Математическая физика, анализ, геометрия
2002, т. 9, № 3, с. 369–384

О сильных асимптотических местах голоморфных в круге функций

И.И. Марченко

Механико-математический факультет
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина

Szczecin University, Institute of Mathematics
15 Wielkopolska Str., Szczecin, 70451, Poland

E-mail:iim@ukr.net
marchenko@wmf.univ.szczecin.pl

И.Г. Николенко

Механико-математический факультет
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина

E-mail:nig@ukr.net

Статья поступила в редакцию 5 сентября 2001 г.

Представлена Г.М. Фельдманом

Для целых функций конечного порядка хорошо известна классическая теорема Альфорса о конечности множества асимптотических значений. В 1999 году один из авторов ввел понятие сильного асимптотического значения целых функций и получил аналог теоремы Альфорса для различных сильных асимптотических мест целых функций бесконечного порядка. В работе вводится понятие сильного асимптотического места голоморфной в круге функции. Получена точная оценка количества сильных асимптотических мест, отнесенных точке z_0, через величину отклонения $b(\infty, f)$, которую ввел для мероморфных в плоскости функций А. Еременко. В частности, если $b(\infty, f) > 0$, то количество сильных асимптотических мест будет конечным.

Mathematics Subject Classification 2000: 30D30, 30D35.
Исследование частично поддерживается грантом INTAS-99-0089.

Для цілих функцій скінченного порядку добре відома класична теорема Альфорса про скінченність множини асимптотичних значень. У 1999 році один із авторів запровадив поняття сильного асимптотичного значення цілих функцій та отримав аналог теореми Альфорса для різних сильних асимптотичних місць цілих функцій нескінченного порядку. В роботі запроваджується поняття сильного асимптотичного місця голоморфної у крузі функції. Отримано точну оцінку кількості сильних асимптотичних місць, віднесених до точки z_0, через величину відхилення $b(\infty, f)$, яку запровадив для мероморфних на всій площині функцій О. Єременко. Зокрема, якщо $b(\infty, f) > 0$, то кількість сильних асимптотичних місць буде скінченною.

Пусть $f(z)$ — голоморфная в круге $\{|z| < 1\}$ функция, Γ — непрерывная кривая в этом круге, задаваемая уравнением $z = z(t)$, $0 \leq t < 1$, $z(t) \to z_0$ ($|z_0| = 1$) при $t \to 1$. Если существует конечное или бесконечное a такое, что

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \Gamma}} f(z) = \lim_{t \to 1} f(z(t)) = a,$$

то a называется асимптотическим значением функции $f(z)$ в точке z_0, а Γ — асимптотической кривой [1, 2]. Пара $\{a, \Gamma\}_{z_0}$ называется асимптотическим местом в точке z_0. Два асимптотических места $\{a_1, \Gamma_1\}_{z_0}$, $\{a_2, \Gamma_2\}_{z_0}$ считаются одинаковыми, если $a_1 = a_2 = a$ и существует последовательность непрерывных кривых γ_k таких, что один конец γ_k лежит на Γ_1, другой — на Γ_2 и

$$\lim_{k \to \infty} \max_{z \in \gamma_k} |z - z_0| = 0, \qquad \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \bigcup\limits_k \gamma_k}} f(z) = a.$$

В случае целых функций конечного нижнего порядка

$$\lambda := \liminf_{r \to \infty} \log \log \max_{|z| = r} |f(z)| / \log r$$

известна классическая теорема Л. Альфорса.

Теорема A ([1, с. 226; 3]). *Целая функция конечного нижнего порядка λ не может иметь более $\max\{[2\lambda], 1\}$ различных асимптотических мест.*

Для целых функций бесконечного нижнего порядка множество асимптотических мест может быть равно ∞, что легко следует из примера функции e^{e^z}.

В работе [4] было введено понятие сильного асимптотического значения и сильного асимптотического места целой функции, а также получен аналог теоремы Альфорса для сильных асимптотических мест целых функций бесконечного порядка. В настоящей работе вводится понятие сильного асимптотического значения и сильного асимптотического места голоморфной в круге функции.

Определение 1. *Будем говорить, что ∞ является сильным асимптотическим значением голоморфной в круге функции $f(z)$ в точке z_0 $(|z_0| = 1)$, если существует непрерывная кривая $\Gamma : z = z(t)$, $0 \le t < 1$, $z(t) \to z_0$ при $t \to 1$ такая, что*

$$\lim_{t\to 1} \frac{\log |f(z(t))|}{\log M(|z(t)|, f)} = 1, \quad M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Пару $\{\infty, \Gamma\}_{z_0}$ в этом случае будем называть сильным асимптотическим местом функции $f(z)$ в точке z_0.

Основными результатами работы является получение аналога теоремы Альфорса для сильных асимптотических мест $\{\infty, \Gamma\}_{z_0}$ голоморфных в круге функций как конечного, так и бесконечного порядка.

