Математическая физика, анализ, геометрия
2002, т. 9, № 3, с. 385–393

Симметричные полиномы Лежандра–Соболева в пространствах Понтрягина–Соболева

Б.П. Осиленкер

Московский государственный строительный университет
Ярославское шоссе, 26, Москва, 129337, Россия
E-mail:b_osilenker@mail.ru

Статья поступила в редакцию 29 ноября 2001 г.
Представлена И.В. Островским

Исследуются свойства симметричных полиномов Лежандра–Соболева, ортогональных относительно индефинитной билинейной формы. Показано, что эти полиномы порождают пространство Понтрягина–Соболева с рангом индефинитности, равным 2.

Досліджуються властивості симетричних поліномів Лежандра–Соболєва, які є ортогональними відносно індефінітної білінійної форми. Встановлено, що ці поліноми породжують простір Понтрягіна–Соболєва, ранг індефінітності якого дорівнює 2.

Введение

В пространстве вещественных полиномов на отрезке $[-1,1]$ рассмотрим (вообще говоря, знакопеременную) билинейную форму

$$\langle f, g\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx + N\cdot[f'(1)g'(1) + f'(-1)g'(-1)], \tag{1}$$

где $N \neq 0$ — фиксированное вещественное число. Изучение пространств с индефинитной метрикой, задаваемой билинейной формой (1) (такие пространства обычно называются соболевскими), давно привлекает внимание многих авторов в связи с рядом проблем теории функций, функционального анализа, математической физики и их приложений (более подробно см. об этом, например, в обзоре [1], статьях [2–8] и приведенной там литературе).

Mathematics Subject Classification 2000: 46C20.

Пусть

$$B_n = B_n(N) = B_n(x; N), \ \ n \in \mathbb{Z}_+, \, x \in [-1, 1],$$

— система полиномов (определение см. ниже), ортогональных по отношению к билинейной форме (1), таких, что

$$\langle B_m, B_n \rangle = 0 \ \text{ при } \ m \neq n,$$

т.е.

$$\langle B_m(N), B_n(N) \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} B_m(x) B_n(x)\, dx$$

$$+ N[B_m^{'}(1) B_n^{'}(1) + B_m^{'}(-1) B_n^{'}(-1)] = 0 \qquad (m \neq n)$$

$m, n \in \mathbb{Z}_+$ (неотрицательные целые числа). Отметим, что равенство $\langle 1, x^2 \rangle = \langle x, x \rangle$ имеет место только в случае $N = 0$, и поэтому полиномы $B_n(x)$, вообще говоря, заметно отличаются от $P_n(x)$. В частности, для B_n нет классического трехчленного рекуррентного соотношения, распределение нулей и поведение на концах интервала ортогональности отличны от классического, хотя B_n и являются собственными функциями линейного дифференциального оператора восьмого порядка и т.д.

В случае $N > 0$ полиномы B_n введены в [2], их свойства изучаются также в [3, 4, 6, 7].

В настоящей работе изучаются свойства полиномов B_n, когда $N < 0$. Именно в этом случае индефинитное произведение может быть отрицательным, и мы проследим, как это обстоятельство отражается на свойствах полиномов. В частности, в отличие от случая $N > 0$, пространство $\mathbb{H}$ с индефинитной билинейной формой (1) в случае $N < 0$ является пространством Понтрягина–Соболева, порожденным системой $B_n(x; N)$ $(-1 \leq x \leq 1$, $n \in \mathbb{Z}_+)$.

§ 1. Свойства симметричных полиномов Лежандра–Соболева

Определим полиномы $B_n(x; N)$ формулой

$$B_n(x; N) = a_n \cdot (1 - x^2)^2 P_n^{(4)}(x) + d_n \cdot (1 - x^2) P_n''(x) + e_n \cdot P_n(x), \tag{2}$$

где

$$\begin{cases} a_n = & \dfrac{1}{24} N n(n+1), \\ d_n = & -\dfrac{1}{12} N (n-2) n (n+1)(n+3), \\ e_n = & 1 - \dfrac{N}{24} (n-2)_6, \end{cases} \tag{3}$$

где $P_n(x)$ полиномы Лежандра, нормированные условием $P_n(1) = 1, n \in \mathbb{Z}$. Здесь и ниже $(n)_k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Gamma(n+k)/\Gamma(n)$ — символ Похгамера.

