Математическая физика, анализ, геометрия
2002, т. 9, № 3, с. 436–445

Граничные уравнения в задачах динамики тонких упругих пластин со смешанными краевыми условиями

Ю.С. Гассан

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина
E-mail:Yu.Gassan@aport2000.ru

Статья поступила в редакцию 30 ноября 2001 г.
Представлена И.Д. Чуешовым

Рассматриваются задачи динамики тонких упругих пластин в рамках модели Кирхгофа со смешанными граничными условиями. Решения задач представляются динамическими аналогами потенциалов простого и двойного слоев. Эти представления приводят к системам парных граничных уравнений относительно неизвестных плотностей. Основным результатом работы является доказательство разрешимости этих систем в однопараметрической шкале пространств соболевского типа.

Розглядаються задачі динаміки тонких пружних пластин у рамках моделі Кірхгофа зі змішаними граничними умовами. Розв'язки задач уявляються динамічними аналогами потенціалів простого та подвійного шарів. Ці уявлення приводять до систем парних граничних рівнянь відносно невідомих щільностей. Основним результатом роботи є доведення розв'язності цих систем у однопараметричній шкалі просторів соболєвського типу.

Тонкие упругие пластины являются элементами многочисленных конструкций, используемых в разных областях техники. Поэтому весьма актуальной является задача расчета напряжений, возникающих в процессе их колебаний. В работе предложен вариант метода потенциалов, позволяющий свести эту задачу к решению систем нестационарных граничных уравнений.

Mathematics Subject Classification 2000: 31N10, 31B35, 74B05.

Рассматривается задача динамики тонких упругих пластин. Смещение $u(x,t)$ точки $x=(x_1,x_2)$ срединной плоскости пластины в направлении, перпендикулярном этой плоскости в недеформированном состоянии, является решением смешанной задачи [1]:

$$\begin{array}{ll} \partial_t^2 u(x,t) + D\Delta^2 u(x,t) = 0, & (x,t)\in\Omega\times\mathbf{R}_+, \\ u(x,0) = \partial_t u(x,0) = 0, & x\in\Omega, \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} u(x,t) = f_1(x,t), \\ \partial_n u(x,t) = f_2(x,t), \end{array}\right. \qquad (x,t)\in\Gamma_1\times\mathbf{R}_+,$$

$$\left\{\begin{array}{l} (Qu)(x) = g_1(x,t), \\ (-Mu)(x) = g_2(x,t), \end{array}\right. \qquad (x,t)\in\Gamma_2\times\mathbf{R}_+,$$

где

$$\begin{array}{l} Qu = -D(\partial_n\Delta u + (1-\nu)\partial_\tau[n_1n_2(\partial_2^2u - \partial_1^2u) + (n_1^2-n_2^2)\partial_1\partial_2 u]), \\ Mu = -D(\Delta u + (1-\nu)(2n_1n_2\partial_1\partial_2 u - n_2^2\partial_1^2 u - n_1^2\partial_2^2 u)) - \end{array}$$

обобщенная перерезывающая сила и изгибающий момент соответственно, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $i=1,2$, ∂_n, — производная по внешней нормали $n(x)=(n_1(x),n_2(x))$ к контуру Γ, ∂_τ — производная в направлении касательного к Γ вектора $\tau(x)$, полученного из вектора нормали поворотом на $\pi/2$ против часовой стрелки, $\mathbf{R}_+=(0,\infty)$, Ω область в $\mathbf{R}^2$ с границей $\Gamma=\overline{\Gamma_1\cup\Gamma_2}$, Γ_i имеют не нулевую меру, $i=1,2$, D — числовой коэффициэнт, ν — коэффициент Пуассона материала, из которого изготовлена пластина.

Заметим, что однородное уравнение колебаний пластины и однородные начальные условия не ограничивают общности задачи, поскольку неоднородную задачу можно привести к указанному виду с помощью хорошо известной процедуры. Далее будем параллельно рассматривать внутреннюю S^+ и внешнюю S^- задачи в областях $\Omega^+=\Omega$ и $\Omega^-=\mathbf{R}^2\backslash\overline{\Omega^+}$ соответственно. Обозначим через $G^\pm=\Omega^\pm\times\mathbf{R}_+$, $G=\Omega\times\mathbf{R}_+$, $\vec{g}=(g_1,g_2)$, $\vec{f}=(f_1,f_2)$.

Введем используемые далее функциональные пространства, следуя схеме, предложенной в [2]. Пространства $\mathbf{H}_{m,p}(\mathbf{R}^2)$, $p\in\mathbf{C}$, $m\in\mathbf{R}$, совпадают как множества со стандартными пространствами Соболева $\mathbf{H}_m(\mathbf{R}^2)$. Норма этих пространств определена формулой

$$\|u\|_{m,p}^2 = \int\limits_{\mathbf{R^2}} (1+|\xi|^2+|p|)^m |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi,$$

где $\tilde{u}(\xi)$ — обобщенное преобразование Фурье $u(x)$. Пространства $\overset{o}{\mathbf{H}}_{m,p}(\Omega)$ являются подпространствами в $\mathbf{H}_{m,p}(\mathbf{R}^2)$, состоящими из элементов $u(x)$, таких что $supp\, u\subset\overline{\Omega}$. Пространства $\mathbf{H}_{m,p}(\Omega)$ состоят из сужений на Ω элементов пространства $\mathbf{H}_{m,p}(\mathbf{R}^2)$. Норма в этих пространствах вводится формулой

$$\|u\|_{m,p;\Omega} = \inf_{\hat{u}\in\mathbf{H}_{m,p}(\mathbf{R}^2):\hat{u}|_\Omega = u} \|\hat{u}\|_{m,p}.$$

