(t) = r(t)$ есть $Pr_{n(t)}\frac{d\tau}{dt} = < \frac{d\tau}{dt}, r >= -1$. Следовательно,

$$\frac{D\tau}{dt} = \frac{d\tau}{dt} - Pr_n\frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau}{dt} + r(t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\sqrt{2}t, -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Далее, $|\frac{D\tau}{dt}|^2 = k_1^2 = 1$. Следовательно, $\nu = \frac{D\tau}{dt}$. Оператор параллельного переноса A_t в данном примере есть

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\cos^2\sqrt{2}t}{3} & -\frac{\sin 2\sqrt{2}t}{6} & -\frac{\cos\sqrt{2}t}{3\sqrt{2}} & -\frac{\cos\sqrt{2}t}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sin 2\sqrt{2}t}{6} & 1 - \frac{\sin^2\sqrt{2}t}{3} & -\frac{\sin\sqrt{2}t}{3\sqrt{2}} & -\frac{\sin\sqrt{2}t}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\cos\sqrt{2}t}{3\sqrt{2}} & -\frac{\sin\sqrt{2}t}{3\sqrt{2}} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\cos\sqrt{2}t}{\sqrt{2}} & \frac{\sin\sqrt{2}t}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Вычислением проверяем, что 1) $Tr' = (-\sin\sqrt{2}t, \cos\sqrt{2}t, 0, 0)^t$, т.е. индикатриса касательной есть большая окружность, и она, естественно, делит площадь сферы пополам; 2) $T\nu = A_t\nu = -\frac{4}{3\sqrt{2}}(\cos\sqrt{2}t, \sin\sqrt{2}t, 0, 0)^t$, т.е. индикатриса главной нормали есть окружность радиуса $\frac{4}{3\sqrt{2}}$, и она не делит площадь пополам.

3. Тантриса гладкой кривой в H^3

Рассмотрим гладкую кривую в пространстве Лобачевского H^3 в модели Пуанкаре в верхнем полупространстве $R^3_+, z > 0$ с метрикой $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{z^2}$. Считаем, что гладкая кривая $r(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in (\alpha, \beta)$ параметризована длиной дуги, т.е. $x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2 = z(t)^2$. Как и в разделе 1, тантрисой кривой $r(t) \subset H^3$ назовем трансвекцию Tr' единичного касательного вектора $r'(t)$ в фиксированную точку $m \in H^3$. В дальнейшем это будет точка $(0,0,1)$.

Теорема 4. *Тантриса Tr' кривой $r(t) \subset H^3$ в $T_{(0,0,1)}H^3$ имеет следующее уравнение:*

$$Tr'(t) = A_t r'(t) = \frac{1}{z(x^2+y^2+(z+1)^2)}$$

$$\times \begin{pmatrix} (z+1)^2+y^2-x^2 & -2xy & -2x(z+1) \\ -2xy & (z+1)^2+x^2-y^2 & -2y(z+1) \\ 2x(z+1) & 2y(z+1) & (z+1)^2-x^2-y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$= \frac{x^2+y^2+(z+1)^2}{z} \begin{pmatrix} \left(\frac{x}{x^2+y^2+(z+1)^2}\right)' \\ \left(\frac{y}{x^2+y^2+(z+1)^2}\right)' \\ \left(\frac{-z-1}{x^2+y^2+(z+1)^2}\right)' \end{pmatrix}.$$

Последнее равенство означает, что тантриса Tr' кривой $r(t) \subset H^3$ совпадает (после трансляции в R^3: $(x,y,z) \to (x,y,z-1)$) с евклидовой тантрисой кривой $r_1(t)$

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2+(z+1)^2}, \frac{y}{x^2+y^2+(z+1)^2}, \frac{-z-1}{x^2+y^2+(z+1)^2}+1\right),$$

которая получается из $r(t)$ инверсией в R^3 относительно единичной сферы с центром $(0,0,-1)$ с последующим зеркальным отражением относительно плоскости $z=0$.

Доказательство. Воспользуемся следующим утверждением, доказанным в [13, лемма 1]: трансвекция вектора $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$ из точки $M(x,y,z)$ в точку $M'(x',y',z')$ представляет собой линейное преобразование $T\lambda = \frac{z'}{z} A_\phi \lambda$, где A_ϕ есть вращение на угол ϕ вокруг оси l, лежащей в плоскости $z=0$ и проходящей через центр $C(x_c,y_c,0)$ окружности, которая представляет геодезическую MM'. Ось l перпендикулярна плоскости, в которой расположена геодезическая MM'. Угол вращения ϕ равен углу $\angle MCM'$; координаты центра окружности такие: $x_c = \frac{x+x'}{2} + \frac{(x-x')(z^2-z'^2)}{2((x-x')^2+(y-y')^2)}$, $y_c = \frac{y+y'}{2} + \frac{(y-y')(z^2-z'^2)}{2((x-x')^2+(y-y')^2)}$.