Для формулировки наших результатов нам понадобятся некоторые сведения из теории роста мероморфных функций, которая была заложена в работах В.П. Петренко [5]. В теории Петренко в отличие от неванлинновской теории отклонение мероморфной функции рассматривается в равномерной метрике

$$\mathcal{L}(r, a, f) = \max_{|z|=r} \log^+ \frac{1}{|\ f(z) - a\ |}, \quad \mathcal{L}(r, \infty, f) = \max_{|z|=r} \log^+ |\ f(z)\ | .$$

Величина отклонения мероморфной функции $f(z)$ относительно значения a определяется так:

$$\beta(a, f) := \liminf_{r\to\infty} \frac{\mathcal{L}(r, a, f)}{T(r, f)},$$

где $T(r, f)$— неванлинновская характеристика функции f. Хотя величина отклонения $\beta(a, f)$ характеризует отклонение f от значения a в более сильной метрике, чем неванлинновский дефект $\delta(a, f)$, тем не менее оказалось, что для мероморфных в плоскости функций конечного нижнего порядка $\lambda := \liminf\limits_{r\to\infty} \log T(r, f)/ \log r$ свойства величин отклонений напоминают свойства дефектов. Так, В.П. Петренко получил точную оценку для величины отклонения, а также некоторую оценку для суммы этих величин:

$$\beta(a, f) \le \begin{cases} \frac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda}, & \text{если} \quad \lambda < \frac{1}{2}, \\ \pi\lambda, & \text{если} \quad \lambda \ge \frac{1}{2}\ , \end{cases}$$

$$\sum_{(a)} \beta(a,f) \leq 816\pi(\lambda+1)^2.$$

В работе [6] получена точная оценка для суммы ряда $\sum\limits_{(a)} \beta(a,f)$, которая является аналогом соотношения дефектов для величин отклонений:

$$\sum_{(a)} \beta(a,f) \leq \begin{cases} \frac{2\pi\lambda}{\sin\pi\lambda}, & \text{если} \quad \lambda < \frac{1}{2}, \\ 2\pi\lambda, & \text{если} \quad \lambda \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

В случае мероморфных в круге функций конечного нижнего порядка $\lambda := \liminf\limits_{r\to 1} \log T(r,f)/\log\frac{1}{1-r}$ величина $\beta(a,f)$ может быть равна ∞. В связи с этим А.В. Крытов [7] ввел в рассмотрение величину

$$\hat\beta(a,f) := \liminf_{r\to 1} \frac{(1-r)\mathcal{L}(r,a,f)}{T(r,f)}$$

и доказал некоторую оценку для этой величины через нижний порядок λ и валироновский дефект

$$\hat\beta(a,f) \leq C(\lambda+1)\sqrt{\Delta(a,f)},$$

где C — абсолютная постоянная.

В работе [6] получены точная оценка для величины $\hat\beta(a,f)$ и аналог соотношения дефектов для этих величин

$$\hat\beta(a,f) \leq \pi\lambda\cos^{-1-\lambda}\frac{\pi}{2(\lambda+1)}. \tag{1}$$

Если $\lim\limits_{r\to 1}\frac{\log(1-r)}{T(r,f)} = 0$, то

$$\sum_{(a)} \hat\beta(a,f) \leq 2\pi\lambda\cos^{-1-\lambda}\frac{\pi}{2(1+\lambda)}.$$

Для мероморфных в плоскости функций бесконечного нижнего порядка величина отклонения может быть равна ∞. Поэтому в этом случае интересен результат В. Бергвайлера и Г. Бока [8]:

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\max\limits_{|z|=r} \log^+|f(z)|}{rT'_-(r,f)} \leq \pi, \tag{2}$$

где $T'_-(r,f)$ — левосторонняя производная неванлинновской характеристики.

В связи с оценкой (2) А. Еременко ввел величину

$$b(a,f) := \liminf_{r\to\infty} \frac{\mathcal{L}(r,a,f)}{A(r,f)},$$

где $A(r, f)\pi$ — площадь образа $|z| < r$ при отображении с помощью функции $w = f(z)$ на сферу Римана с учетом кратности покрытия. Из (2) следует точная оценка для величины $b(a, f)$ мероморфных в плоскости функций бесконечного порядка

$$b(a, f) \leq \pi.$$

А. Еременко доказал аналог соотношения дефектных значений для этих величин [9]

$$\sum_{(a)} b(a, f) \leq 2\pi.$$

В работах [10, 11] авторы исследовали величину $b(a, f)$ для мероморфных в единичном круге функций нижнего порядка λ. Оказалось, что в этом случае справедливы такие точные оценки:

$$b(a, f) \leq \begin{cases} \pi \cos^{-1-\lambda} \frac{\pi}{2(\lambda+1)}\,, & \text{если} \quad 0 < \lambda < \infty, \\ \pi\,, & \text{если} \quad \lambda = \infty, \end{cases}$$

$$\sum_{(a)} b(a, f) \leq \begin{cases} 2\pi \cos^{-1-\lambda} \frac{\pi}{2(\lambda+1)}\,, & \text{если} \quad 0 < \lambda < \infty, \\ 2\pi\,, & \text{если} \quad \lambda = \infty. \end{cases}$$

Настоящая работа посвящена доказательству следующих результатов.

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ — голоморфная в единичном круге функция, не равная тождественно постоянной, имеет конечный нижний порядок λ и p различных сильных асимптотических мест $\{\infty, \Gamma_j\}_{z_0}$ в точке z_0 $(j = 1, \dots, p)$. Тогда*

$$p \leq \left[\frac{\pi\lambda}{\hat{\beta}(\infty, f)} \cos^{-\lambda-1} \frac{\pi}{2(\lambda+1)} \right],$$

где $[x]$ — целая часть числа x.