Обозначим $\mathbf{C}_\kappa = \{p \in \mathbf{C} : \Re ep > \kappa\}$. Пусть $\mathbf{H}_{L;m,k,\kappa}(\Omega)$ пространства функций $u(x,p)$, $p \in \mathbf{C}_\kappa$, которые голоморфно отображают $\mathbf{C}_\kappa$ в стандартные пространства Соболева $\mathbf{H}_m(\Omega)$ и обладают конечными нормами, определенными формулами

$$\|u\|^2_{m,k,\kappa;\Omega} = \sup_{\sigma>\kappa} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+|p|)^{2k} \|u\|^2_{m,p;\Omega} d\tau, \qquad p = \sigma + i\tau.$$

Пространства $\mathbf{H}_{r;m,k,\kappa}(G)$ состоят из обратных преобразований Лапласа $u(x,t) = L^{-1}u(x,p)$ элементов $u(x,p) \in \mathbf{H}_{L;m,k,\kappa}(\Omega)$. Нормы в этих пространствах вводятся формулами

$$\|u\|_{m,k,\kappa;G} = \|Lu\|_{m,k,\kappa;\Omega}.$$

Пространства на границе Γ строятся таким же образом на основе пространств $\mathbf{H}_{m,p}(\Gamma)$, которые вводятся по стандартной схеме, использующей разложение единицы и переход к локальным координатам [1].

Введем операторы следов $\vec{\gamma}^{\pm}$, непрерывно при $m > 3/2$, $k \in \mathbf{R}$ отображающие пространства $\mathbf{H}_{r;m,k,\kappa}(G^{\pm})$ на $\mathbf{H}_{r;m-1/2,k,\kappa}(\Sigma^{+}) \times \mathbf{H}_{r;m-3/2,k,\kappa}(\Sigma^{+})$, сопоставляя функции $u(x,t)$ пару $\{u, \partial_n u\}$, состоящую из следа на $\Sigma^+ = \Gamma \times \mathbf{R}_+$ функции u и ее нормальной производной, π_i непрерывные операторы сужения элементов пространства $\mathbf{H}_{r;m-1/2,k,\kappa}(\Sigma^{+}) \times \mathbf{H}_{r;m-3/2,k,\kappa}(\Sigma^{+})$ на части $\Sigma_i^+ = \Gamma_i \times \mathbf{R}_+$, $i = 1,2$. Норму пространств $\mathbf{H}_{r;m,k,\kappa}(\Sigma_i^+) \times \mathbf{H}_{r;l,k,\kappa}(\Sigma_i^+)$ обозначим через $\|\cdot\|_{m,l,p;\Sigma_i^+}$.

Решением задач $S^{\pm}$ назовем элемент $u(x,t) \in \mathbf{H}_{r;2,0,\kappa}(G^{\pm})$, который имеет след $\pi_1 \vec{\gamma}^{\pm} u = \vec{f}$ и удовлетворяет вариационному уравнению

$$\int\limits_0^\infty a_{\pm}(u,v)dt - \int\limits_{G^{\pm}} \partial_t u \overline{\partial_t v} dx dt = \pm \int\limits_0^\infty < \vec{g}, \pi_2 \vec{\gamma}^{\pm} v >_{0,\Gamma_2} dt \tag{1}$$

для любой функции $v(x,t) \in \mathbf{C}^\infty(G^{\pm})$ с компактным носителем $supp\, v \subset (\Omega^{\pm} \cup \Gamma_2) \times \overline{\mathbf{R}}_+$. Через $< \cdot, \cdot >_{0,X}$ обозначено скалярное произведение в пространстве $[L^2(X)]^2$, квадратичная форма $a_{\pm}(u,v)$ имеет вид

$$D \int\limits_{\Omega^{\pm}} \Big(\partial_1^2 u \overline{\partial_1^2 v} + \partial_2^2 u \overline{\partial_2^2 v} + \nu(\partial_1^2 u \overline{\partial_2^2 v} + \partial_2^2 u \overline{\partial_1^2 v}) + 2(1-\nu)\partial_1\partial_2 u \overline{\partial_1\partial_2 v} \Big) dx.$$

Теорема 1. *Для любых* $\vec{f} \in \mathbf{H}_{r;3/2,k,\kappa}(\Sigma_1^+) \times \mathbf{H}_{r;1/2,k,\kappa}(\Sigma_1^+)$ *и* $\vec{g} \in \mathbf{H}_{r;-3/2,k,\kappa}(\Sigma_2^+) \times \mathbf{H}_{r;-1/2,k,\kappa}(\Sigma_2^+)$ *задача (1) имеет единственное решение* $u \in \mathbf{H}_{r;2,k-1,\kappa}(G^{\pm})$ *при всех* $k \geq 1$, $\kappa > 0$. *Справедлива оценка*

$$\|u\|_{2,k-1,\kappa;G^{\pm}} \leq c(\|\vec{f}\|_{3/2,1/2,k,\kappa;\Sigma_1^+} + \|\vec{g}\|_{-3/2,-1/2,k,\kappa;\Sigma_2^+})$$

с некоторой положительной постоянной c.

Доказательство теоремы проводится операторным методом с помощью перехода к преобразованиям Лапласа, подобно тому, как это было сделано в [4] для случая колебаний пластин в модели поперечного сдвига.

На основе фундаментального решения уравнения колебаний пластины $\Phi(x,t)$ ($\Phi(x,t)=0$, $t<0$) строим запаздывающие упругие потенциалы. Явный вид фундаментального решения приведен в [3].

