Математическая физика, анализ, геометрия
2002, т. 9, № 3, с. 493–501

О функциях с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса

О.А. Очаковская

Донецкий национальный университет
ул. Университетская, 24, Донецк, 83055, Украина
E-mail:volchkov@univ.donetsk.ua

Статья поступила в редакцию 29 ноября 2001 г.
Представлена Г.М. Фельдманом

Изучаются различные классы функций с нулевыми интегралами по всем шарам фиксированного радиуса. Решается задача о существовании нулевой функции заданного роста с этим свойством.

Вивчаються різні класи функцій з нульовими інтегралами по усіх кулях з фіксованим радіусом. Розв'язується задача про існування ненульової функції з цією властивістю, що має заданий ріст.

Введение

Пусть f — локально суммируемая функция на вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Предположим, что при всех $y \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$\int\limits_{|x|\leq 1} f(x+y)dx = 0, \tag{1}$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Следует ли из этого, что $f = 0$? В общем случае ответ отрицательный (см., например, [1], где получено описание некоторых классов таких функций), но при некоторых дополнительных предположениях равенство $f = 0$ имеет место. Одним из таких предположений является ограничение на рост f при $|x| \to \infty$. Первые результаты такого вида принадлежат Ф. Иону, Д. Смиту и др. (см. [2–4] и библиографию к этим работам).

Большой интерес представляет проблема описания структуры носителя функции f с заданным поведением на бесконечности, когда в условии (1) y принадлежит некоторому подмножеству $\mathbb{R}^n$. Полное решение этой задачи

Mathematics Subject Classification 2000: 42B10.

(именуемой проблемой носителя) в случае, когда y принадлежит внешности компакта со связным дополнением получено В.В. Волчковым в работе [5].

В работах автора [6, 7] рассмотрена аналогичная задача для функций, заданных на полупространстве $E = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ и имеющих нулевые интегралы по всем замкнутым шарам фиксированного радиуса r, содержащимся в E (следуя [1], обозначим через $V_r(E)$ класс функций $f \in L_{loc}(E)$ с указанным свойством). В [7] показано, что всякая функция $f \in V_r(E)$, для которой $e^{\alpha x_n} f \in L(E)$ при всех $\alpha > 0$, равна нулю почти всюду в E. Кроме того, для любого $\alpha > 0$ существует ненулевая $f \in V_r(E)$ такая, что $e^{\alpha x_n} f \in L(E)$ (см. [7]).

В данной работе получены подобные результаты для случая, когда указанное условие сверхэкспоненциального убывания f по переменной x_n существенно ослабляется, но при этом добавляется некоторое условие убывания f по остальным переменным.

1. Формулировка основного результата

Обозначим $\mathbb{Z}_+^{n-1}$ — множество $(n-1)$-мерных мультииндексов, т.е. всех векторов из $\mathbb{R}^{n-1}$ с неотрицательными целыми координатами. Для мультииндекса $k = (k_1, \dots, k_{n-1})$ положим $|k| = k_1 + \ldots + k_{n-1}$.

Основным результом работы является

Теорема. *Имеют место следующие утверждения:*

1) Пусть $f \in V_r(E)$ и выполнены условия:

а) для почти всех $t \in (0, +\infty)$ и всех $k \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$

$$M_k(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |f(x_1, \dots, x_{n-1}, t)|(1+|x_1|)^{k_1} \dots (1+|x_{n-1}|)^{k_{n-1}} \, dx_1 \dots dx_{n-1} < \infty$$

и

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\inf_{q \geq m} \left(\max_{|k|=q} M_k(t) \right)^{\frac{1}{q}} \right)^{-1} = \infty; \tag{2}$$

б)

$$\varliminf_{N \to \infty} \frac{1}{N} \int\limits_1^N dx_n \int\limits_{R^{n-1}} |f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)| \, dx_1 \dots dx_{n-1} = 0, \tag{3}$$

тогда $f = 0$.