Поскольку в роли точки M' выбрана точка $(0,0,1)$, то направляющий вектор оси l есть $(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0)$. Для вычисления угла ϕ рассмотрим равнобедренный треугольник MCM', в котором $d = MM' = \sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}$,

$R_0^2 = MC^2 = \frac{x^2+y^2}{4}(1-\frac{z^2-1}{x^2+y^2})^2 + z^2$, $\sin\frac{\phi}{2} = \frac{d}{2R_0}$. Отсюда находим $\cos\phi = 1-\frac{d^2}{2R_0^2}$, $\sin\phi = \frac{d\sqrt{4R_0^2-d^2}}{2R_0^2}$.

Затем используем следующий факт из аналитической геометрии: вращение на угол ϕ вокруг оси $l = (\alpha,\beta,\gamma), \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$, проходящей через начало координат, представлено следующей ортогональной матрицей:

$$A_\phi = \begin{pmatrix} \alpha^2+\cos\phi(\beta^2+\gamma^2) & (1-\cos\phi)\alpha\beta-\sin\phi\gamma & (1-\cos\phi)\alpha\gamma+\sin\phi\beta \\ (1-\cos\phi)\alpha\beta+\sin\phi\gamma & \beta^2+\cos\phi(\alpha^2+\gamma^2) & (1-\cos\phi)\beta\gamma-\sin\phi\alpha \\ (1-\cos\phi)\alpha\gamma-\sin\phi\beta & (1-\cos\phi)\beta\gamma+\sin\phi\alpha & \gamma^2+\cos\phi(\alpha^2+\beta^2) \end{pmatrix}.$$

Учитывая найденные значения l и тригонометрических функций угла ϕ, после некоторых вычислений получим следующее выражение для $A_\phi \in SO(3)$:

$$A_\phi = \frac{1}{x^2+y^2+(z+1)^2}$$

$$\times \begin{pmatrix} (z+1)^2+y^2-x^2 & -2xy & -2x(z+1) \\ -2xy & (z+1)^2+x^2-y^2 & -2y(z+1) \\ 2x(z+1) & 2y(z+1) & (z+1)^2-x^2-y^2 \end{pmatrix}.$$

Последнее равенство в формулировке теоремы проверяется прямым вычислением, а сам вид последнего вектор-столбца подсказывает подходящую композицию мебиусовых преобразований R^3. ■

З а м е ч а н и е. Поскольку $r(t) \subset H^3$, которое в данной модели совпадает с R^3_+, то кривая $r_1(t)$ будет содержаться в евклидовом шаре

$$B_{(0,0,1/2)}(1/2) = (x,y,z)|x^2+y^2+(z-1/2)^2 < 1/4.$$

Следствие 2. *Если m — неподвижная точка изометрии ϕ пространства H^3, то для любой гладкой кривой $r(t) \subset H^3$ справедливо равенство $T(\phi r)' = \phi_* Tr'$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если изометрия ϕ фиксирует точку $m \in H^3$, то она является эллиптической и существует единственная ось вращения, проходящая через m [11, предложение 2.5.4]. Ось пересекает сферу S^2 — бесконечно удаленную границу H^3 в двух точках, которые позволяют сориентировать ось Oz пространства H^3 так, чтобы точка m имела координаты $(0,0,1)$, а сама изометрия приняла вид

$$\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из вида ϕ следует, что функции $z(t)$ и $x(t)^2+y(t)^2+(z(t)+1)^2$ инвариантны относительно действия ϕ. Поскольку в неподвижной точке $(0,0,1)$ дифференцил ϕ_* совпадает с ϕ, то

$$T(\phi r)' = \frac{x^2+y^2+(z+1)^2}{z}\begin{pmatrix} \left(\frac{\phi(x)}{x^2+y^2+(z+1)^2}\right)' \\ \left(\frac{\phi(y)}{x^2+y^2+(z+1)^2}\right)' \\ \left(\frac{-z-1}{x^2+y^2+(z-1)^2}\right)' \end{pmatrix}.$$