Динамическим потенциалом простого слоя с определенной на $\Sigma=\Gamma\times\mathbf{R}$ двухкомпонентной плотностью $\vec{\alpha}(x,t)=\{\alpha^1,\alpha^2\}$ назовем функцию

$$(V\vec{\alpha})(x,t)=\int\limits_{\Sigma}\{\Phi(x-y,t-\tau)\alpha^1(y,\tau)+\partial_{n,y}\Phi(x-y,t-\tau)\alpha^2(y,\tau)\}ds_y d\tau,$$

где $\partial_{n,y}$ — операция нормальной производной, действующая по переменной y. Динамический потенциал двойного слоя с определенной на Σ двухкомпонентной плотностью $\vec{\beta}(x,t)=\{\beta^1,\beta^2\}$ введем формулой

$$(W\vec{\beta})(x,t)=\int\limits_{\Sigma}\{Q_y\Phi(x-y,t-\tau)\beta^1(y,\tau)-M_y\Phi(x-y,t-\tau)\beta^2(y,\tau)\}ds_y d\tau,$$

в которой Q_y и M_y — действующие по переменной y операции обобщенной перерезывающей силы и изгибающего момента.

Очевидно, по крайней мере для гладких на Σ финитных плотностей, оба потенциала удовлетворяют в $\mathbf{R}^2\setminus\Gamma$ однородному уравнению колебаний пластины. Если же плотности равны нулю при $t<0$, то оба потенциала удовлетворяют нулевым начальным условиям. Для запаздывающих потенциалов справедливы формулы скачков, аналогичные известным формулам скачков для аналогов поверхностных потенциалов в двумерном случае [5].

Представление решений задач $S^{\pm}$ суммой потециалов простого и двойного слоев $u(x,t)=(V\vec{\alpha})(x,t)+(W\vec{\beta})(x,t)$, если плотность $\vec{\alpha}$ определена на Σ_2^+, а плотность $\vec{\beta}$ на Σ_1^+, приводит к системе нестационарных граничных уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l}\pi_1((V\vec{\alpha})(x,t)+(W\vec{\beta})^{\pm}(x,t))=f_1(x,t),\\ \pi_1(\partial_n(V\vec{\alpha})(x,t)+\partial_n(W\vec{\beta})^{\pm}(x,t))=f_2(x,t),\\ \pi_2(Q(V\vec{\alpha})^{\pm}(x,t)+Q(W\vec{\beta})^{\pm}(x,t))=g_1(x,t),\\ \pi_2((-MV\vec{\alpha})^{\pm}(x,t)+(-MW\vec{\beta})^{\pm}(x,t))=g_2(x,t),\end{array}\right. \qquad (x,t)\in\Sigma^+. \tag{2}$$

Перейдем в исходной задаче к преобразованиям Лапласа по переменной времени. Пусть $u\in\mathbf{H}_{2,p}(\Omega^{\pm})$ решение $p^2u+\Delta^2u=0$ с граничным условием $\vec{\gamma}_p^{\pm}u=\vec{f}$, где p — параметр преобразований Лапласа, $\vec{f}(x,p)\in\mathbf{H}_{3/2,p}(\Gamma)\times\mathbf{H}_{1/2,p}(\Gamma)$. Введем аналоги оператора Пуанкаре–Стеклова, действующие на произвольный элемент $\vec{\varphi}=(\varphi_1,\varphi_2)\in\mathbf{H}_{3/2,p}(\Gamma)\times\mathbf{H}_{1/2,p}(\Gamma)$ по формуле:

$$\langle\vec{N}_p^{\pm}\vec{f},\vec{\varphi}\rangle_{0,\Gamma}=\pm\left\{p^2(u,v)_{0,\Omega^{\pm}}+a_{\pm}(u,v)\right\}, \tag{3}$$

где $v(x,p)\in \mathbf{H}_{2,p}(\Omega^{\pm})$, $\vec{\gamma}_p^{\pm}v=\vec{\varphi}$.

Возьмем в (3) $u=v$, отделим вещественную и мнимую части

$$|p|^2\|u\|^2_{0,\Omega^{\pm}}+a_{\pm}(u,u)=\pm\sigma^{-1}\Re e\{\bar{p}\langle\vec{N}_p^{\pm}\vec{f},\vec{f}\rangle_{0,\Gamma}\},\qquad p=\sigma+i\tau,$$
$$\|u\|^2_{2,p;\Omega^{\pm}}\le c|p||\langle\vec{N}_p^{\pm}\vec{f},\vec{f}\rangle_{0,\Gamma}|.$$

С другой стороны, из (3) следует неравенство

$$|\langle\vec{N}_p^{\pm}\vec{f},\vec{\varphi}\rangle_{0,\Gamma}|\le c\|u\|_{2,p;\Omega^{\pm}}\|v\|_{2,p;\Omega^{\pm}}\le c\|u\|_{2,p;\Omega^{\pm}}\|\vec{\varphi}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma}\,;$$

значит, $\vec{N}_p^{\pm}\vec{f}\in\mathbf{H}_{-3/2,p}(\Gamma)\times\mathbf{H}_{-1/2,p}(\Gamma)$ и

$$||\vec{N}_p^{\pm}\vec{f}||^2_{-3/2,-1/2,p;\Gamma}\le c\|u\|^2_{2,p;\Omega^{\pm}}\le c|p|\|\vec{N}_p^{\pm}\vec{f}\|_{-3/2,-1/2,p;\Gamma}\|\vec{f}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma}\,. \tag{4}$$

По теореме о следах

$$\|\vec{f}\|^2_{3/2,1/2,p;\Gamma}\le c\|u\|^2_{2,p;\Omega^{\pm}}\le c|p|\|\vec{N}_p^{\pm}\vec{f}\|_{-3/2,-1/2,p;\Gamma}\|\vec{f}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma}\,. \tag{5}$$