2) Для любой последовательности положительных чисел $\{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ такой, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\inf_{q \geq m} M_q^{1/q} \right)^{-1} < \infty, \tag{4}$$

существует ненулевая функция $f \in V_r(E)$, для которой выполнено условие б) и

$$\int\limits_{R^{n-1}} |f(x_1, \dots, x_{n-1}, t)|(1+|x_1|)^{k_1} \dots (1+|x_{n-1}|)^{k_{n-1}} dx_1 \dots dx_{n-1} \leq M_{|k|} \quad (5)$$

при всех $t > 0, k \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$.

Отметим, что согласно обобщению известной теоремы Данжуа–Карлемана (см., например, [8]) из условия а) в первом утверждении теоремы 1 следует, что для почти всех $t \in (0, +\infty)$ преобразование Фурье функции $f(x_1, \dots, x_{n-1}, t)$ (как функции переменных $x_1, \dots, x_{n-1}$) принадлежит квазианалитическому классу функций на $\mathbb{R}^{n-1}$. Простым достаточным условием для выполнения условия а) является оценка $f(x_1, \dots, x_{n-1}, t) = O(e^{-\varepsilon(|x_1|+\dots+|x_{n-1}|)})$, справедливая при некотором $\varepsilon > 0$ и $|x_1| + \dots + |x_{n-1}| \to \infty$ (постоянная в знаке O может зависеть от t). При этом условие б) требует гораздо более слабого убывания f при $x_n \to +\infty$, чем в работе [7].

Теорема 1 анонсирована автором в [9, 10].

2. Вспомогательные утверждения

Пусть, как обычно, J_ν — функция Бесселя первого рода порядка $\nu > -1$. Известно (см., например, [11, гл. 2, пар. 23], что при таких ν функция $J_\nu(z)$ имеет бесконечно много корней z, которые являются вещественными, простыми (за исключением, быть может, точки $z = 0$) и расположены симметрично относительно нуля. Обозначим τ_n — наименьший положительный корень функции $J_{\frac{n}{2}}$.

Лемма 1. *Пусть $\gamma \in (0, \tau_n)$ и*

$$h(z) = \int\limits_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)^{\frac{n-1}{4}} J_{\frac{n-1}{2}} \left(\gamma\sqrt{1-t^2}\right) e^{izt}\, dt. \quad (6)$$

Тогда функция h имеет только вещественные и простые корни.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Правая часть в (6) является известным интегралом Сонина (см. [11, гл. 2, формула (20.10)]). Вычисления показывают, что

$$h(z) = \sqrt{2\pi} \frac{\gamma^{\frac{n-1}{2}}}{\left(\sqrt{\gamma^2+z^2}\right)^{\frac{n}{2}}} J_{\frac{n}{2}} \left(\sqrt{\gamma^2+z^2}\right), \quad (7)$$

где выбирается любая ветвь корня $\sqrt{\ }$. Поскольку все корни $J_{\frac{n}{2}}$ вещественны и $\gamma \in (0, \tau_n)$, отсюда следует, что все корни h также вещественны. Далее, из (7) и [11, гл. 1, пар. 6, формула (6.1)] находим

$$h'(z) = -\frac{\sqrt{2\pi}\gamma^{\frac{n-1}{2}} J_{\frac{n}{2}+1}\left(\sqrt{\gamma^2+z^2}\right)}{\left(\sqrt{\gamma^2+z^2}\right)^{\frac{n}{2}+1}}. \tag{8}$$

Поскольку функции $J_{\frac{n}{2}}(z)$ и $J_{\frac{n}{2}+1}(z)$ не имеют общих корней, за исключением $z = 0$ (см. [11, гл. 2, пар. 23]), отсюда следует, что все корни h являются простыми.