Следствие 1. *Пусть $f(z)$ — голоморфная в единичном круге функция конечного нижного порядка такая, что $\hat{\beta}(\infty, f) > 0$. Тогда множество различных сильных асимптотических мест $\{\infty, \Gamma_j\}_{z_0}$ в точке z_0 конечно.*

Оценка в теореме 1 является точной и достигается для функции $f_\lambda(z) = E_{\frac{\lambda}{n}+1}\left(\left(\frac{z}{1-z}\right)^n\right)$, где $E_\lambda(z)$ — целая функция Миттаг–Леффлера порядка $\lambda < \infty$ [1, с. 111]. Для этой функции число сильных асимптотических мест $\{\infty, \Gamma_j\}_{z_0}$ в точке $z_0 = 1$ равно n, порядок равен λ, $\hat{\beta}(\infty, f_\lambda) = \frac{\pi\lambda}{n} cos^{-1-\lambda} \frac{\pi}{2(\lambda+1)}$.

Теорема 2. *Если голоморфная в единичном круге функция $f(z)$ бесконечного нижнего порядка имеет p различных сильных асимптотических мест $\{\infty, \Gamma_j\}_{z_0}$ в точке z_0 $(j = 1, \ldots, p)$, то*

$$p \leq \left[\frac{\pi}{b(\infty, f)}\right].$$

Следствие 2. *Пусть $f(z)$ — голоморфная в единичном круге функция такая, что $b(\infty, f) > 0$. Тогда множество различных сильных асимптотических мест $\{\infty, \Gamma_j\}_{z_0}$ в точке z_0 конечно.*

Оценка в теореме 2 является точной и достигается для функции $f(z) = E_0\left(\left(\frac{z}{1-z}\right)^n\right)$, где $E_0(z)$ — целая функция бесконечного порядка из работы [12, с. 126].

Пример функции $e^{e^{\frac{1}{1-z}}}$ показывает, что условие $b(\infty, f) > 0$ в следствии 2 является существенным.

Вспомогательные результаты

Пусть $f(z)$ — голоморфная в единичном круге функция и $\{\infty, \Gamma_j\}_{z_0}$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ — различные сильные асимптотические места $f(z)$ в точке z_0. Не уменьшая общности, будем считать, что кривые Γ_j взаимно не пересекаются.

Для $p = 1$ теорема следует из оценки (1). Будем считать, что $p \geq 2$.

Пусть G_n — открытое множество тех точек z из единичного круга, для которых $|f(z)| > n$. Обозначим через G_n^j ту связную компоненту G_n, которая содержит $\Gamma_j \bigcap \{r < |z| < 1\}$ при $r \to 1$. Для достаточно больших n области G_n^j $(j = 1, 2, \ldots, p)$ попарно не пересекаются. Действительно, если бы области $G_n^{j_1}$ $G_n^{j_2}$ пересекались для всех $n \geq 1$, то они бы совпадали, и, соединяя кривые Γ_{j_1} и Γ_{j_2} непрерывными кривыми γ_k, лежащими в $G_k^{j_1} = G_k^{j_2}$, получаем, что асимптотические места $\{\infty, \Gamma_{j_1}\}_{z_0}$ и $\{\infty, \Gamma_{j_2}\}_{z_0}$ одинаковы, что противоречит условию.

Так как $p \geq 2$, то ни одна область G_n^j при $n \geq n_0$ не содержит полностью ни одной окружности $\{|z| = r\}$, $0 < r < 1$.

Таким образом, мы получили p взаимно не пересекающихся областей $G_{n_0}^j$, $(j = 1, 2, \ldots, p)$, обладающих следующими свойствами:

1) $G_{n_0}^j$ не содержит полностью ни одной окружности $\{|z| = r\}$, $0 < r < 1$;

2) функция $f(z)$ не ограничена в $G_{n_0}^j$ и удовлетворяет в $G_{n_0}^j$ неравенству $|f(z)| > n_0$;

3) на множестве $\partial G_{n_0}^j \setminus z_0$ выполняется равенство $|f(z)| = n_0$, где $\partial G_{n_0}^j$ — граница $G_{n_0}^j$.

Рассмотрим функции:

$$u_j(z) = \begin{cases} \log|f(z)|, & \text{если} \quad z \in G^j_{n_0}, \\ n_0, & \text{если} \quad z \notin G^j_{n_0}, \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots, p.$$

Легко видеть, что $u_j(z)$ — субгармонические функции в $\{|z| < 1\}$. Далее положим [13]

$$m^*(z, u_j) = m^*(r, \theta, u_j) = \frac{1}{2\pi} \sup_{|E|=2\theta} \int\limits_E u_j(re^{i\varphi})d\varphi, \quad z = re^{i\theta}.$$

Из результатов Бернстейна [13] следует, что функции $m^*(z, u_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ являются субгармоническими в $K = \{re^{i\theta} : 0 < r < 1, \ 0 < \theta < \pi\}$, непрерывными на $K \bigcup (-1, 0) \bigcup (0, 1)$, логарифмически выпуклыми для каждого фиксированного $\theta \in [0, \pi]$ и, кроме того,

$$m^*(r, \theta, u_j) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\theta u^*_j(r, \varphi)d\varphi,$$

$$\frac{\partial m^*}{\partial \theta}(r, \theta, u_j) = \frac{1}{\pi} u^*_j(r, \theta) \quad (0 < \theta < \pi),$$

где $u^*_j(r, \theta)$ — круговая перестройка функции $u_j(re^{i\theta})$ [14, с. 90].

