Математическая физика, анализ, геометрия
2002, т. 9, № 4, с. 572–594

Классификация точек двумерных и трехмерных комплексных поверхностей по грассманову образу

А.А. Борисенко, О.В. Лейбина

Механико-математический факультет
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина

E-mail:Alexander.A.Borisenko@univer.kharkov.ua
leybina@univer.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 27 ноября 2001 г.

Получена классификация точек двумерных и трехмерных комплексных поверхностей по голоморфной кривизне комплексного многообразия Грассмана вдоль площадок, касательных к грассманову образу комплексной поверхности.

Отримано класифікацію точок двовимірних та тривимірних комплексних поверхонь по голоморфній кривині комплексного многовиду Грасмана по площинкам, які дотичні до грасманова образу комплексної поверхні.

Введение

В работе [1] получена аффинная классификация точек регулярных многомерных поверхностей, вложенных в евклидово пространство $\mathbf{E}^n$ с произвольной коразмерностью. Эта классификация основана на аффинной эквивалентности соприкасающихся параболоидов к поверхности.

Для многомерных поверхностей $F^l \subset \mathbf{E}^n$ грассманов образ $\Gamma(F^l)$ поверхности в многообразии Грассмана $G(l,n)$ играет существенную роль в изучении их строения.

Ю.А. Аминов в работе [2] ввел классификацию точек двумерных поверхностей $F^2 \subset \mathbf{E}^4$ по секционной кривизне k_σ многообразия Грассмана $G(2,4)$ по площадке, касательной к $\Gamma(F^2)$. При этом выделялись три невырожденных класса точек, для которых $k_\sigma < 1$, $k_\sigma = 1$, $k_\sigma > 1$.

А.А. Борисенко показал, что они соответствуют аффинным классам точек поверхностей $F^2 \subset \mathbf{E}^4$ [1].

Mathematics Subject Classification 2000: 53B25.

Аффинным классам точек трехмерных поверхностей $F^3 \subset \mathbf{E}^5$ можно сопоставить некоторые инварианты секционных кривизн многообразия Грассмана $G(3,5)$ вдоль площадок, касательных к $\Gamma(F^3)$. В качестве таких инвариантов взяты три главные кривизны ограничения тензора Риччи многообразия Грассмана $G(3,5)$ на касательное пространство к грассманову образу $\Gamma(F^3)$ в исследуемой точке (А.А. Борисенко, Ю.А. Николаевский [3]), но полученная классификация слабее (аффинных классов — 12, грассмановых — 8).

В работе [4] получена аффинная классификация точек многомерных неособых комплексных поверхностей, вложенных в комплексное пространство $\mathbf{C}^n$ с произвольной коразмерностью. Выделены все случаи, когда существует лишь конечное число аффинных классов точек.

Целью данной работы является выяснение связи между аффинной классификацией точек двумерных и трехмерных неособых комплексных поверхностей и голоморфной кривизной комплексного многообразия Грассмана вдоль площадок, касательных к грассманову образу комплексной поверхности.

1. Постановка задачи и формулировка результатов

Пусть $F^l \subset \mathbf{C}^n$ — неособая комплексная поверхность, вложенная в n-мерное комплексное пространство. Локально она задается радиус-вектором $\mathbf{w} = \mathbf{w}(w^1, w^2, \dots, w^n)$, где $w^k = w^k(z^1, z^2, \dots, z^l)$ — голоморфные функции многих комплексных переменных $z^j = x^j + iy^j$ $(k = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, l)$ и $rg\,(\frac{\partial w^\alpha}{\partial z^j}) = l$.

Комплексной точечной коразмерностью комплексной поверхности $F^l \subset \mathbf{C}^n$ в данной точке называется размерность пространства вторых квадратичных форм поверхности F^l в этой точке.

Две точки неособой комплексной поверхности, вложенной в пространство C^n, называются аффинно-эквивалентными, если соприкасающиеся параболоиды в этих точках можно отобразить друг на друга невырожденным аффинным преобразованием в объемлющем пространстве.

Пусть p — комплексная точечная коразмерность неособой комплексной поверхности $F^l \subset \mathbf{C}^n$ в точке q. Тогда в точке q можно выбрать базис нормалей так, чтобы вторые квадратичные формы рассматриваемой комплексной поверхности относительно первых p нормалей были ненулевыми, а вторые квадратичные формы относительно оставшихся $n-l-p$ нормалей тождественно равны нулю. Таким образом, с точки зрения аффинной классификации комплексную поверхность F^l можно рассматривать как F^l в $\mathbf{C}^{l+p} \subset \mathbf{C}^n$, т.к. соприкасающийся параболоид полностью описывается вторыми квадратичными формами комплексной поверхности F^l в точке q.