Следующее утверждение для $N > 0$ доказано в [2], но остается справедливым и при всех $N \in \mathbb{R}$.

Лемма 1. *Полиномы $B_n(x;N)$ образуют ортогональную систему по отношению к билинейной форме (1).*

Лемма 2. *Для элементов матрицы Грама справедлива формула*

$$\langle B_n(N), B_n(N)\rangle = \frac{1}{2n+1}\Omega_n(N)\Omega_{n+2}(N), \tag{4}$$

где

$$\Omega_n(N) = \frac{12}{(n-2)_4(n^2-n-3)}N + 1, \;\; n = 2,3,4,\dots . \tag{5}$$

Доказательство. Формула (4) — результат утомительной, но элементарной выкладки. В [3, 6] среди прочего показано, что

$$\langle B_n(N), B_n(N)\rangle = \frac{N}{2}n^2(n+1)^2 + I_n, \tag{6}$$

где

$$I_n = \frac{1}{2n+1}\left\{(n-3)_4(n+1)_4 a_n^2 + (n-1)_4 d_n^2\right.$$
$$\left. + e_n^2 - 48(n-3)_4(n+1)(n+2)a_n d_n - 2n(n-1)e_n d_n + 48(n-3)_4 a_n e_n\right\}.$$

Подставив соотношение (3) в последнюю формулу, получим

$$I_n = \frac{1}{2n+1}\left\{\frac{N^2}{144}(n-2)_6 n(n+1)(n^4+2n^3-7n^2-8n+3)\right.$$
$$\left. + \frac{N}{6}(n-2)_4(n^2-n-3) + 1\right\}.$$

Отсюда и из (6) вытекает, что

$$\langle B_n(N), B_n(N)\rangle = \frac{1}{2n+1}\left\{\frac{N^2}{144}(n-2)_6 n(n+1)(n^2-n-3)(n^2+3n-1)\right.$$
$$\left. + \frac{N}{6}n(n+1)(n^4+2n^3+11n^2+10n-6) + 1\right\}.$$

Так как корни выражения, стоящего в фигурных скобках, равны

$$N_1(n) = -\frac{12}{(n-2)_4(n^2-n-3)}, \quad N_2(n) = -\frac{12}{(n)_4(n^2+3n-1)},$$

то

$$\langle B_n(N), B_n(N)\rangle = \frac{1}{144}(n-2)_6 n(n+1)$$
$$\times(n^2-n-3)(n^2+3n-1)[N-N_1(n)][N-N_2(n)]$$
$$= \frac{1}{12}(n-2)_4(n^2-n-3)\left[N+\frac{12}{(n-2)_4(n^2-n-3)}\right]$$
$$\times\frac{1}{12}(n)_4(n^2+3n-1)\left[N+\frac{12}{(n)_4(n^2+3n-1)}\right],$$

откуда и вытекает формула (4), (5). Лемма 2 доказана полностью.

Обозначим через $\{\widehat{B}_n(x)\} = \widehat{B}_n(x;N)\}(n \in \mathbb{Z}_+, x \in [-1,1])$ систему *ортонормированных полиномов Лежандра–Соболева.*

$$\langle \widehat{B}_n(N), \widehat{B}_n(N)\rangle = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \widehat{B}_n(x)\widehat{B}_m(x)\,dx$$
$$+N[\widehat{B}'_n(1)\widehat{B}'_m(1) + \widehat{B}'_n(-1)\widehat{B}'_m(-1)] = \delta_{nm}(n, m \in \mathbb{Z}_+).$$

Имеем

$$\widehat{B}_n(x;N) = \lambda_n^{(n)} B_n(x;N); \qquad \left(\lambda_n^{(n)}\right)^{-2} = \langle B_n(N), B_n(N)\rangle (n \in \mathbb{Z}_+).$$

В случае $N > 0$ следующий результат другим методом получен в [2] и непосредственно вытекает из лемм 1, 2 и свойств полиномов Лежандра.