З а м е ч а н и е. Существует постоянная $C > 0$, зависящая только от γ, n, такая, что $|h'(z)| > C|z|^{-\frac{n+1}{2}}$ для любого корня z функции h.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из равенств (7), (8) и асимптотических формул для функций $J_{\frac{n}{2}}(z)$, $J_{\frac{n}{2}+1}(z)$ при $z \to +\infty$, см. [13, гл. 2, пар. 29, формула (29.4)].

Лемма 2. *Пусть β, $l > 0$, $c > \sqrt{1+l^2}$ и для $\varphi(t) = e^{-\beta\sqrt{t^2-l^2}}$, $t > l$. Тогда для любого $\eta \in [a, b] \subset (c, +\infty)$ имеет место оценка*

$$|\varphi^{(j)}(\eta)| \le K^j (j+1)^j e^{-\alpha\beta},\ \alpha = \sqrt{a^2-l^2},\ j \in \mathbb{Z}_+,$$

где постоянная $K > 0$ не зависит от j, η.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из формулы Коши для производных функций $\varphi(z) = e^{-\beta\sqrt{z^2-l^2}}$, где выбрана ветвь корня $\sqrt{\ }$, принимающая положительные значения на положительной полуоси.

Лемма 3. *Пусть $\{a_q\}$ — последовательность положительных чисел такая, что $\sum\limits_{q=1}^{\infty} \frac{1}{a_q} = \infty$. Тогда для любого $s > 0$ $\sum\limits_{q=1}^{\infty} a_q^{-1-\frac{s}{q}} = \infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $A_s = \{q \in N : a_q^s > 2^q\}$ и предположим, что $\sum\limits_{q=1}^{\infty} a_q^{-1-\frac{s}{q}} < \infty$. Тогда $\sum\limits_{q=1}^{\infty} a_q^{-1} < \sum\limits_{q \in A_s} 2^{-\frac{q}{s}} + 2\sum\limits_{q \notin A_s} a_q^{-1-\frac{s}{q}}$.

Отсюда следует сходимость ряда $\sum\limits_{q=1}^{\infty} a_q^{-1}$, что противоречит условию.

Нам потребуется также следующий известный результат, полученный В.В. Волчковым (см. [12]).

Лемма 4. *Пусть* $\varphi \in L[-1,1]$, $g \in L_{loc}(0,+\infty)$ *и* $\int\limits_{-1}^{1} \varphi(t)g(t+\xi)\,dt = 0$ *для почти всех* $\xi > 1$. *Пусть также преобразование Фурье* $\hat{\varphi}(z) = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(t)e^{izt}\,dt$ *имеет только вещественные корни и существуют постоянные* $c_1, c_2 > 0$ *такие, что* $|\hat{\varphi}'(z)| > c_1|z|^{-c_2}$ *для всех достаточно больших по модулю корней* z *функции* $\hat{\varphi}$.

Тогда, если $\varliminf\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\int\limits_{1}^{N} |g(t)|\,dt = 0$, *то* $g = 0$ *на* $(0,+\infty)$.

3. Доказательство основного результата

Перейдем к доказательству первой части теоремы.

Пусть $B = \{x \in R^n : |x| \le 1\}$ и f удовлетворяет условиям теоремы. Тогда при любом $t = (t_1, \dots, t_{n-1}) \in R^{n-1}$ и $y > 1$

$$\int\limits_B f(x_1 + t_1, \dots, x_{n-1} + t_{n-1}, x_n + y)\,dx = 0.$$

Умножим это равенство на $e^{i(\lambda,t)}$, где $\lambda \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^{n-1}$. Интегрируя по t на $\mathbb{R}^{n-1}$, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(\lambda,t)}\,dt \int\limits_B f(x_1 + t_1, \dots, x_{n-1} + t_{n-1}, x_n + y)\,dx = 0.$$

После перемены порядка интегрирования и элементарных преобразований имеем

$$\int\limits_B e^{-i(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n-1}x_{n-1})} g_\lambda(x_n + y)\,dx = 0, \ y > 1, \tag{9}$$

