Математическая физика, анализ, геометрия
2002, т. 9, № 3, с. 394–400

Положительно определенные финитные радиальные функции полиномиального вида и максимальной гладкости

Р.М.Тригуб

Донецкий национальный университет
ул. Университетская, 24, Донецк, 83055, Украина
E-mail:postmaster@ok.donbass.com

Статья поступила в редакцию 17 октября 2001 г.
Представлена И.В. Островским

Изучаются свойства положительно определенных финитных радиальных функций полиномиального вида и максимальной гладкости, найденных автором ранее. Эти "сплайны" как базисные радиальные функции находят применения в вычислительных методах.

Вивчаються властивості додатно визначених радіальних функцій з компактним носієм поліноміального типу та максимальної гладкості, які знайдено автором раніше. Ці "сплайни" як базисні радіальні функції знаходять застосування в обчислювальних методах.

Памяти Наума Ильича Ахиезера посвящается

Непрерывную функцию $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{C}$ называют положительно определенной, если при любых векторах $x_k (1\le k\le n)$ из $\mathbb{R}^m$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} c_k\overline{c}_p f(x_k-x_p)\ge 0$$

каковы бы ни были числа $c_k (1\le k\le n)$ из $\mathbb{C}$ (см., напр., [1, с. 239]). Если еще $f(0)=1$, то функция является характеристической, т.е. преобразованием Фурье вероятностной меры (см. там же, с. 240). Обозначим этот класс функций через Φ_m. Функция радиальная, если она сферически симметрична, т.е. зависит лишь от $|x|$ — евклидовой нормы в $\mathbb{R}^m$: $f(x)=f_0(t), t=$

Mathematics Subject Classification 2000: 42A82, 42B10, 60E10.

Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований Украины (проект 01.07/00241).

$|x| \in [0, +\infty)$. Очевидно, что $\Phi_{m+1} \supset \Phi_m$, а вот их подклассы радиальных функций — в соотношении противоположном (см. там же, с. 244).

В настоящей статье построены финитные радиальные функции в Φ_m, которые на своем носителе равны полиному от $|x|$ произвольно выбранной степени, а на $\mathbb{R}^m$ имеют максимально возможную гладкость или при заданной гладкости на $\mathbb{R}^m$ имеют наименьшую степень. Точнее: $f_0(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k t^k$ при $t \in [0,1]$ и $f_0(t) = 0$ при $t \geq 1$. При $m = 1$ — это простейшие сплайны, так как "склеены" всего из двух полиномов. См. ниже теорему.

Начнем с необходимых условий.

а) Из того, что $f_0(|.|) \in \Phi_m$, следует, что $f_0 \in C^{m_1}(0, +\infty)$ при $m_1 = [\frac{m-1}{2}]$ (см. [2, п. 1, а]). Поэтому в рассматриваемом случае $f_0^{(\nu)}(1) = 0$ при $0 \leq \nu \leq m_1$, а степень n полинома f_0 не меньше $m_1 + 1$.

б) Очевидно, должно быть $f_0^{(2\nu+1)}(0) = 0$ при $0 \leq \nu \leq \frac{r-1}{2}$, если $f_0(|\cdot|) \in C^r$ в окрестности нуля ($r \in \mathbb{N}$).

в) Если при нечетном r $f_0(|.|) \in C^r(\mathbb{R}) \cap \Phi_1$ и существует производная $f^{(r+1)}(0)$, то $f_0(|.|) \in C^{r+1}(\mathbb{R})$.
Для доказательства достаточно заметить, что четная функция f_0 в окрестности нуля равна

$$1 + \sum_{1 \leq \nu \leq \frac{r+1}{2}} a_\nu t^{2\nu} + \overline{o}(t^{r+1}),$$

и применить [2, п. 1, д].
В следующем предложении все сводится к случаю $m = 1$.

Лемма 1. *I. Если четная функция $f_0 \in \Phi_1$, то для любого $m \geq 2$ после нормировки в нуле*

$$\int_0^1 (1 - u^2)^{\frac{m-3}{2}} f_0(u|\cdot|)\, du \in \Phi_m.$$

И наоборот. Любая радиальная функция из Φ_m имеет указанное интегральное представление, где четная функция $f_0 \in \Phi_1$ и однозначно определяется.