Теорема 2. *При всех $p\in\mathbf{C}_\kappa$, $\kappa>0$, операторы $\vec{N}_p^{\pm}$ осуществляют биективные отображения*

$$\vec{N}_p^{\pm}:\mathbf{H}_{3/2,p}(\Gamma)\times\mathbf{H}_{1/2,p}(\Gamma)\to\mathbf{H}_{-3/2,p}(\Gamma)\times\mathbf{H}_{-1/2,p}(\Gamma).$$

Справедливы оценки

$$\|\vec{N}_p^{\pm}\vec{f}\|_{-3/2,-1/2,p;\Gamma}\le c|p|\|\vec{f}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma}\,,\ \|\vec{f}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma}\le c|p|\|\vec{N}_p^{\pm}\vec{f}\|_{-3/2,-1/2,p;\Gamma}\,.$$

Теорема 3. *Граничные операторы $\vec{V}_p=\vec{\gamma}_p^{\pm}V_p$, $\vec{W}_p^{\pm}=\vec{\gamma}_p^{\pm}W_p$, порожденные преобразованиями Лапласа по переменной времени потенциалов простого и двойного слоя соответственно, могут быть продолжены по непрерывности до операторов, осуществляющих для всех $p\in\mathbf{C}_\kappa$, $\kappa>0$, $k\in\mathbf{R}$, биективные отображения*

$$\vec{V}_p:\mathbf{H}_{-3/2,p}(\Gamma)\times\mathbf{H}_{-1/2,p}(\Gamma)\to\mathbf{H}_{3/2,p}(\Gamma)\times\mathbf{H}_{1/2,p}(\Gamma),$$
$$\vec{W}_p^{\pm}:\mathbf{H}_{3/2,p}(\Gamma)\times\mathbf{H}_{1/2,p}(\Gamma)\to\mathbf{H}_{3/2,p}(\Gamma)\times\mathbf{H}_{1/2,p}(\Gamma).$$

Справедливы оценки

$$\|\vec{V}_p\vec{\alpha}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma}\le c|p|\|\vec{\alpha}\|_{-3/2,-1/2,p;\Gamma}\,,\ \|\vec{\alpha}\|_{-3/2,-1/2,p;\Gamma}\le c|p|\|\vec{V}_p\vec{\alpha}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma}\,,$$
$$\|\vec{W}_p^{\pm}\vec{\beta}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma}\le c|p|^3\|\vec{\beta}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma}\,,\ \|\vec{\beta}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma}\le c|p|\|\vec{W}_p^{\pm}\vec{\beta}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma}\,.$$

Доказательство теорем 2, 3 можно найти в [3].

Введем операторы $\pi_{ij}^{\pm}$, которые элементам $\vec{\varphi}\in\mathbf{H}_{\frac{3}{2},p}(\Gamma)\times\mathbf{H}_{\frac{1}{2},p}(\Gamma)$ сопоставляют пару $\{\pi_i\vec{\varphi},\pi_j\vec{N}_p^{\pm}\vec{\varphi}\}\in\mathbf{H}_{\frac{3}{2},p}(\Gamma_i)\times\mathbf{H}_{\frac{1}{2},p}(\Gamma_i)\times\mathbf{H}_{-\frac{3}{2},p}(\Gamma_j)\times\mathbf{H}_{-\frac{1}{2},p}(\Gamma_j)$. Норму в последнем пространстве обозначим $\|\cdot\|_{ij}$.

Лемма 1. *Операторы* $\pi_{ij}^{\pm}$ *осуществляют биективные отображения между* $\mathbf{H}_{\frac{3}{2},p}(\Gamma)\times\mathbf{H}_{\frac{1}{2},p}(\Gamma)$ *и* $\mathbf{H}_{\frac{3}{2},p}(\Gamma_i)\times\mathbf{H}_{\frac{1}{2},p}(\Gamma_i)\times\mathbf{H}_{-\frac{3}{2},p}(\Gamma_j)\times\mathbf{H}_{-\frac{1}{2},p}(\Gamma_j)$

Доказательство. Ограниченность операторов $\pi_{ij}^{\pm}$ следует из оценок

$$||\pi_i\vec{\varphi}||_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p;\Gamma_i}\le\|\vec{\varphi}\|_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p;\Gamma},$$
$$\left\|\pi_j\vec{N}_p^{\pm}\vec{\varphi}\right\|_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p;\Gamma_j}\le\left\|\vec{N}_p^{\pm}\vec{\varphi}\right\|_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p;\Gamma}\le c|p|\|\vec{\varphi}\|_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p;\Gamma}$$