Обозначим

$$\widetilde{m}(Re^{i\varphi}, u_j) = \widetilde{m}(R, \varphi, u_j) = m^*(r, \theta, u_j),$$

где $z = re^{i\theta} = 1 - \overline{w} = 1 - Re^{-i\varphi}$. Так как $z = 1 - \overline{w}$ $(w = Re^{i\varphi})$ — антиголоморфная функция в $\mathbb{C}$, то в силу субгармоничности функции $m^*(re^{i\theta}, u_j)$ следует субгармоничность функции $\widetilde{m}(Re^{i\varphi}, u_j)$ в полукруге $\{w : |w - 1| < 1, \operatorname{Im} w > 0\}$.

Обозначим через $T(r, f)$ неванлинновскую характеристику роста мероморфной в единичном круге функции $f(z)$. Для доказательства основных результатов нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений, доказанных в работах [6, 10].

Лемма A ([6]). *Для каждого фиксированного числа $B > 1$ существуют две последовательности положительных чисел $\{v_k\}$, $\{R_k\}$, зависящие от B, такие, что $\lim\limits_{k\to\infty} v_k = \lim\limits_{k\to\infty} R_k = \lim\limits_{k\to\infty} R_k/v_k = 0$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует $k_0(\varepsilon)$ такое, что при $k > k_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство*

$$T\left(1 - \frac{R_k}{B}\right) R_k^\lambda + T\left(1 - \frac{v_k}{B}\right) v_k^\lambda < \varepsilon \int\limits_{R_k}^{v_k} T(1 - R, f) R^{\lambda - 1} dR.$$

Лемма B ([6]). *Для каждого* $\varepsilon > 0$ *при* $k > k_0(\varepsilon)$ *выполняется неравенство*

$$\int\limits_{R_k}^{v_k} T(|1 - Re^{-i\alpha}|, f) R^{\lambda-1} dR \le \frac{1+\varepsilon}{\cos^\lambda \alpha} \int\limits_{R_k}^{v_k} T(1-R, f) R^{\lambda-1} dR.$$

Лемма C ([10]). *Для каждого фиксированного числа* $B > 1$ *существуют две последовательности* $\{V_i\}$ *и* $\{K_i\}$*, зависящие от* B*, такие, что* $\lim\limits_{i\to\infty} V_i = \lim\limits_{i\to\infty} K_i = \lim\limits_{i\to\infty} K_i/V_i = 0$*, и существует последовательность* $\mu_i \to \infty$*, для которых выполняется равенство*

$$\begin{aligned} & T\left(1 - \frac{V_i}{B}\right) \frac{V_i^{\mu_i}}{\mu_i} + T\left(1 - \frac{K_i}{B}\right) \frac{K_i^{\mu_i}}{\mu_i} \\ = \quad & o\left(\int\limits_{K_i}^{V_i} T(1-R, f) R^{\mu_i - 1} dR\right) \quad (i \to \infty). \end{aligned}$$

Лемма D ([10]). *Для каждого* $\varepsilon > 0$ *при* $i > i_0(\varepsilon)$ *выполняется неравенство*

$$\int\limits_{K_i}^{V_i} T(|1 - Re^{-i\alpha}|, f) R^{\mu_i-1} dR \le \frac{1+\varepsilon}{\cos^{\mu_i} \alpha} \int\limits_{K_i}^{V_i} T(1-R, f) R^{\mu_i-1} dR.$$

Доказательства теорем 1, 2 проведем для случая, когда $\widetilde{m}(R, \varphi, u_j)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция. Если это не так, приблизим эту функцию последовательностью бесконечно дифференцируемых субгармонических функций и сделаем соответствующие предельные переходы, как в работе [6].

Доказательство теоремы 1

Рассмотрим функцию

$$\widetilde{m}_0(R, \varphi, f) = \sum_{j=1}^{p} \widetilde{m}(R, \varphi, u_j).$$

Для каждого $\alpha : 0 < \alpha \le \min(\pi, \frac{\pi}{2\lambda})$ и ψ: $-\frac{\pi}{2\lambda} \le \psi \le \frac{\pi}{2\lambda} - \alpha$ положим [15, 16]

$$\sigma(R) = \int\limits_0^\alpha \widetilde{m}_0(R, \varphi, f) \cos \lambda(\varphi + \psi) d\varphi,$$

$R \in [R_k, v_k]$, а последовательности R_k, v_k удовлетворяют лемме A.

Применим дифференциальный оператор $L = R\frac{d}{dR}R\frac{d}{dR}$ к функции $\sigma(R)$ и используем субгармоничность функции $\widetilde{m}_0(R,\varphi,f)$ (т.е. $L\widetilde{m}_0(R,\varphi,f)+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\widetilde{m}_0(R,\varphi,f) \geq 0\Big)$ и формулу интегрирования по частям

$$L\sigma(R) = R\frac{d}{dR}(R\sigma'(R)) = \int\limits_0^\alpha L\widetilde{m}_0(R,\varphi,f)\cos\lambda(\varphi+\psi)d\varphi$$

$$\geq -\int\limits_0^\alpha \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\widetilde{m}_0(R,\varphi,f)\cos\lambda(\varphi+\psi)d\varphi$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\varphi}\widetilde{m}_0(R,\varphi,f)\cos\lambda(\varphi+\psi)\Big|_0^\alpha - \lambda\int\limits_0^\alpha \frac{\partial}{\partial\varphi}\widetilde{m}_0(R,\varphi,f)\sin\lambda(\varphi+\psi)d\varphi$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\varphi}\widetilde{m}_0(R,\varphi,f)\cos\lambda(\varphi+\psi)\Big|_0^\alpha - \lambda\widetilde{m}_0(R,\varphi,f)\sin\lambda(\varphi+\psi)\Big|_0^\alpha + \lambda^2\sigma(R)$$