Следствие 1. *Пусть в определении скалярного произведения коэффициент* $N \in \mathbb{R}(N \neq 0)$. *Тогда для нормирующего множителя справедливо асимптотическое представление*

$$|\lambda_n^{(n)}| \sim n^{-\frac{11}{12}}(n \to \infty).$$

§ 2. Пространство Понтрягина–Соболева, порожденное полиномами Лежандра–Соболева

Рассмотрим вопрос о знаке скалярного произведения. Предварительно приведем следующее простое предложение.

Лемма 3. *Пусть* $\{\delta_n\}$ $(n \geq p_0;\ n,\ p_0 \in \mathbb{N})$ — *убывающая последовательность положительных чисел и существует* $n_0 \in \mathbb{N}$ $(n_0 \geq p_0)$ *такое, что*

$$\delta_{n_0+1} < x < \delta_{n_0}\,.$$

Тогда

$$\operatorname{sign}(x-\delta_n)(x-\delta_{n+2}) = \begin{cases} 1, & \text{когда } n \leq n_0-2, n \geq n_0+1, \\ -1, & \text{когда } n = n_0-1, n_0. \end{cases}$$

Лемма 4. *Пусть для коэффициента $N < 0$ в определении (1) выполняются следующие условия:*

1) *ни при одном* $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$

$$N \neq -\frac{12}{(n-2)_4(n^2-n-3)}\,; \tag{7}$$

2) *существует* $n_0 \in \mathbb{N}$ $(n_0 \geq 2)$ *такое, что*

$$-\frac{12}{(n_0-2)_4(n_0^2-n_0-3)} < N < -\frac{12}{(n_0-1)_4(n_0^2+n_0-3)}\,.$$

Тогда

$$\operatorname{sign}\langle B_n(N), B_n(N)\rangle = \begin{cases} 1, & \textit{когда } n \leq n_0-2, n \geq n_0+1, \\ -1, & \textit{когда } n = n_0-1, n_0\ . \end{cases}$$

Доказательство. Положим

$$x = -N > 0, \quad \delta_n = \frac{12}{(n-2)_4(n^2-n-3)} \quad (n = 3, 4, \dots).$$

Тогда в силу (4) и (5)

$$\operatorname{sign}\langle B_n(N), B_n(N)\rangle = \operatorname{sign}(x-\delta_n)(x-\delta_{n+2}).$$

Так как последовательность $\{\delta_n\}(n = 3, 4, \dots)$ монотонно убывает, то утверждение леммы 4 следует из леммы 3. Лемма 4 доказана.

Замечание. Если при некотором $n_1 \in \mathbb{N}$ в соотношении (7) имеет место знак равенства, то не существуют полиномы $B_n(x; N)$ точно степени n для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$.

Напомним некоторые факты из теории пространств с индефинитной метрикой [9–11].

Линейное пространство $\mathbb{H}$ с индефинитным скалярным произведением $[,]$ называется пространством Крейна, если

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}^+[\dot{+}]\mathbb{H}^-,$$

где $\mathbb{H}^+$ $(\mathbb{H}^-)$ есть гильбертово пространство положительных (отрицательных) векторов по отношению к индефинитному скалярному произведению $[,](-[,])$, соответственно.