для любой $\vec{\varphi}\in\mathbf{H}_{\frac{3}{2},p}(\Gamma)\times\mathbf{H}_{\frac{1}{2},p}(\Gamma)$. То есть $\|\pi_{ij}^{\pm}\vec{\varphi}\|_{ij}\le|p|\|\vec{\varphi}\|_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p;\Gamma}$. Убедимся в плотности областей значений операторов $\pi_{ij}^{\pm}$ в пространствах $\mathbf{H}_{\frac{3}{2},p}(\Gamma_i)\times\mathbf{H}_{\frac{1}{2},p}(\Gamma_i)\times\mathbf{H}_{-\frac{3}{2},p}(\Gamma_j)\times\mathbf{H}_{-\frac{1}{2},p}(\Gamma_j)$. Достаточно показать плотность в этих пространствах множеств $\Theta_{ij}^{\pm}$ элементов, которые имеют вид $\{0,\pi_j\vec{N}_p^{\pm}\vec{\psi}\}+\{\pi_i\vec{\varphi},0\}$, где $\vec{\psi}\in\overset{o}{\mathbf{H}}_{\frac{3}{2},p}(\Gamma_j)\times\overset{o}{\mathbf{H}}_{\frac{1}{2},p}(\Gamma_j)$, а φ принадлежит подмножеству пространства $\mathbf{H}_{\frac{3}{2},p}(\Gamma)\times\mathbf{H}_{\frac{1}{2},p}(\Gamma)$ такому, что $\vec{N}_p^{\pm}\vec{\varphi}\in\overset{o}{\mathbf{H}}_{-\frac{3}{2},p}(\Gamma_i)\times\overset{o}{\mathbf{H}}_{-\frac{1}{2},p}(\Gamma_i)$. Предположив обратное, найдем ненулевой элемент $\{\vec{a},\vec{b}\}\in\overset{o}{\mathbf{H}}_{-\frac{3}{2},p}(\Gamma_i)\times\overset{o}{\mathbf{H}}_{-\frac{1}{2},p}(\Gamma_i)\times\overset{o}{\mathbf{H}}_{\frac{3}{2},p}(\Gamma_j)\times\overset{o}{\mathbf{H}}_{\frac{1}{2},p}(\Gamma_j)$ такой, что $\langle\pi_i\vec{\varphi},\vec{a}\rangle_{0,\Gamma_i}+\left\langle\vec{b},\pi_j\vec{N}_p^{\pm}\vec{\psi}\right\rangle_{0,\Gamma_j}=0$, для всех $\vec{\psi},\vec{\varphi}$, указанных выше. Взяв в этом равенстве $\vec{\psi}=0$, $\vec{\varphi}=(\vec{N}_p^{\pm})^{-1}\vec{a}$, получим $\left\langle(\vec{N}_p^{\pm})^{-1}\vec{a},\vec{a}\right\rangle_{0,\Gamma}=0$, откуда в силу (4) $\vec{a}=0$. Взяв дальше $\vec{\psi}=\vec{b}$, из этого же равенства получим $\vec{b}=0$. Из полученного противоречия следует плотность $\Theta_{ij}^{\pm}$ в нужных пространствах.

Рассмотрим $\{\vec{f},0\}\in\Theta_{ij}^{\pm}$, где $\vec{f}=\pi_i\vec{\varphi}$, а $\vec{\varphi}$ принадлежит множеству, описанному выше. Используя оценки (4) и (5), получим

$$\left\|\vec{N}_p^{\pm}\vec{\varphi}\right\|^2_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p;\Gamma}\le c|p|\|\vec{N}_p^{\pm}\vec{\varphi}\|_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p;\Gamma}\|\vec{f}\|_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p;\Gamma_i},$$
$$||\vec{\varphi}||^2_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p;\Gamma}\le c|p|||\vec{N}_p^{\pm}\vec{\varphi}\|_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p;\Gamma}\|\vec{f}\|_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p;\Gamma_i}\le c|p|^2\|\vec{f}\|^2_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p;\Gamma_i}.$$

Теперь рассмотрим $\{0,\vec{g}\}\in\Theta_{ij}^{\pm}$, где $\vec{g}=\pi_j\vec{N}_p^{\pm}\vec{\psi}$. Учитывая (5), имеем

$$\|\vec{\psi}\|^2_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p;\Gamma}\le c|p|\|\vec{g}\|_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p;\Gamma_j}\|\vec{\psi}\|_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p;\Gamma}. \tag{6}$$

Таким образом,

$$\|\vec{\varphi}+\vec{\psi}\|_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p;\Gamma}\le c|p|(\|\vec{f}\|_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p;\Gamma_i}+\|\vec{g}\|_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p;\Gamma_j})=c|p|\left\|\pi_{ij}^{\pm}(\vec{\varphi}+\vec{\psi})\right\|_{ij}.$$

Из полученных результатов вытекает существование оператора $(\pi_{ij}^{\pm})^{-1}$ и его ограниченность на множествах $\Theta_{ij}^{\pm}$. Из плотности последних в указанных выше пространствах получаем оценку

$$\|(\pi_{ij}^{\pm})^{-1}\{\vec{f},\vec{g}\}\|_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p;\Gamma} \le c|p| \left\|\{\vec{f},\vec{g}\}\right\|_{ij} \tag{7}$$

для всех элементов $\{\vec{f},\vec{g}\} \in \mathbf{H}_{\frac{3}{2},p}(\Gamma_i) \times \mathbf{H}_{\frac{1}{2},p}(\Gamma_i) \times \mathbf{H}_{-\frac{3}{2},p}(\Gamma_j) \times \mathbf{H}_{-\frac{1}{2},p}(\Gamma_j)$. Лемма доказана.

Следствие. *Пространство* $\mathbf{H}_{\frac{3}{2},p}(\Gamma) \times \mathbf{H}_{\frac{1}{2},p}(\Gamma)$ *раскладывается в прямую сумму подпространства* $\overset{o}{\mathbf{H}}_{-\frac{3}{2},p}(\Gamma_j)\times \overset{o}{\mathbf{H}}_{-\frac{1}{2},p}(\Gamma_j)$ *и подпространства элементов* $\vec{\varphi}$ *таких, что* $\vec{N}_p^{\pm}\vec{\varphi} \in \overset{o}{\mathbf{H}}_{-\frac{3}{2},p}(\Gamma_i)\times \overset{o}{\mathbf{H}}_{-\frac{1}{2},p}(\Gamma_i)$, $i=1,2$.