$$= -\sum_{j=1}^p \frac{\partial}{\partial\varphi}\widetilde{m}(R,\alpha,u_j)\cos\lambda(\alpha+\psi) + \sum_{j=1}^p \frac{\partial}{\partial\varphi}\widetilde{m}(R,0,u_j)\cos\lambda\psi$$

$$= \lambda\sum_{j=1}^p \widetilde{m}(R,\alpha,u_j)\sin\lambda(\alpha+\psi) + \lambda\sum_{j=1}^p \widetilde{m}(R,0,u_j)\sin\lambda\psi + \lambda^2\sigma(R)$$

$$\equiv h(R) + \lambda^2\sigma(R).$$

Таким образом,

$$R\frac{d}{dR}(R\sigma'(R)) \geq h(R) + \lambda^2\sigma(R). \tag{3}$$

Умножим неравенство (3) на $R^{\lambda-1}$ и проинтегрируем его по R от R_k до v_k:

$$\int\limits_{R_k}^{v_k} h(R)R^{\lambda-1}dR + \lambda^2\int\limits_{R_k}^{v_k}\sigma(R)R^{\lambda-1}dR$$

$$\leq \int\limits_{R_k}^{v_k} R^\lambda\frac{d}{dR}R\sigma'(R)dR = R^{\lambda+1}\sigma'(R)\Big|_{R_k}^{v_k} - \lambda\int\limits_{R_k}^{v_k}\sigma'(R)R^\lambda dR$$

$$= R^{\lambda+1}\sigma'(R)\Big|_{R_k}^{v_k} - \lambda R^\lambda\sigma(R)\Big|_{R_k}^{v_k} + \lambda^2\int\limits_{R_k}^{v_k}\sigma(R)R^{\lambda-1}dR.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{R_k}^{v_k} h(R)R^{\lambda-1}dR = \int\limits_{R_k}^{v_k} \Bigg\{ -\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial\varphi}\widetilde{m}(R,\alpha,u_j)\cos\lambda(\alpha+\psi)$$

$$+\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial\varphi}\widetilde{m}(R,0,u_j)\cos\lambda\psi - \sum_{j=1}^{p}\lambda\widetilde{m}(R,\alpha)\sin\lambda(\alpha+\psi)$$

$$+\lambda\sum_{j=1}^{p}\widetilde{m}(R,0,u_j)\sin\lambda\psi \Bigg\} R^{\lambda-1}dR \leq R^{\lambda+1}\sigma'(R)\Big|_{R_k}^{v_k} - \lambda R^{\lambda}\sigma(R)\Big|_{R_k}^{v_k}.$$

Далее нам понадобится следующее утверждение, доказанное в работе [6].

Лемма E ([6, с. 8]). *Для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ при $k > k_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство*

$$v_k^{\lambda+1}|\sigma'(v_k)| + R_k^{\lambda+1}|\sigma'(R_k)| + \lambda v_k^{\lambda}\sigma(v_k) + \lambda R_k^{\lambda}\sigma(R_k) \leq \varepsilon \int\limits_{R_k}^{v_k} T(1-R,f)R^{\lambda-1}dR.$$

Выберем $\psi = \frac{\pi}{2\lambda} - \alpha$ и воспользуемся леммой E:

$$\int\limits_{R_k}^{v_k} \Bigg\{ \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial\varphi}\widetilde{m}(R,0,u_j)\sin\lambda\alpha - \lambda\sum_{j=1}^{p}\widetilde{m}(R,\alpha,u_j)$$

$$+\lambda\sum_{j=1}^{p}\widetilde{m}(R,0,u_j)\cos\lambda\alpha \Bigg\} R^{\lambda-1}dR < \varepsilon\lambda\int\limits_{R_k}^{v_k} T(1-R,f)R^{\lambda-1}dR. \qquad (4)$$

Так как $re^{i\theta} = 1 - Re^{-i\varphi}$, то

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\widetilde{m}(R,\varphi,u_j) = \frac{R}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}m^*(r,\theta,u_j)\cos(\theta+\varphi) + r\frac{\partial}{\partial r}m^*(R,\theta)\sin(\theta+\varphi).$$

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\widetilde{m}(R,0,u_j) = \frac{R}{1-R}\frac{\partial}{\partial\theta}m^*(r,0,u_j). \qquad (5)$$

Подставляя (5) в неравенство (4), получаем

$$\int\limits_{R_k}^{v_k} \left\{ \frac{R}{1-R}\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial}{\partial\theta}m^*(r,0,u_j)\sin\lambda\alpha - \lambda\sum_{j=1}^{p}m^*(1-Re^{-i\alpha},u_j) \right\} R^{\lambda-1}dR$$

$$< \varepsilon \int\limits_{R_k}^{v_k} T(1-R,f)R^{\lambda-1}dR.$$

Рассуждая аналогично, как в лемме B, и используя свойства функции $m^*(re^{i\theta},u_j)$, имеем

$$\int\limits_{R_k}^{v_k} \frac{R}{1-R}\sum_{j=1}^{p}\frac{u^*(1-R,0)}{\pi}\sin\lambda\alpha R^{\lambda-1}dR$$

$$< \left\{\frac{\lambda(1+\varepsilon)}{\cos^\lambda\alpha}+\varepsilon\right\}\int\limits_{R_k}^{v_k} T(1-R,f)R^{\lambda-1}dR.$$