где

$$g_\lambda(x_n) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, x_n) e^{i(\lambda_1\xi_1 + \dots + \lambda_{n-1}\xi_{n-1})}\,d\xi_1 \dots d\xi_{n-1}\,. \tag{10}$$

Записывая интеграл (9) в виде повторного, получаем

$$\int\limits_{-1}^{1} g_\lambda(x_n + y) \int\limits_{x_1^2+\dots+x_{n-1}^2 \le 1 - x_n^2} e^{i(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n-1}x_{n-1})}\,dx_1 \dots dx_n = 0.$$

Используя формулу для преобразования Фурье индикатора шара (см. [13, гл. 4, теорема 4.15]), находим

$$\int\limits_{-1}^{1} g_\lambda(x_n+y)(1-x_n^2)^{\frac{n-1}{4}} J_{\frac{n-1}{2}}\left(\gamma\sqrt{1-x_n^2}\right) dx_n = 0, \qquad (11)$$

где $y>1$ и $\gamma=\sqrt{\lambda_1^2+\ldots+\lambda_{n-1}^2}$.
Из равенства (10) получаем $|g_\lambda(x_n)| \le \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |f(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1},x_n)|\, d\xi_1\ldots d\xi_{n-1}$, откуда $\varliminf\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N}\int\limits_1^N |g_\lambda(t)|dt = 0$ (см. (3)).

Из равенства (11) и лемм 1, 4 заключаем, что при любом $\gamma\in(0,\tau_n)$ функция $g_\lambda(x_n)=0$ почти всюду на $(0,+\infty)$. Обозначим $U=\{\lambda\in\mathbb{R}^{n-1}: \lambda_1^2+\lambda_2^2+\ldots+\lambda_{n-1}^2<\tau_n^2\}$ и выберем счетное множество U_1, плотное в U.

Пусть $U_1=\{\eta_m\}_{m=1}^{\infty}$, тогда $(0,+\infty)=E_1^m\cup E_2^m$, где $g_{\eta_m}(x_n)=0$ при $x_n\in E_1^m$ и $g_{\eta_m}(x_n)\ne 0$ при $x_n\in E_2^m$. Положим $E_3=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_2^m$, $E_4=(0,+\infty)\backslash E_3$. Тогда лебегова мера $\mu(E_3)=0$ и $g_{\eta_m}(x_n)=0$ при $x_n\in E_4$ и всех m.

Заметим, что при указанных x_n $g_\lambda(x_n)$ является непрерывной функцией переменных $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}$, см. (10). Поэтому $g_\lambda(x_n)=0$ при $x_n\in E_4$ и всех $\lambda\in U$. Докажем, что при каждом $x_n\in E_4$ функция $g_\lambda(x_n)$ (как функция переменной $\lambda\in\mathbb{R}^{n-1}$) принадлежит квазианалитическому классу функций на $\mathbb{R}^{n-1}$.

Действительно, для любого $k=(k_1,\ldots,k_{n-1})\in\mathbb{Z}_+^{n-1}$ из (10) имеем

$$\left|\frac{\partial^{|k|}}{\partial\lambda_1^{k_1}\ldots\partial\lambda_{n-1}^{k_{n-1}}} g_\lambda(x_n)\right|$$

$$\le \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |f(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1},x_n)|(1+|\xi_1|)^{k_1}\ldots(1+|\xi_{n-1}|)^{k_{n-1}}\, d\xi_1\ldots d\xi_{n-1}.$$

Используя обобщение теоремы Данжуа–Карлемана (см. [8]), из последнего неравенства и (2) получаем квазианалитичность $g_\lambda(x_n)$ в $\mathbb{R}^{n-1}$. Поэтому из приведенных выше рассуждений вытекает, что для почти всех $x_n>0$ функция $g_\lambda(x_n)=0$ при всех $\lambda\in\mathbb{R}^{n-1}$. Отсюда и из (10) получаем первое утверждение теоремы.