Лемма 2. *Пусть* $\vec{\varphi} \in \mathbf{H}_{\frac{3}{2},p}(\Gamma) \times \mathbf{H}_{\frac{1}{2},p}(\Gamma)$, *такая что* $\vec{\varphi} = (\pi_{ij}^{\pm})^{-1}\{\vec{f},\vec{g}\}$, $\{\vec{f},\vec{g}\} \in \mathbf{H}_{\frac{3}{2},p}(\Gamma_i) \times \mathbf{H}_{\frac{1}{2},p}(\Gamma_i) \times \mathbf{H}_{-\frac{3}{2},p}(\Gamma_j) \times \mathbf{H}_{-\frac{1}{2},p}(\Gamma_j)$. *Справедлива оценка*

$$\|\vec{N}_p^{\pm}\vec{\varphi}\|_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p,\Gamma} \le c(|p|\|\vec{f}\|_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p,\Gamma_i} + |p|^2\|\vec{g}\|_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p,\Gamma_j}). \tag{8}$$

Доказательство этой леммы следует из следствия и оценок леммы 1.

Введем при $i,j=1,2$, $i\neq j$ операторы $\theta_{ij}^{\pm}$, которые паре $\{\pi_i\vec{\varphi},\pi_j\vec{N}_p^{\pm}\vec{\varphi}\} \in \mathbf{H}_{\frac{3}{2},p}(\Gamma_i)\times\mathbf{H}_{\frac{1}{2},p}(\Gamma_i)\times\mathbf{H}_{-\frac{3}{2},p}(\Gamma_j)\times\mathbf{H}_{-\frac{1}{2},p}(\Gamma_j)$, где $\vec{\varphi} \in \mathbf{H}_{\frac{3}{2},p}(\Gamma)\times\mathbf{H}_{\frac{1}{2},p}(\Gamma)$, ставят в сответствие пару $\{\pi_j\vec{\varphi},\pi_i\vec{N}_p^{\pm}\vec{\varphi}\} \in \mathbf{H}_{\frac{3}{2},p}(\Gamma_j)\times\mathbf{H}_{\frac{1}{2},p}(\Gamma_j)\times\mathbf{H}_{-\frac{3}{2},p}(\Gamma_i)\times\mathbf{H}_{-\frac{1}{2},p}(\Gamma_i)$. Равенство $\theta_{ij}^{\pm} = \pi_{ji}^{\pm}(\pi_{ij}^{\pm})^{-1}$ доказывает ограниченность операторов $\theta_{ij}^{\pm}$. Из оценок (8) и (7) для $\vec{\varphi}_1 = (\pi_{ij}^{\pm})^{-1}\{\vec{f},0\} \in \overset{o}{\mathbf{H}}_{\frac{3}{2},p}(\Gamma_i)\times \overset{o}{\mathbf{H}}_{\frac{1}{2},p}(\Gamma_i)$ получаем

$$\begin{aligned}
&||\pi_j\vec{\varphi}_1||_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p;\Gamma_j} \le ||\vec{\varphi}_1||_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p;\Gamma} \le c|p|\|\{\vec{f},0\}\|_{ij} = c|p|\|\vec{f}\|_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p;\Gamma_i}\,,\\
&||\pi_i\vec{N}_p^{\pm}\vec{\varphi}_1||_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p;\Gamma_i} \le ||\vec{N}_p^{\pm}\vec{\varphi}_1||_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p;\Gamma} \le c|p|\|\vec{f}\|_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p;\Gamma_i}\,;\\
&\left\|\theta_{ij}^{\pm}\{\vec{f},0\}\right\|_{ji} \le c|p|\|\vec{f}\|_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p;\Gamma_i}\,.
\end{aligned}$$

Далее из (6) и (8) для $\vec{\varphi}_0 = (\pi_{ij}^{\pm})^{-1}\{0,\vec{g}\} \in \overset{o}{\mathbf{H}}_{\frac{3}{2},p}(\Gamma_j)\times \overset{o}{\mathbf{H}}_{\frac{1}{2},p}(\Gamma_j)$ получаем

$$\begin{aligned}
&\|\pi_j\vec{\varphi}_0\|_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p;\Gamma_j} \le \|\vec{\varphi}_0\|_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p;\Gamma} \le c|p|\,\|\vec{g}\|_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p;\Gamma_j}\,,\\
&\|\pi_i\vec{N}_p^{\pm}\vec{\varphi}_0\|_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p;\Gamma_i} \le \|\vec{N}_p^{\pm}\vec{\varphi}_0\|_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p;\Gamma} \le c|p|^2\|\vec{g}\|_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p;\Gamma_j}\,;\\
&\left\|\theta_{ij}^{\pm}\{0,\vec{g}\}\right\|_{ji} \le c|p|^2\|\vec{g}\|_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p;\Gamma_j}\,.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\left\|\theta_{ij}^{\pm}\{\vec{f},\vec{g}\}\right\|_{ji} \le c(|p|\|\vec{f}\|_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p,\Gamma_i} + |p|^2\|\vec{g}\|_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p,\Gamma_j})\,. \tag{9}$$

В терминах преобразований Лапласа система (2) имеет вид

$$\begin{cases} \pi_1((\vec{V}_p\vec{\alpha}) + (\vec{W}_p^{\pm}\vec{\beta})) = \vec{f}, \\ \pi_2\vec{N}_p^{\pm}((\vec{V}_p\vec{\alpha}) + (\vec{W}_p^{\pm}\vec{\beta})) = \vec{g} \end{cases} \quad \text{или} \quad \pi_{12}^{\pm}((\vec{V}_p\vec{\alpha}) + (\vec{W}_p^{\pm}\vec{\beta})) = \{\vec{f}, \vec{g}\}. \tag{10}$$