II. Если $m \geq 3$ и нечетное, то $f_0(|.|) \in \Phi_m$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{d^k}{dt^k}\{t^{\frac{m-2}{2}} f_0(\sqrt{t})\}_{t=0} = 0 \quad (0 \leq k \leq \frac{m-3}{2})$$

и функция

$$\sqrt{t}\frac{d^{\frac{m-1}{2}}}{dt^{\frac{m-1}{2}}}\{t^{\frac{m-2}{2}} f_0(\sqrt{t})\}$$

после замены t на x^2, нормировки в нуле и четного продолжения принадлежит Φ_1.

Доказательство основано на свойствах бесселевых функций (см. [2, п. 3, леммы 2 и 4], а также [3]).

Лемма 2. *Если* $f \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R})$, *ограничена на* $\mathbb{R}, \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} f(t)\,dt \geq 0$ *и сходятся несобственные интегралы*

$$\int\limits_0^1 \frac{f(t)-f(-t)}{t^3}\,dt, \qquad \int\limits_1^\infty \frac{f(t)-f(-t)}{t}\,dt$$

(все эти условия и необходимы), то f *и* $-f''$ *принадлежат* Φ_1 *после нормировки в нуле одновременно.*

Для доказательства приводимой ниже теоремы достаточно доказать лемму в предположении еще, что функция четная, принадлежит $L(\mathbb{R})$, а $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Но тогда преобразование Фурье

$$\int\limits_0^\infty (-f''(x)) \cos xy\,dx = y^2 \int\limits_0^\infty f(x)\cos xy\,dx$$

(двукратное интегрирование по частям) сохраняет знак на $\mathbb{R}$ одновременно для f и $(-f'')$. И нужно лишь воспользоваться формулой обращения.
Лемма 2 в общем случае сразу следует из критерия характеристической функции из [2, 3].

Лемма 3. *Пусть* $f \in C^{2r}[0,1] (r \in \mathbb{N})$ *и* $f^{(\nu)}(1) = 0 \quad (0 \leq \nu \leq 2r-1)$, *а* $f(0) = 1$. *Для того чтобы функция* f, *продолженная на* $(1,\infty)$ *нулем, а затем на* $\mathbb{R}$ *четным образом, принадлежала* $\Phi_1 \cap C^{2r}(\mathbb{R})$, *необходимо и достаточно, чтобы функция* $(-1)^r f^{(2r)}$, *продолженная тем же способом, после нормировки в нуле принадлежала* Φ_1, *а*

$$\int\limits_0^1 t^{2k} f^{(2r)}(t)\,dt = 0 \quad (0 \leq k \leq 2r-1). \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Для перехода от f к $(-1)^r f^{(2r)}$ применяем лемму 2 r раз. Очевидно, что при $x \geq 0$

$$f(x) = \frac{1}{(2r-1)!} \int\limits_1^x (x-t)^{2r-1} f^{(2r)}(t)\,dt.$$

В силу четности функции f ее производные нечетного порядка $f^{(2r-1-2k)}(0) = 0 \quad (0 \le k \le r-1)$, а это условие совпадает с (1).

Достаточность. Полагаем

$$f(x) = \frac{1}{(2r-1)!} \int\limits_1^x (x-t)^{2r-1} f^{(2r)}(t)\, dt.$$

Из (1) следует теперь, что $f^{(2r-1-2k)}(0) = 0 \quad (0 \le k \le r-1)$. А так как еще четная функция $f \in C^{2r}$ в проколотой окрестности нуля, то и во всей окрестности $f \in C^{2r}$.

Далее. В силу условия леммы $(-1)^r f^{(2r)}$ после нормировки принадлежит Φ_1 и, значит, непрерывна при $x = 1$. Таким образом, $f \in C^{2r}(\mathbb{R})$. По лемме 2 и $f \in \Phi_1$. Лемма 3 доказана.