Докажем второе утверждение теоремы.
Не ограничивая общности можно считать, что последовательность $\{M_q^{\frac{1}{q}}\}_{q=0}^{\infty}$ не убывает (в противном случае M_q можно заменить на $m_q=\left(\inf\limits_{j\ge q} M_j^{\frac{1}{j}}\right)^q$.

Кроме того, достаточно рассмотреть случай, когда $r = 1$ (общий случай получается отсюда преобразованием подобия).

Пусть $d_j = M_{j-2n+1}$ при $j \geq 2n-1$ и $d_j = d_{2n-1}^{\frac{j}{2n-1}}$ при $j = 1, \dots, 2n-2$. Тогда последовательность $d_j^{\frac{1}{j}}$ не убывает и по лемме 3 ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} d_j^{-\frac{1}{j}}$ сходится. Пусть $\{\zeta_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел такая, что $\lim\limits_{j\to\infty} \zeta_j^{\frac{1}{j}} = +\infty$, ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \left(\frac{d_j}{\zeta_j}\right)^{-\frac{1}{j}}$ сходится и последовательность $\left(\frac{d_j}{\zeta_j}\right)^{\frac{1}{j}}$ не убывает. Пусть также $p \in \mathbb{R}^n$, $l = |p| > 0$ и $J_{\frac{n}{2}}(l) = 0$. Сначала рассмотрим случай $n = 2$. В [7, с. 118–120] показано, что для любой $\Psi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^1)$ с носителем на $(l, +\infty)$

$$f(x_1, x_2) = \int\limits_l^{\infty} e^{itx_1} e^{-\sqrt{t^2-l^2}x_2} \Psi(t)\, dt \tag{12}$$

принадлежит $V_1(E)$. Докажем, что Ψ можно выбирать так, чтобы функция f удовлетворяла требуемым условиям. Из теоремы Карлемана (см. [14, гл. 1, т. 1.3.8]) следует, что для любого $c > \sqrt{1+l^2}$ существует неотрицательная функция $u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^1)$ с носителем на $[a, b] \subset (c, +\infty)$, удовлетворяющая условиям

$$\left|u^{(j)}(t)\right| \leq K_1^{j+1} \frac{d_j}{\zeta_j}, \quad t \in \mathbb{R}^1, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{13}$$

где постоянная $K_1 > 0$ не зависит от t и j. Полагая

$$f_1(x_1, x_2) = \int\limits_a^b e^{itx_1} u_1(t, x_2)\, dt, \quad \text{где} \quad u_1(t, x_2) = e^{-\sqrt{t^2-l^2}x_2} u(t), \tag{14}$$

при $x \neq 0$ имеем

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{(-1)^{m+2}}{(ix_1)^{m+2}} \int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{itx_1} \frac{\partial^{m+2} u_1}{\partial t^{m+2}}(t, x_2)\, dt, \quad m \in \mathbb{Z}_+. \tag{15}$$

Из определения u_1, леммы 2 и (13) имеем оценку

$$\left|\frac{\partial^{m+2} u_1}{\partial t^{m+2}}(t, x_2)\right| \leq K_2^{m+1} e^{-\alpha x_2} \frac{d_{m+2}}{\zeta_{m+2}}, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad \alpha = \sqrt{a^2 - l^2},$$

где постоянная $K_2 > 0$ не зависит от x_2, t, m. Отсюда и из (14), (15) получим неравенство

$$|f_1(x_1, x_2)| \leq e^{-\alpha x_2} \min\left(K_3^{m+1} |x_1|^{-m-2} \frac{d_{m+2}}{\zeta_{m+2}},\ K_3\right) \tag{16}$$

с постоянной $K_3 > 0$, не зависящей от x_1, x_2, m. Оценка (16) показывает, что при достаточно большом K_4 функция f, определенная в (12) для $\Psi = \frac{u}{K_4}$, удовлетворяет всем требуемым условиям.