■

Теорема 5. *Пусть $Tr'(t) = (\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$ — тантриса некоторой кривой $r(t) = (x(t), y(t), z(t)) \subset H^3$. Тогда*

$$x(t) = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}^2+\overline{\beta}^2+(\overline{\gamma}+1)^2}, \quad y(t) = \frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}^2+\overline{\beta}^2+(\overline{\gamma}+1)^2},$$

$$z(t) = \frac{-\overline{\gamma}-1}{\overline{\alpha}^2+\overline{\beta}^2+(\overline{\gamma}+1)^2}+1,$$

где функции

$$\overline{\alpha}(t) = \int \alpha(t)\,dt, \quad \overline{\beta}(t) = \int \beta(t)\,dt, \quad \overline{\gamma}(t) = \int \gamma(t)\,dt$$

удовлетворяют дополнительному условию $\overline{\alpha}^2+\overline{\beta}^2+(\overline{\gamma}-1/2)^2 < 1/4$.

Доказательство. Как следует из доказательства теоремы 4, гиперболическая тантриса кривой $r(t) \subset H^3$ совпадает с евклидовой тантрисой кривой $r_1(t) = (\frac{x}{x^2+y^2+(z+1)^2}, \frac{y}{x^2+y^2+(z+1)^2}, \frac{-z-1}{x^2+y^2+(z+1)^2}+1)$, погруженной в шар $B_{(0,0,1/2)}(1/2)$. Поэтому сначала надо восстановить кривую r_1 интегрированием, контролируя при этом условие принадлежности вектора $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma})$ шару $B_{(0,0,1/2)}(1/2)$. Затем следует найти образ кривой $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma})$ при композиции указанных в теореме 4 инволютивных мебиусовых преобразований. ■

Отметим некоторые частные случаи этой задачи. 1) Если $(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ — постоянный вектор, то $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma})$ будет семейством хорд в шаре $B_{(0,0,1/2)}(1/2)$, параллельных направлению (α, β, γ). При действии на него зеркального отражения и инверсии эти хорды перейдут в слои (дуги евклидовых окружностей) некоторого одномерного слоения в H^3. Поскольку всякая дуга евклидовой окружности с концами на бесконечно удаленной границе принадлежит пересечению некоторой вполне геодезической плоскости H^3 с псевдосферой, то кривизна каждого слоя постоянна. Следовательно, прообразами тантрисы-точки в H^3 будут слои одномерного слоения с послойно постоянной кривизной. 2) Если тантриса (α, β, γ) есть большая окружность, то $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma})$ являются также окружностями в $B_{(0,0,1/2)}(1/2)$. При композиции мебиусовых преобразований они перейдут в окружности в H^3.

4. Полная геодезическая кривизна тантрисы замкнутой кривой в H^3

.

Рассмотрим замкнутую гладкую класса C^3 кривую $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ в пространстве Лобачевского в модели Пуанкаре в R^3_+, параметризованную длиной дуги. Обозначим через $r_1(t)$ кривую в R^3, которая получается из $r(t)$ композицией двух мебиусовых преобразований: инверсии относительно единичной сферы с центром $(0, 0, -1)$ и зеркального отражения относительно плоскости $z = 0$. Ее уравнения имеют вид

$$r_1(t) = (\frac{x}{x^2 + y^2 + (z+1)^2}, \frac{y}{x^2 + y^2 + (Z+1)^2}, \frac{-z-1}{x^2 + y^2 + (z+1)^2} + 1).$$

Обозначим через σ и k_2 ее длину дуги и кручение. Пусть k_g и s обозначают геодезическую кривизну и длину дуги тантрисы Tr' на единичной сфере в касательном пространстве $T_{(0,0,1)}H^3$.

Лемма 2. *В указанных обозначениях имеют место следующие равенства:*

$$\begin{aligned}
1)\ d\sigma &= |r_1'|dt = \frac{dt}{F}, \quad \text{где } F = \frac{x^2 + y^2 + (z+1)^2}{z}, \\
2)\ k_2 &= -\frac{F^6(r_1''', r_1'', r_1')}{F^4|r_1''|^2 - F'^2}, \\
3)\ ds &= \sqrt{F^2|r_1''|^2 - F'^2F^{-2}}\, dt, \\
4)\ k_g &= \frac{F^3(r_1''', r_1'', r_1')}{(F^2|r_1''|^2 - F'^2F^{-2})^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Доказательство. 1) Поскольку $A_t \in SO(3)$, $|\frac{r'}{z}| = 1$ и $Fr_1' = A_t(\frac{r'}{z})$, то $|r_1'| = F^{-1}$.