В пространстве $\mathbf{C}^{l+p}$ выберем систему координат так, чтобы точка $q \in F^l$ совпала с началом координат O, а касательное пространство T_qF^l — с подпространством $z^1, z^2, \dots, z^l$. Комплексную поверхность F^l в окрестности точки O можно задать явно, в виде

$$z^{l+\alpha} = f^\alpha(z^1, \dots, z^l), \qquad \alpha = 1, \dots, p,$$

где f^α — голоморфные функции и $f^\alpha(0) = \frac{\partial f^\alpha}{\partial z^i}\Big|_0 = 0$, $i = 1, \dots, l$. Элементы матриц вторых квадратичных форм A^α комплексной поверхности F^l в точке q примут вид $a^\alpha_{ij} = \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial z^i \partial z^j}\Big|_0$, $\alpha = 1, \dots, p$.

Уравнение соприкасающегося параболоида к комплексной поверхности F^l в точке q будет следующим:

$$z^{l+\alpha} = A^\alpha(z, z), \qquad \alpha = 1, \dots, p,$$

где $A^\alpha(z,z) = \frac{1}{2} a^\alpha_{ij} z^i z^j$.

Определим вектор вторых квадратичных форм комплексной поверхности F^l в точке q следующим образом: $H = (A^1, A^2, \dots, A^p)$. Пусть $\tilde H = (\tilde A^1, \tilde A^2, \dots, \tilde A^p)$ — вектор вторых квадратичных форм в точке $\tilde q$. После параллельного переноса на вектор $\tilde q q$ и поворота в $\mathbf{C}^{l+p}$ так, чтобы касательные пространства $T_q F^l$ и $T_{\tilde q} F^l$ совпали, уравнение соприкасающегося параболоида в точке $\tilde q$ будет иметь вид

$$z^{l+\alpha} = \tilde A^\alpha(z, z), \qquad \alpha = 1, \dots, p.$$

Согласно [4] точки q и $\tilde q$ аффинно-эквивалентны, если

$$\tilde A^\nu = U^* (v^\nu_\mu A^\mu) U, \qquad \nu = 1, \dots, p, \tag{1}$$

где $U \in GL(l, \mathbf{C})$ и $V \in GL(p, \mathbf{C})$ — аффинные преобразования в касательном $T_o F^l$ и в нормальном $N_o F^l$ пространствах в точке O комплексной поверхности F^l, v^ν_μ — элементы матрицы V, U^* — матрица, транспонированная и комплексно сопряженная к U.

Таким образом, аффинными классами точек комплексной поверхности являются классы эквивалентности пространства $\mathbf{H} = \{H\}$ всевозможных векторов вторых квадратичных форм (т.е. p-мерных векторов симметрических комплексных $l \times l$ матриц) по действию группы $GL(l, \mathbf{C}) \times GL(p, \mathbf{C})$, определенному формулой (1).

Комплексным многообразием Грассмана $\mathbf{C}G(l, l+p)$ называется множество l-мерных комплексных плоскостей $(l+p)$-мерного комплексного пространства $\mathbf{C}^{l+p}$, проходящих через начало координат $O \in \mathbf{C}^{l+p}$.

Построим в каждой точке комплексной поверхности $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$ касательное пространство и перенесем все эти пространства параллельно в начало координат. Полученное подмножество в $\mathbf{C}G(l, l+p)$ называется грассмановым образом $\Gamma(F^l)$ комплексной поверхности F^l.

Для комплексной поверхности F^l определяется внешний нуль-индекс $\mu(q)$ в точке q, который равен размерности максимального нулевого подпространства в касательном пространстве T_qF^l для второй квадратичной формы поверхности F^l в точке q. Если на всей поверхности $\mu = 0$, то $\Gamma(F^l)$ будет регулярным l-мерным подмногообразием в $\mathbf{C}G(l, l+p)$ и $rg\Gamma$ будет максимальным.