Отсюда следует, что для каждого $k > k_0(\varepsilon)$ существует $\widetilde{R}_k \in [R_k, v_k]$ такое, что

$$\frac{\widetilde{R}_k}{1-\widetilde{R}_k}\sum_{j=1}^{p}\frac{u^*(1-\widetilde{R}_k,0)}{\pi}\sin\lambda\alpha < \left\{\frac{\lambda(1+\varepsilon)}{\cos^\lambda\alpha}+\varepsilon\right\}T(1-\widetilde{R}_k,f). \qquad (6)$$

Но $\{\infty,\Gamma_j\}_{z_0}$ $(j=1,2,\cdots,p)$ — сильные асимптотические места голоморфной функции $f(z)$, поэтому

$$u_j^*(1-\widetilde{R}_k,0) = \max_{|z|=1-\widetilde{R}_k} u_j(z) = \max_{\substack{|z|=1-\widetilde{R}_k\\ z\in G^j_{n_0}}} u_j(z) \geq \max_{\substack{|z|=1-\widetilde{R}_k\\ z\in\Gamma_j}} u_j(z)$$

$$= \max_{\substack{|z|=1-\widetilde{R}_k\\ z\in\Gamma_j}} \log|f(z)| > (1-\varepsilon)\log M(1-\widetilde{R}_k,f) \quad (k\to\infty).$$

Из определения величины $\hat{\beta}(\infty,f)$ получаем, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует r_0 такое, что при $r \geq r_0$

$$\log M(r,f)(1-r) > (1-\varepsilon)\hat{\beta}(\infty,f)T(r,f).$$

Поэтому

$$u_j^*(1-\widetilde{R}_k,0)\widetilde{R}_k > (1-\varepsilon)^2\hat{\beta}(\infty,f)T(1-\widetilde{R}_k,f) \quad (k\to\infty) \qquad (7).$$

В силу (6), (7) имеем

$$\frac{p(1-\varepsilon)^2\hat{\beta}(\infty,f)T(1-\widetilde{R}_k,f)}{(1-\widetilde{R}_k)\pi}\sin\lambda\alpha < \left\{\frac{\lambda(1+\varepsilon)}{\cos^\lambda\alpha}+\varepsilon\right\}T(1-\widetilde{R}_k,f) \quad (k\to\infty).$$

Таким образом,

$$p < \frac{\pi}{\sin\lambda\alpha}\left\{\frac{\lambda(1+\varepsilon)}{\cos^\lambda\alpha}+\varepsilon\right\}\frac{1}{(1-\varepsilon)^2\hat{\beta}(\infty,f)}.$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ получаем

$$p \le \frac{\pi\lambda}{\sin\lambda\alpha\hat{\beta}(\infty,f)}\cos^{-\lambda}\alpha.$$

Вычисляя минимум правой части по α, $0 < \alpha \le \min(\pi, \frac{\pi}{2\lambda})$, имеем

$$p \le \frac{\pi\lambda}{\hat{\beta}(\infty,f)}\cos^{-\lambda-1}\frac{\pi}{2(\lambda+1)}.$$

Так как p — целое число, то отсюда следует утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 2

Доказательство будем проводить по аналогии с доказательством теоремы 1. Рассмотрим функцию

$$\widetilde{m}_0(R,\varphi,f) = \sum_{j=1}^{p}\widetilde{m}(R,\varphi,u_j).$$

Положим [15, 16]

$$\sigma_i(R) = \int_0^\alpha \widetilde{m}_0(R,\varphi,f)\cos\mu_i(\varphi+\psi)d\varphi,$$

где величины α,ψ и R удовлетворяют соотношениям: $0 < \alpha \le \frac{\pi}{2\mu_j}$, $-\frac{\pi}{2\mu_i} \le \psi \le \frac{\pi}{2\mu_i} - \alpha$, $R \in [K_i, V_i]$, а последовательности K_i, V_i, μ_i определены в лемме C.

Проводя аналогичные рассуждения, как при доказательстве теоремы 1, приходим к неравенству

$$R\frac{d}{dR}(R\sigma_i'(R)) \ge h(R) + \mu_i^2\sigma_i(R), \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} h(R) \;\; = \;\; & -\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial}{\partial\varphi}\widetilde{m}(R,\alpha,u_j)\cos\mu_i(\alpha+\psi) + \sum_{j=1}^{p}\frac{\partial}{\partial\varphi}\widetilde{m}(R,0,u_j)\cos\mu_i\psi \\ & -\mu_i\sum_{j=1}^{p}\widetilde{m}(R,\alpha,u_j)\sin\mu_i(\alpha+\psi) + \mu_i\sum_{j=1}^{p}\widetilde{m}(R,0,u_j)\sin\mu_i\psi\,. \end{aligned}$$