Теперь рассмотрим при $n \ge 2$ полином a_n степени n, который определяется следующими условиями на $[0,1]$:

$$a_n(0) = 1, \quad a_n(1) = 0, \quad \int\limits_0^1 t^{2k} a_n(t)\, dt = 0 \qquad (0 \le k \le n-2). \tag{2}$$

Легко проверить, что при $t > 0$

$$a_n(\sqrt{t}) = \frac{2^{n-1}}{(2n-3)!!} \sqrt{t} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \{ t^{n-\frac{3}{2}} (1-\sqrt{t})^n \}$$

и, значит,

$$a_n(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{(2n+k-3)!! n!}{(2n-3)!!(k-1)!! k! (n-k)!} t^k.$$

Очевидно, что $a_n'(1) \ne 0$ и $a_n'(0) \ne 0$. Положим $a_1(t) = 1 - t$. Если с отрезка $[0,1]$ продолжить a_n на $(1, +\infty)$ нулем, а затем четным образом на $\mathbb{R}$, то, как показано в [2], с помощью нового критерия характеристической функции (см. также [3]), построенный сплайн $a_n \in \Phi_1$, т.е. его преобразование Фурье $\hat{a}_n$ неотрицательно на $\mathbb{R}$.

Теорема 1. *Пусть m — нечетное.*

I. Для любого $n \ge \frac{m+1}{2}$ имеется в Φ_m функция, которая при $|x| \le 1$ является полиномом степени n от $|x|$, равная нулю при $|x| \ge 1$ и принадлежащая $C^r(\mathbb{R}^m)$ при $r = 2[\frac{2n-m-1}{6}]$(целая часть) и только при указанном r (не больше).

II. Для любого целого $r \geq 0$ имеется в Φ_m функция того же вида, принадлежащая $C^{2r}(\mathbb{R}^m)$, степени $n = 3r + \frac{m+1}{2}$ и не меньше. Этот радиальный "сплайн" $A_{r,m}$ единственный и имеет вид

$$A_{0,1}(|x|) = a_1(|x|) = (1 - |x|)_+,$$

$$A_{0,m}(|x|) = \frac{(m-1)(m-2)!!}{(m-1)!!} \int_0^1 (1-u^2)^{\frac{m-3}{2}} a_{\frac{m+1}{2}}(u|x|)\, du \quad (m \geq 3),$$

$$A_{r,1}(|x|) = (-1)^r \frac{(3r+1)!}{(r+1)!(2r-1)!} \int_1^{|x|} (|x| - u)^{2r-1} a_{r+1}(u)\, du \quad (r \geq 1),$$

$$A_{r,m}(|x|) = \gamma_{r,m} \int_0^1 (1-u^2)^{\frac{m-3}{2}}\, du \int_1^{|x|u} (|x|u - t)^{2r-1} a_{r+\frac{m+1}{2}}(t)\, dt \ \ (r \geq 1, m \geq 3),$$

где

$$\gamma_{r,m} = (-1)^r \frac{(m-1)(2r+m-2)!!(3r+\frac{m+1}{2})!}{(m-1)!!(2r-1)!!(2r-1)!(r+\frac{m+1}{2})!}.$$

Доказательство теоремы. II. Пусть сначала $m = 1$. Случай $r = 0$ очевиден. А при $r \geq 1$ применяем лемму 3. При $t \geq 1$ $A_{r,1}(t) = 0$, как и a-сплайн. Еще нужно учесть равенства (2) и то, что

$$(-1)^r A_{r,1}^{(2r)}(t) = \frac{(3r+1)!}{(r+1)!} a_{r+1}(t).$$

Из необходимых условий а) и б) (см. выше) следует, что степень сплайна не меньше $3r+1$. При $m > 1$ естественно применить лемму 1(I).

При переходе от Φ_1 к Φ_m полином от $|x|$ в единичном шаре останется полиномом той же степени, гладкость не уменьшается, но и не увеличивается (в нуле). А вот финитность сохраняется лишь при переходе от Φ_m (m — нечетное) к Φ_1 (см. II в лемме 1).

Укажем условия, обеспечивающие сохранение финитности при рассматриваемом интегральном преобразовании от Φ_1 к Φ_m.