Теорема 4. *Решение*

$$\{\vec{\alpha}, \vec{\beta}\} \in \overset{o}{\mathbf{H}}_{-\frac{3}{2},p}(\Gamma_2)\times \overset{o}{\mathbf{H}}_{-\frac{1}{2},p}(\Gamma_2)\times \overset{o}{\mathbf{H}}_{\frac{3}{2},p}(\Gamma_1)\times \overset{o}{\mathbf{H}}_{\frac{1}{2},p}(\Gamma_1)$$

граничных уравнений (10) существует и единственно для любых пар $\{\vec{f}, \vec{g}\} \in \mathbf{H}_{\frac{3}{2},p}(\Gamma_1) \times \mathbf{H}_{\frac{1}{2},p}(\Gamma_1) \times \mathbf{H}_{-\frac{3}{2},p}(\Gamma_2) \times \mathbf{H}_{-\frac{1}{2},p}(\Gamma_2)$. *Справедлива оценка*

$$|p| \left\|\vec{\beta}\right\|_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p,\Gamma_1} + \|\vec{\alpha}\|_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p,\Gamma_2} \le c|p|^3 \left(\|\vec{f}\|_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p,\Gamma_1} + |p|\|\vec{g}\|_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p,\Gamma_2}\right). \tag{11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем элемент $\vec{\varphi} = (\pi_{12}^{\pm})^{-1}\{\vec{f}, \vec{g}\}$. Обозначим через $\{\vec{f}^1, \vec{g}^1\} = \theta_{12}^{\pm}\{\vec{f}, \vec{g}\} \in \mathbf{H}_{\frac{3}{2},p}(\Gamma_2) \times \mathbf{H}_{\frac{1}{2},p}(\Gamma_2) \times \mathbf{H}_{-\frac{3}{2}}(\Gamma_1) \times \mathbf{H}_{-\frac{1}{2},p}(\Gamma_1)$. Из определения $\theta_{ij}^{\pm}$ получим $\{\vec{f}^1, \vec{g}^1\} = \pi_{21}^{\pm}(\pi_{12}^{\pm})^{-1}\{\vec{f}, \vec{g}\} = (\pi_{21}^{\pm})\vec{\varphi}$, т.е.

$$\vec{\varphi} = (\pi_{21}^{\pm})^{-1}\{\vec{f}^1, \vec{g}^1\} \in \mathbf{H}_{\frac{3}{2},p}(\Gamma) \times \mathbf{H}_{\frac{1}{2},p}(\Gamma). \tag{12}$$

Введем также элемент

$$\vec{\psi} = (\pi_{21}^{\mp})^{-1}\{\vec{f}^1, \vec{g}^1\} \in \mathbf{H}_{\frac{3}{2},p}(\Gamma) \times H_{\frac{1}{2},p}(\Gamma). \tag{13}$$

Из оценок (7)–(9) следуют неравенства:

$$||\vec{\varphi}||_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p;\Gamma} \le ||(\pi_{12}^{\pm})^{-1}\{\vec{f}, \vec{g}\}||_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p;\Gamma} \le c|p|\|\{\vec{f}, \vec{g}\}\|_{1\,2}\,,$$
$$||\vec{\psi}||_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p;\Gamma} \le c|p|\|\{\vec{f}^1, \vec{g}^1\}\|_{2\,1} \le c(|p|^2\|\vec{f}\|_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p;\Gamma_1} + |p|^3\|\vec{g}\|_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p;\Gamma_2}).$$

Рассмотрим нормы

$$\begin{aligned} &|| \pm (\vec{\psi} - \vec{\varphi})\|_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p;\Gamma} \le c(|p|^2\|\vec{f}\|_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p;\Gamma_1} + |p|^3\|\vec{g}\|_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p;\Gamma_2})\,, \\ &|| \pm (\vec{N}_p^{\pm}\vec{\varphi} - \vec{N}_p^{\mp}\vec{\psi})\|_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p;\Gamma} \le c(|p|^3\|\vec{f}\|_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p;\Gamma_1} + |p|^4\|\vec{g}\|_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p;\Gamma_2}). \end{aligned} \tag{14}$$

Поскольку φ и ψ определяются соответственно формулами (12) и (13), то $\pi_2\varphi = \pi_2\psi = \vec{f}^1$, а $\pi_1\vec{N}_p^{\pm}\varphi = \pi_1\vec{N}_p^{\mp}\psi = \vec{g}^1$, т.е. $\pm(\vec{\psi} - \vec{\varphi}) \in \overset{o}{\mathbf{H}}_{\frac{3}{2},p}(\Gamma_1)\times \overset{o}{\mathbf{H}}_{\frac{1}{2},p}(\Gamma_1)$, а $\pm(\vec{N}_p^{\pm}\vec{\varphi} - \vec{N}_p^{\mp}\vec{\psi}) \in \overset{o}{\mathbf{H}}_{-\frac{3}{2},p}(\Gamma_2)\times \overset{o}{\mathbf{H}}_{-\frac{1}{2},p}(\Gamma_2)$.