Умножим неравенство (8) на R^{μ_i-1} и проинтегрируем его по R от K_i до V_i:

$$\int\limits_{K_i}^{V_i} h(R)R^{\mu_i-1}dR+\mu_i^2\int\limits_{K_i}^{V_i}\sigma_i(R)R^{\mu_i-1}dR$$

$$\leq \int\limits_{K_i}^{V_i} R^{\mu_i}\frac{d}{dR}R\sigma_i'(R)dR = R^{\mu_i+1}\sigma_i'(R)\big|_{K_i}^{V_i}-\mu_j\int\limits_{K_i}^{V_i}\sigma_i'(R)R^{\mu_i}dR$$

$$= R^{\mu_i+1}\sigma_i'(R)\big|_{K_i}^{V_i}-\mu_iR^{\mu_i}\sigma_i(R)\Big|_{K_i}^{V_i}+\mu_i^2\int\limits_{K_i}^{V_i}\sigma_i(R)R^{\mu_i-1}dR.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{K_i}^{V_i} h(R)R^{\mu_i-1}dR=\int\limits_{K_i}^{V_i}\Bigg\{-\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial}{\partial\varphi}\widetilde{m}(R,\alpha,u_j)\cos\mu_i(\alpha+\psi)$$

$$+\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial}{\partial\varphi}\widetilde{m}(R,0,u_j)\cos\mu_i\psi-\mu_i\sum_{j=1}^{p}\widetilde{m}(R,\alpha,u_j)\sin\mu_i(\alpha+\psi)$$

$$+\mu_i\sum_{j=1}^{p}\widetilde{m}(R,0,u_j)\sin\mu_i\psi\Bigg\}R^{\mu_i-1}dR\leq R^{\mu_i+1}\sigma_i'(R)\big|_{K_i}^{V_i}-\mu_iR^{\mu_i}\sigma_i(R)\Big|_{K_i}^{V_i}. \quad (9)$$

Далее нам понадобится утверждение, доказанное в работе [10].

Лемма F ([10, с. 119]). *Для каждого фиксированного* $\varepsilon>0$ *при* $i>i_0(\varepsilon)$ *выполняется неравенство*

$$V_i^{\mu_i+1}|\sigma_i'(V_i)|+K_i^{\mu_i+1}|\sigma_i'(K_i)|+\mu_iV_i^{\mu_i}\sigma_i(V_i)+\mu_iK_i^{\mu_i}\sigma_i(K_i)$$

$$\leq\varepsilon\mu_i\int\limits_{K_i}^{V_i}T(1-R,f)R^{\mu_i-1}dR. \quad (10)$$

В неравенстве (9) выберем $\psi=\frac{\pi}{2\mu_j}-\alpha$ и воспользуемся оценкой (10):

$$\int\limits_{K_i}^{V_i}\Bigg\{\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial}{\partial\varphi}\widetilde{m}(R,0,u_j)\sin\mu_i\alpha-\mu_i\sum_{j=1}^{p}\widetilde{m}(R,\alpha,u_j)$$

$$+\mu_i \sum_{j=1}^{p} \widetilde{m}(R,0,u_j)\cos\mu_i\alpha \Bigg\} R^{\mu_i-1}dR < \varepsilon\mu_i \int_{K_i}^{V_i} T(1-R,f)R^{\mu_i-1}dR \quad (i\to\infty). \tag{11}$$

Подставим (5) в неравенство (11)

$$\int_{K_i}^{V_i} \left\{ \frac{R}{1-R}\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial}{\partial\theta}m^*(r,0,u_j)\sin\mu_i\alpha - \mu_i\sum_{j=1}^{p}m^*(1-Re^{-i\alpha},u_j)\right\} R^{\mu_i-1}dR$$

$$< \varepsilon\mu_i \int_{K_i}^{V_i} T(1-R,f)R^{\mu_i-1}dR \quad (i\to\infty).$$

Используя свойства функции $m^*(re^{i\theta},u_j)$ и лемму D, получаем

$$\int_{K_i}^{V_i} \frac{R}{1-R}\sum_{j=1}^{p}\frac{u_j^*(1-R,0)}{\pi}\sin\mu_i\alpha R^{\mu_i-1}dR$$

$$< \left\{\frac{\mu_i(1+\varepsilon)}{\cos^{\mu_i}\alpha}+\varepsilon\right\}\int_{K_i}^{V_i} T(1-R,f)R^{\mu_i-1}dR \quad (i\to\infty). \tag{12}$$

Отметим, что $T(r,f) = T_0(r,f) + O(1) \quad (r\to 1)$, где $T_0(r,f)$ — характеристика Симидзу голоморфной функции $f(z)$ [12]. Используя формулу интегрирования по частям и лемму C, имеем

$$\mu_i\int_{K_i}^{V_i} T_0(1-R,f)R^{\mu_i-1}dR = T_0(1-R,f)R^{\mu_i}\Bigg|_{K_i}^{V_i} + \int_{K_i}^{V_i} T_{0\,-}^{\prime}(1-R,f)R^{\mu_i}dR$$

$$= o\left(\mu_i\int_{K_i}^{V_i} T_0(1-R,f)R^{\mu_i-1}dR\right) + \int_{K_i}^{V_i} A(1-R,f)R^{\mu_i}dR.$$

Отсюда

$$\mu_i\int_{K_i}^{V_i} T_0(1-R,f)R^{\mu_i-1}dR = (1+o(1))\int_{K_i}^{V_i} A(1-R,f)R^{\mu_i}dR. \tag{13}$$