Если m — нечетное и $f_0(t) = 0$ вне $[-1, 1]$, а

$$\int_0^1 t^{2k} f_0(t)\, dt = 0 \qquad (0 \leq k \leq \frac{m-3}{2}),$$

то при $t \geq 1$

$$\int\limits_0^1 (1-u^2)^{\frac{m-3}{2}} f_0(tu)\,du = \frac{1}{t}\int\limits_0^1 (1-\frac{u^2}{t^2})^{\frac{m-3}{2}} f_0(u)\,du = 0.$$

Очевидно, что при нечетном m верно и обратное утверждение. Проверим это условие при $r \geq 1$, например.
После перемены порядка интегрирования и линейной замены

$$\int\limits_0^1 t^{2k}\,dt \int\limits_1^t (t-u)^{2r-1} a_{r+\frac{m+1}{2}}(u)\,du$$

$$= -\int\limits_0^1 t^{2k}(1-t)^{2r-1}\,dt \int\limits_0^1 u^{2k+2r} a_{r+\frac{m+1}{2}}(u)\,du = 0$$

при $k \leq \frac{m-3}{2}$ (последнее равенство опять же в силу (2)).

I. Доказательство то же самое, но здесь может не быть единственности. Например, без учета нормирующего множителя можно положить ($m=1$ и $m>1$, соответственно)

$$(-1)^{\frac{r}{2}} \int\limits_1^{|x|} (|x|-u)^{r-1} a_s(u)\,du \quad (\frac{r}{2}+1 \leq s \leq n-r),$$

$$(-1)^{\frac{r}{2}} \int\limits_0^1 (1-u^2)^{\frac{m-3}{2}}\,du \int\limits_1^{|x|u} (|x|u-t)^{r-1} a_s(t)\,dt \quad (\frac{r}{2}+\frac{m+1}{2} \leq s \leq n-r).$$

Теорема доказана.

Примеры.

A-сплайн в $\Phi_1 \cap C^2(\mathbb{R})$ наименьшей степени равен $A(|x|) = (1-|x|)_+^3(1+3|x|)$, а в $\Phi_3 \cap C^2(\mathbb{R}^3)$ $A(|x|) = (1-|x|)_+^4(1+4|x|)$.

Эти радиальные A-сплайны максимальной гладкости введены автором еще в 1986 г. В одномерном случае они подробно исследованы, включая порядок приближения линейными комбинациями сдвигов, в работе [4]. В общем случае нечетного m результат анонсирован в [5] (см. также [6]). После доклада автора в июне 2001 г. на конференции в Петербурге [7] О.В. Давыдов любезно прислал из Германии оттиск статьи [8], в которой сообщается и о разных применениях положительно определенных радиальных функций (radial basis functions).

Список литературы

[1] *Н.И. Ахиезер*, Классическая проблема моментов. Физматгиз, Москва (1961).

[2] *Р.М. Тригуб*, Некоторые свойства преобразования Фурье меры и их применение. Тр. Междунар. конф. по теории приближения функций. Киев-83. Наука, Москва (1987), с. 439–443.

[3] *Р.М. Тригуб*, Критерий характеристической функции и признак типа Пойа для радиальных функций нескольких переменных. — *Теор. вероятностей и ее применения* (1989), т. 34, вып. 4, с. 805–810.

[4] *В.П.Заставный, Р.М. Тригуб*, Положительно определенные сплайны. Деп. в Укр. НИИНТИ № 593-Ук.87, 39 с.

[5] *Р.М. Тригуб*, Положительно определенные функции и сплайны. Сб.: Теория функций и приближений. Тр. 5-й Саратовск. зимней школы 25.01–4.02 1990 г., ч. I., Саратов (1992), с. 68–75.

[6] *Р.М. Тригуб*, Некоторые вопросы анализа Фурье и теории приближений. Препринт № 95.05. Донецк, (1995), 86 с. (Internet:funct-an/9612008)

[7] *R.M. Trigub*, On positive definite radial splines of special kind. Int. conf. OFEA' 2001. 25.06–29.06 2001. St. Petersburg. Abstracts. P. 174.

[8] *H. Wendland*, Piecewise polinomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree. — *Adv. Comp. Math.* (1995), v. 4, p. 389–396.

Compactly supported positive definite radial functions of polynomial kind and maximal smoothness

R.M. Trigub

The properties of compactly supported positive definite radial functions of polynomial kind and of maximal smoothness are investigated. These properties were found by the author earlier. These "splines" are applying in computing methods as basis radial functions.