Пусть теперь $n \geq 3$. В [7, с. 118–120] показано, что для любой функции $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ с носителем на множестве $\Omega = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : y_1^2 + \ldots + y_{n-2}^2 < l^2, y_{n-1} > l\}$ функция

$$f(x) = \int\limits_\Omega e^{iy_{n-1}x_{n-1}} e^{-\sqrt{y_{n-1}^2 - l^2}x_n} e^{i(x_1y_1 + \ldots + x_{n-2}y_{n-2})} \Psi(y) dy \tag{17}$$

принадлежит $V_r(E)$. Как и выше, докажем, что при подходящей Ψ функция f удовлетворяет требуемым условиям.

Положим $g(y_1, \ldots, y_n) = \Psi_1(y_1) \ldots \Psi_n(y_n)$, где $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$ — неотрицательные функции класса $C^\infty(\mathbb{R}^1)$, удовлетворяющие условиям

$$\left|\Psi_s^{(j)}(t)\right| \leq K_5^{j+1} \frac{d_j}{\zeta_j}, \quad t \in \mathbb{R}^1, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad s = 1, \ldots, n,$$

где постоянная $K_5 > 0$ не зависит от j, s, t. Мы предполагаем также, что носители функций Ψ_p таковы, что носитель g содержится в Ω. Повторяя изложенные выше рассуждения, из (17) получаем, что при достаточно больших $K_6 > 0$ функция f, определенная в (17) для $\Psi = \frac{g}{K_6}$, удовлетворяет всем требуемым условиям.

Список литературы

[1] *В.В. Волчков*, Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах. — *Мат. сб.* (1995), т. 186, № 6, с. 15–34.

[2] *Ф. Йон*, Плоские волны и сферические средние в применениии к дифференциальным уравнениям с частными производными. — Изд-во иностр. лит., Москва (1958).

[3] *I.D. Smith*, Harmonic analysis of scalar and vector fields in R^n. — *Proc. Cambridge Philos. Soc.* (1972), v. 72, p. 403–416.

[4] *S. Thangavelu*, Spherical means and CR functions on the Heisenberg group. — *J. Anal. Math.* (1994), v. 63, p. 255–286.

[5] *В.В. Волчков*, Решение проблемы носителя для некоторых классов функций. — *Мат. сб.* (1997), т. 188, № 9, с. 13–30.

[6] *О.А. Очаковская*, Новая теорема единственности для функций с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса. — *Тр. ИПММ НАН Украины* (2000), т. 5, с. 115–121.

[7] *О.А.Очаковская*, О проблеме носителя для функций с нулевыми шаровыми средними. — *Праці IМ НАН України* (2000), вып. 31, с. 362–365.

[8] *В.И.Мацаев, Л.И.Ронкин*, О квазианалитических функциях нескольких переменных. — *Зап. мех.-мат. ф-та ХГУ и Харьковск. мат. о-ва* (1961), вып. 4, с. 75–84.

[9] *О.А. Очаковская*, О функциях с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса на полупространстве. — *Докл. НАН Украины* (2001), т. 381, № 6, с. 111–113.

[10] *О.А. Очаковская*, О функциях с нулевыми интегралами по шарам. — *Тез. докл. междунар. конф. "Теория функций и математическая физика", посвященная 100-летию Н.И. Ахиезера*, Харьков (2001), с. 78–79.

[11] *Б.Г. Коренев*, Введение в теорию бесселевых функций. Наука, Москва (1971).

[12] *В.В. Волчков*, Проблемы типа Помпейю на многообразиях. — *Докл. НАН Украины* (1993), № 11, с. 9–12.

[13] *И. Стейн, Г. Вейс*, Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. Мир, Москва (1974).

[14] *Л. Хермандер*, Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т.1. Теория распределений и анализ Фурье. Мир, Москва (1986).

On function with zero integrals over balls of fixed radius

O.A. Ochakovskaya

We study various classes of function that have zero integrals over all balls of given radius. The problem of the existence of nonzero function of prescribed growth with this property is solved.