2) Так как $2 < r_1', r_1'' > = < r_1', r_1')' = (F^{-2})' = -2F'F^{-3}$, то

$$k_2 = -\frac{(r_1''', r_1'', r_1')}{(r_1' \times r_1'')^2} = -\frac{(r_1''', r_1'', r_1')}{|r_1'|^2|r_1''|^2 - < r_1', r_1'' >^2}$$

$$= -\frac{(r_1''', r_1'', r_1')}{|r_1''|^2 F^{-2} - F'^2 F^{-6}}\,.$$

3) Так как $Tr' = Fr_1'$, то $\frac{ds}{dt} = |(Tr')'|$. Имеем $(Tr')' = (Fr_1')' = F'r_1' + Fr_1''$, поэтому

$$|(Tr')'|^2 = F'^2 r_1'^2 + 2FF' < r_1', r_1'' > + F^2 r_1''^2$$

$$= F'^2 F^{-2} + 2FF'(-F'F^{-3}) + F^2 |r_1''|^2 = F^2 |r_1''|^2 - F'^2 F^{-2}.$$

4) Вычислим геодезическую кривизну тантрисы на единичной сфере

$$k_g = -\frac{((Fr_1')'', (Fr_1')', Fr_1')}{|Tr'|^3} = -\frac{F^3 (r_1''', r_1'', r_1')}{(F^2 |r_1''|^2 - F'^2 F^{-2})^{3/2}}\,.$$

■

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 3.

Теорема 6. *1) Погруженная окружность в S^2 образует тантрису некоторой сферической кривой в H^3 тогда и только тогда, когда она имеет полную геодезическую кривизну нуль и не содержит никакой дуги с полной геодезической кривизной π. Если тантриса не имеет самопересечений в S^2, то она ограничивает область на сфере площадью 2π.*
2) Для тантрисы произвольной кривой $r(t) \subset H^3$ имеем $\int k_g ds = -\int k_2 d\sigma$.

Заметим, что в пространстве Лобачевского также нет прямого обобщения теоремы Якоби, т.е. индикатриса главных нормалей замкнутой кривой, вообще говоря, не делит площадь сферы пополам.

Список литературы

[1] *J. Weiner*, Flat tori in S^3 and their Gauss maps. — *Proc.London Math. Soc.* (1991), v. 62, No. 1, p. 54–76.

[2] *B. Solomon* , Tantrices of spherical curves. — *Amer. Math. Monthly* (1996), v. 103, No. 1, p. 30–39.

[3] *C.G.J. Jacobi*, Uber einige mercwurdige Curventheoreme. — *Astronomische Nachrichten* (1843), Bd. 20, S. 115–120.

[4] *М. Выгодский*, О замкнутых кривых с заданной индикатрисой касательных. — *Мат. сб.* (новая серия) (1945), т. 16, с. 73–80.

[5] *М. Крейн*, О теореме Выгодского. — *Мат. сб.* (новая серия) (1946), т. 18, с. 447–450.

[6] *Ю.А. Аминов*, Обобщение теорем Якоби и Эннепера о кривых. — *Укр. геом. сб.* (1979), вып. 22, с. 3–5.

[7] *Ю.А. Аминов*, Дифференциальная геометрия и топология кривых. Наука, Москва (1987).

[8] *В.И. Арнольд*, Геометрия сферических кривых и алгебра кватернионов. — *Успехи мат. наук* (1995), т. 50, № 1, с. 3–68.

[9] *В.В. Трофимов*, Введение в геометрию многообразий с симметриями. Изд-во. МГУ, Москва (1989).

[10] *W.P. Thurston*, Three-Dimensional Geometry and Topology. Princeton Univ. Press, Princeton (1997).

[11] *А.В. Погорелов*, Лекции по дифференциальной геометрии. Изд-во. ХГУ, Харьков (1967).

[12] *Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко*, Современная геометрия. Наука, Москва (1979).

[13] *Л.А. Масальцев*, Преобразование Бианки–Ли–Беклунда в пространствах постоянной кривизны $H^3(-1)$ и$S^3(1)$. — *Мат. физ., анализ, геом.* (1997), т. 4, № 1/2, с. 133–144.

Tantrices of curves in spaces of constant curature S^3 and H^3

L.A. Masaltsev

Tangent indicatrices of curves in spaces of constant curature S^3 and H^3 are studed. A problem of reconstruction of curve in S^3 and H^3 from the given indicatrix is solved.