Докажем, что построенные разности дают решение системы (10). Чтобы проверить это, в формальное решение $u(x) = (W_p\vec{\beta})(x) + (V_p\vec{\alpha})(x) \in \mathbf{H}_{2,p}(\Omega^{\pm})$

подставим $\{\vec{\alpha},\vec{\beta}\} = \{\pm(\vec{N}_p^{\pm}\vec{\varphi} - \vec{N}_p^{\mp}\vec{\psi}), \pm(\vec{\psi}-\vec{\varphi})\}$. Учитывая формулы скачков и легко проверяемые формулы $\vec{W}_p^{\pm}\vec{\beta} = \vec{V}_p\vec{N}_p^{\mp}\vec{\beta}$, получим равенства

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}_p^{\pm}\vec{u} &= \vec{W}_p^{\pm}\vec{\beta} + \vec{V}_p\vec{\alpha} = \vec{V}_p(\vec{N}_p^{\mp}\vec{\beta} + \vec{\alpha}) \\
&= \vec{V}_p(\vec{N}_p^{\mp}(\pm(\vec{\varphi}-\vec{\psi})) \pm (\vec{N}_p^{\pm}\vec{\varphi} - \vec{N}_p^{\mp}\vec{\psi})) = \vec{V}_p(\mp\vec{N}_p^{\mp}\vec{\varphi} \pm \vec{N}_p^{\pm}\vec{\varphi}) = \vec{\varphi}, \\
\vec{N}_p^{\pm}\vec{\gamma}_p^{\pm}\vec{u} &= \vec{N}_p^{\pm}(\vec{W}_p^{\pm}\vec{\beta} + \vec{V}_p\vec{\alpha}) = \vec{N}_p^{\pm}\vec{V}_p(\vec{N}_p^{\mp}\vec{\beta} + \alpha) \\
&= \vec{N}_p^{\pm}\vec{V}_p(\pm\vec{N}_p^{\mp}(\vec{\psi}-\vec{\varphi}) \pm (\vec{N}_p^{\pm}\vec{\varphi} - \vec{N}_p^{\mp}\vec{\psi})) = \vec{N}_p^{\pm}\vec{\varphi},
\end{aligned}$$

а значит, $\pi_{12}^{\pm}(\vec{W}_p^{\pm}\vec{\beta} + \vec{V}_p\vec{\alpha}) = \{\vec{f},\vec{g}\}$.

Справедливость оценки (11) следует из оценок (14). Теорема доказана.

Несложно проверить, что $\{\vec{\alpha},\vec{\beta}\}$ осуществляют голоморфные отображения $\mathbf{C}_\kappa$ в пространства $\overset{o}{\mathbf{H}}_{-\frac{3}{2},p}(\Gamma_2)\times \overset{o}{\mathbf{H}}_{-\frac{1}{2},p}(\Gamma_2)\times \overset{o}{\mathbf{H}}_{\frac{3}{2},p}(\Gamma_1)\times \overset{o}{\mathbf{H}}_{\frac{1}{2},p}(\Gamma_1)$, если $\{\vec{f},\vec{g}\}$ голоморфно отображает C_κ в пространство $\mathbf{H}_{\frac{3}{2},p}(\Gamma_1)\times\mathbf{H}_{\frac{1}{2},p}(\Gamma_1)\times \mathbf{H}_{-\frac{3}{2},p}(\Gamma_2)\times\mathbf{H}_{-\frac{1}{2},p}(\Gamma_2)$. Возвращаясь в пространство оригиналов, учитывая оценку (11), получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Система граничных уравнений (2) однозначно разрешима, разрешающие операторы этой системы ограничены в указанных ниже пространствах и имеют плотные области значений в*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{H}_{r;\frac{3}{2},k,\kappa}(\Sigma_1^+)\times\mathbf{H}_{r;\frac{1}{2},k,\kappa}(\Sigma_1^+)\times\mathbf{H}_{r;-\frac{3}{2},k+1,\kappa}(\Sigma_2^+)\times\mathbf{H}_{r;-\frac{1}{2},k+1,\kappa}(\Sigma_2^+)\\
&\mapsto \overset{o}{\mathbf{H}}_{r;-\frac{3}{2},k-3,\kappa}(\Sigma_2^+)\times \overset{o}{\mathbf{H}}_{r;-\frac{1}{2},k-3,\kappa}(\Sigma_2^+)\times \overset{o}{\mathbf{H}}_{r;\frac{3}{2},k-2,\kappa}(\Sigma_1^+)\times \overset{o}{\mathbf{H}}_{r;\frac{1}{2},k-2,\kappa}(\Sigma_1^+).
\end{aligned}$$

Таким образом, решив системы граничных уравнений (2), однозначно находим плотности $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$, строим по ним соответствующие потенциалы, сумма которых является решением исходных краевых задач $S^{\pm}$.

Список литературы

[1] *Г. Дюво, Ж.–Л. Лионс*, Неравенства в механике и физике. Наука, Москва (1980).

[2] *М.С. Агранович, М.И. Вишик*, Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида. — *Успехи мат. наук* (1964), № 19, вып. 3, с. 53–161.

[3] *I.Ю. Чудiнович, Ю.С. Гассан*, Граничнi рiвняння в основних задачах динамiки тонких пружних пластин. — *Вiсн. Харк. нац. ун-ту.*, Математика, прикл. математика i механiка (2000), № 475. вип. 49, с. 250–257. (English)

[4] *I.Yu.Chudinovich and Ch. Constanda*, Solvability of initial-boundary value problems in bending of plates. — *Angew. Math. Phys.* (2000), № 51, p. 449–466.

[5] *I.Yu.Chudinovich and Ch. Constanda*, Variational and potentional methods in the theory of bending of plates with transverse shear deformation. Monography and surveys in Pure and Applied mathematics. 115. Chapman & Hall/CRC. Boca Raton, London, New York, Washington (2000).

Boundary equations in dynamic problems for thin elastic plates with mixed boundary conditions

Yu.S. Gassan

The dynamic problems for thin elastic plates in the Kirchhoff model with mixed boundary conditions are under consideration. The solutions for the problems are introduced by dynamic analogs of the single and double layers potentials. These representations lead to the pair boundary equations systems with respect to the unknown densities. The main result of work is the prove of solvability of these systems in an one-parameter scale of Sobolev-type function spaces.