Символ $[\dot{+}]$ означает каноническое разложение, которое ортогонально по отношению к $[,]$, т.е.

$$\mathbb{H}^+ \bigcap \mathbb{H}^- = \{0\},\ [f^+, f^-] = 0,\ f^+ \in \mathbb{H}^+,\ f^- \in \mathbb{H}^-.$$

Положительно определенное скалярное произведение $(,)$ может быть определено на $\mathbb{H}$ формулой

$$(f,g) = [f^+, g^+] - [f^-, g^-],\ f = f^+ + f^-,\ g = g^+ + g^-,$$
$$f^+, g^+ \in \mathbb{H}^+,\ f^-, g^- \in \mathbb{H}^-.$$

Тогда $(\mathbb{H}, (,))$ есть гильбертово пространство. Если P^+, P^- обозначают ортогональные проекторы $\mathbb{H}$ на $\mathbb{H}^+$, $\mathbb{H}^-$, соответственно, то

$$[f,g] = (Jf, g), \quad J = P^+ - P^-, \quad P^+ + P^- = I,$$

где J — каноническая симметрия и

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}^+ \oplus \mathbb{H}^- = P^+\mathbb{H} \oplus P^-\mathbb{H},$$

при этом символ $\oplus$ обозначает ортогональность по отношению к скалярному произведению $(,)$. Пространство Крейна называют (гильбертовым) пространством с J-метрикой (J-пространством). Если размерность хотя бы одного из подпространств $\mathbb{H}^+$ или $\mathbb{H}^-$ конечна и равна κ, то пространство Крейна переходит в пространство Понтрягина Π_κ и число κ называется рангом индефинитности пространства Π_κ.

Пространство Понтрягина Π_κ, в котором метрика задается индефинитным скалярным произведением (1), назовем пространством Понтрягина–Соболева.

З а м е ч а н и е. Как известно [10, 11] работа [12] сыграла важную роль в возникновении индефинитных пространств с конечным рангом индефинитности.

Пусть $\mathbb{H}$ — пространство вектор-функций

$$F(x) = \{f(x), f'(1), f'(-1)\}$$
$$(f \in L^2(-1,1); f'(+1), f'(-1) \textit{ существуют и конечны}),$$

порожденное билинейной формой (1). Тогда $\mathbb{H} \subset H^{(1)}(-1,1)$ где $H^{(k)}(-1,1)$ — пространство обобщенных функций G на $(-1,1)$ таких, что производные $G^{(j)}(-1,1) \in L^2(-1,1)$, *для любого* $|j| \le k$, *при этом для каждой пары* $G, K \in H^{(k)}(-1,1)$ *полагается*

$$(G,K)_{(k)} = \sum_{|j|\le k} \int_{-1}^{1} G^{(j)}(x) K^{(j)}(x)\, dx \quad \text{и} \quad |G|_{(k)} = \{(G,G)_{(k)}\}^{\frac{1}{2}}$$

(см. [13, гл. 14]).

Если отождествить вектор-функцию $F(x)$ с функцией $f(x)$, то можно говорить, что $f \in \mathbb{H}$ и, в частности, x^n и $B_n(x;N)$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ принадлежат $\mathbb{H}$.

Положим

$$P^+ = \operatorname{span}\{B_n(x;N)\} : \langle B_n(N), B_n(N)\rangle > 0\},$$

$$P^- = \operatorname{span}\{B_n(x;N)\} : \langle B_n(N), B_n(N)\rangle < 0\}$$

и $P^+ \oplus P^- = P$.

Поскольку пространство $\mathbb{H}$ с индефинитным скалярным произведением (1) допускает гильбертову мажоранту

$$(f,g) = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx + |N|[f'(1)g'(1) + f'(-1)g'(-1)],$$

то P — ортодополнительно [9]. Следовательно,

$$\mathbb{H} = P^+ \oplus P^- \oplus P^{\perp}.$$

Лемма 5.

$$\mathbb{H} = P^+ \oplus P^-.$$

Доказательство. Если $f \in P^{\perp}$, то f ортогонально к $B_n(x;N)(n \in \mathbb{Z}_+, x \in [-1,1])$ и потому также к $x^n(n \in \mathbb{Z}_+)$. Так как линейные комбинации $x^n(n \in \mathbb{Z}_+)$ плотны в $H^{(1)}(-1,1)$ [14], то, используя полиномиальную аппроксимацию, можно показать, что f равно нулю в смысле пространства $\mathbb{H}$. Тогда $P^{\perp} = \{0\}$ и $\mathbb{H} = \mathbb{P}^+ \oplus \mathbb{P}^-$. Лемма 5 доказана.