В силу (12), (13) существует $\widetilde{R}_i \in [K_i, V_i]$ такое, что при $i > i_0(\varepsilon)$

$$\frac{\widetilde{R}_i}{1-\widetilde{R}_i}\sum_{j=1}^{p}\frac{u_j^*(1-\widetilde{R}_i,0)}{\pi}\sin\mu_i\alpha < \left\{\frac{1+\varepsilon}{\cos^{\mu_i}\alpha}+\varepsilon\right\}A(1-\widetilde{R}_i,f)\widetilde{R}_i.$$

Поскольку $\{\infty,\Gamma_j\}_{z_0}$ $(j=1,2,\cdots,p)$ — сильные асимптотические места голоморфной функции $f(z)$ и из определения величины $b(\infty,f)$ получаем

$$\frac{p(1-\varepsilon)^2 b(\infty,f)A(1-\widetilde{R}_i,f)}{(1-\widetilde{R}_i)\pi}\sin\mu_i\alpha < \left\{\frac{1+\varepsilon}{\cos^{\mu_i}\alpha}+\varepsilon\right\}A(1-\widetilde{R}_i,f)\quad(i\to\infty).$$

Откуда

$$p < \frac{\pi}{\sin\mu_i\alpha}\left\{\frac{1+\varepsilon}{\cos^{\mu_i}\alpha}+\varepsilon\right\}\frac{1}{(1-\varepsilon)^2 b(\infty,f)}. \tag{14}$$

В соотношении (14) положим $\alpha = \frac{\pi}{2\mu_i}$:

$$p < \frac{\pi}{(1-\varepsilon)^2 b(\infty,f)}\left\{\frac{1+\varepsilon}{\cos^{\mu_i}\frac{\pi}{2\mu_i}}+\varepsilon\right\}.$$

В последнем неравенстве перейдем к пределу при $j\to\infty$:

$$p \le \frac{\pi(1+2\varepsilon)}{(1-\varepsilon)^2 b(\infty,f)}.$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ имеем

$$p \le \frac{\pi}{b(\infty,f)}.$$

Поскольку p — целое число, то отсюда следует утверждение теоремы 2.

Список литературы

[1] *А.А. Гольдберг, И.В. Островский*, Распределение значений мероморфных функций. Наука, Москва (1970).

[2] *Г. Мак-Лейн*, Асимптотические значения голоморфных функций. Мир, Москва (1966).

[3] *L. Ahlfors*, Über die asymptotischen Werte der meromorphen Funktion endlicher Ordnung. — *Acta Acad. Aboensis. Math. et Phys.* (1932), v. 6, No. 9, p. 1–8.

[4] *И.И. Марченко*, Об асимптотических значениях целых функций. — *Изв. РАН. Сер. мат.* (1999), т. 63, № 3, с. 133 –146.

[5] *В.П. Петренко*, Рост мероморфных функций. Выща школа, Харьков (1978).

[6] *И.И. Марченко, А.И. Щерба*, О величинах отклонений мероморфных функций. — *Мат. сб.* (1990), v. 181, № 1, с. 3–24.

[7] *А.В. Крытов*, О росте мероморфных функций и аналитических кривых в единичном круге. — Рукопись деп. в ВИНИТИ 1657–81.

[8] *W. Bergweiler and H. Bock*, On the growth of meromorphic functions of infinite order. — *J. Anal. Math.* (1994), v. 64, No. 9, p. 327–336.

[9] *A. Eremenko*, An analogue of the defect relation for the uniform metric. — *Compl. Variables Theory Appl.* (1997), v. 34, No. 9, p. 83–97.

[10] *И.И. Марченко, И.Г. Николенко*, Рост мероморфных в круге функций бесконечного порядка. — *Вісн. Харк. ун-ту. Сер. мат., прикл. мат. і механіка* (2000), № 475, с. 113–125.

[11] *И.И. Марченко, И.Г. Николенко*, О величинах отклонений для мероморфных в круге функций. — *Докл. НАН Украины* (2002), № 2, с. 25–28.

[12] *У.К. Хейман*, Мероморфные функции. Мир, Москва (1966).

[13] *A. Baernstein*, Integral means, univalent functions and circular symmetrization. — *Acta. Math.* (1974), v. 133, p. 139–169.

[14] *У.К. Хейман*, Многолистные функции. Мир, Москва (1960).

[15] *M. Essen and D.F. Shea*, Applications of Denjoy integral inequalities to growth problems for subharmonic and meromorphic functions, research announcement. — *Lond. Math. Soc. Lect. Notes.* (1974), v. 12, p. 59–68.

[16] *R. Gariepy and I.L. Lewis*, Space analogues of some theorems for subharmonic and meromorphic functions. — *Ark. Math.* (1975), v. 13, No. 1, p. 91–105.

On strong asymptotic spots of functions holomorphic in the circle

I.I. Marchenko and I.G. Nikolenko

For entire functions of finite order the Ahlfors' classical theorem about finiteness of the set of asymptotic values is well known. In 1999 one of the authors has introduced the concept of the strong asymptotic value of entire functions and has obtained an analogue of the Ahlfors' theorem for distinct strong asymptotic spots of entire functions of infinite order. In this article the concept of a strong asymptotic spot for functions holomorphic in the circle has been introdused. The sharp estimate of the number of strong asymptotic spots related to a point z_0 has been obtained by the magnitude of the deviation $b(\infty, f)$. The magnitude $b(\infty, f)$ was introduced by A. Eremenko for functions meromorphic in the whole plane. In particular, if $b(\infty, f) > 0$ then the number of strong asymptotic spots is finite.