С помощью формулы (2) нетрудно получить, что

$$B_0(x;N) = 1, B_1(x;N) = x.$$

Поэтому

$$\langle B_0, B_0\rangle = 1, \langle B_1, B_1\rangle = \frac{1}{3}(6N+1).$$

Учитывая это, из предыдущих рассуждений получаем утверждение

Теорема. *При выполнении условия (7) пространство $\mathbb{H}$ есть пространство Понтрягина–Соболева с рангом индефинитности $\kappa = 2$, порожденное системой ортогональных полиномов $\{B_n(x;N)\}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ и $\mathbb{H} = P^+ \oplus P^-$.*

Следствие 2. *Если $f \in \mathbb{H}$, то*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \widehat{B}_n, c_n = \langle f, \widehat{B}_n\rangle (n \in \mathbb{Z}_+).$$

Список литературы

[1] *F. Marcellan, M. Alfaro, and M.R. Rezola*, Orthogonal polynomials in Sobolev spaces: old and new directions. — *J. Comp. Appl. Math.* (1993), v. 48, p. 113–132.

[2] *H. Bavinck and H.G. Meijer*, Orthogonal polynomials with respect to a symmetric inner product involving derivatives. — *Appl. Anal.* (1989), v. 33, p. 103–117.

[3] *H. Bavinck and H.G. Meijer*, On orthogonal polynomials with respect to an inner product involving derivatives:zeros and recurrence relations. — *Indag. Math.* (N.S.), (1990), v. 1, p. 7–14.

[4] *H. Bavinck*, Differential operators having Sobolev-type Gegenbauer polynomials as eigenfunctions. — *J. Comp. Appl. Math.* (2000), v. 118, p. 23–42.

[5] *A.M. Krall*, Orthogonal polynomials satisfying fourth order differential equations. — *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* (1981), v. A87, p. 271–288.

[6] *Ф. Марчелан, Б.П. Осиленкер*, Оценки полиномов, ортогональных по отношению к скалярному произведению Лежандра–Соболева. — *Мат. заметки* (1997), т. 6, вып. 2, с. 871–880.

[7] *A. Foulquie Moreno, F. Marcellan, and B.P. Osilenker*, Estimates for polynmials orthogonal with respect to some Gegenbauer-Sobolev type inner product. — *J. Ineq. Appl.* (1999), v. 3, p. 401–419.

[8] *A.B. Mingarelli and A.M. Krall*, Legendre type polynomials under an indefinite inner product. — *SIAM J. Math. Anal.* (1983), v. 14, No. 2, p. 399–402.

[9] *J. Bognar*, Indefinite inner product spaces. Springer, Berlin (1974).

[10] *Т.Я. Азизов, И.С. Иохвидов*, Основы теории линейных операторов в пространстве с индефинитной метрикой. Наука, Москва (1986).

[11] *Т.Я. Азизов, И.С. Иохвидов*, Линейные операторы в пространствах с индефинитной метрикой и их приложения. Мат. анализ. Итоги науки и техники ВИНИТИ, Москва (1979), с. 113–205.

[12] *С.Л. Соболев*, О движении симметричного волчка с полостью, заполненной жидкостью. — *Журн. прикл. механики и техн. физики* (1960), т. 3, с. 20–55.

[13] *Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц*, Линейные операторы. Т. 2. Спектральная теория. Мир, Москва (1966).

[14] *R.A. Adams*, Sobolev spaces. Acad. Press, New York (1975).

Symmetric Legendre–Sobolev orthogonal polynomials in the Pontryagin–Sobolev spaces

B.P. Osilenker

Properties of a symmetric Legendre–Sobolev polynomials orthogonal with respect to a indefinite bilinear form are investigated. It is shown that these polynomials generate the Pontryagin–Sobolev indefinite space with a rank of indefiniteness equal 2.