Касательное пространство к F^l в точке $z_0 = (z_0^1, \ldots, z_0^l)$ задается в виде

$$z^{l+\alpha} - f^\alpha(z_0) = \frac{\partial f^\alpha}{\partial z^i}\bigg|_{z_0}(z^i - z), \qquad \alpha = 1, \ldots, p.$$

Если перенести его в точку O, получим

$$z^{l+\alpha} = \frac{\partial f^\alpha}{\partial z^i}\bigg|_{z_0} z^i, \qquad \alpha = 1, \ldots, p.$$

Поэтому грассмановым образом точки $z_0 \in F^l$ будет точка $\Gamma(z_0)$ с локальными координатами

$$\left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial z^1} & \frac{\partial f^1}{\partial z^2} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial z^l} \\ \frac{\partial f^2}{\partial z^1} & \frac{\partial f^2}{\partial z^2} & \cdots & \frac{\partial f^2}{\partial z^l} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f^p}{\partial z^1} & \frac{\partial f^p}{\partial z^2} & \cdots & \frac{\partial f^p}{\partial z^l} \end{pmatrix}\right|_{z_0}$$

в $\mathbf{C}G(l, l+p)$. В частности, $\Gamma(O) = 0$ в соответствии с выбором системы координат в $\mathbf{C}^{l+p}$.

Следовательно, касательным пространством к $\Gamma(F^l)$ в точке $\Gamma(z_0)$ является l-мерное линейное пространство, натянутое на векторы:

$$X_j = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f^1}{\partial z^1 \partial z^j} & \frac{\partial^2 f^1}{\partial z^2 \partial z^j} & \cdots & \frac{\partial^2 f^1}{\partial z^l \partial z^j} \\ \frac{\partial^2 f^2}{\partial z^1 \partial z^j} & \frac{\partial^2 f^2}{\partial z^2 \partial z^j} & \cdots & \frac{\partial^2 f^2}{\partial z^l \partial z^j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 f^p}{\partial z^1 \partial z^j} & \frac{\partial^2 f^p}{\partial z^2 \partial z^j} & \cdots & \frac{\partial^2 f^p}{\partial z^l \partial z^j} \end{pmatrix}\right|_{z_0} \in T_{\Gamma(z_0)}\mathbf{C}G(l, l+p).$$

Тогда в точке O

$$X_j = \begin{pmatrix} a^1_{1j} & a^1_{2j} & \ldots & a^1_{lj} \\ a^2_{1j} & a^2_{2j} & \ldots & a^2_{lj} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^p_{1j} & a^p_{2j} & \ldots & a^p_{lj} \end{pmatrix}, \qquad j = 1, \ldots, l. \tag{2}$$

Почти комплексная структура на комплексной поверхности $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$ индуцирует почти комплексную структуру J на $\Gamma(F^l) \subset \mathbf{C}G(l, l+p)$.

Голоморфной кривизной $K_{hol}(X)$ комплексного многообразия называется секционная кривизна вдоль площадок (X, JX), инвариантных относительно почти комплексной структуры J.

Согласно [5] голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(l, l+p)$ изменяется в пределах

$$K_{hol} \in [2/r, 2], \quad \text{где} \quad r = min(l, p). \tag{3}$$

Далее имеет место

Теорема 1. *Пусть $F^2 \subset \mathbf{C}^n$ — неособая двумерная комплексная поверхность с комплексной точечной коразмерностью p в точке $q \in F^2$. Тогда голоморфная кривизна K_{hol} комплексного многообразия Грассмана в точке $\Gamma(q)$ вдоль грассманова образа комплексной поверхности F^2 удовлетворяет следующим условиям:*

1) при $p = 1$ для единственного невырожденного аффинного класса $z^3 = (z^1)^2 + (z^2)^2$ голоморфная кривизна $K_{hol} = 2$ по всем направлениям;

2) при $p = 2$:

a) для аффинного класса $z^3 = (z^1)^2$, $z^4 = (z^2)^2$ существуют только два направления, вдоль которых $K_{hol} = 2$,

b) для аффинного класса $z^3 = (z^1)^2$, $z^4 = 2z^1z^2$ существует только одно направление, вдоль которого $K_{hol} = 2$;

3) при $p = 3$ для единственного аффинного класса $z^3 = (z^1)^2$, $z^4 = (z^2)^2$, $z^5 = 2z^1z^2$ не существует направлений, вдоль которых $K_{hol} = 2$.

Верно и обратное утверждение. Голоморфная кривизна K_{hol} комплексного многообразия Грассмана вдоль грассманова образа однозначно определяет комплексную точечную коразмерность p двумерной комплексной поверхности $F^2 \subset \mathbf{C}^n$, а именно:

1) если $K_{hol} \equiv 2$, то $p = 1$;

2) если есть направления, вдоль которых $K_{hol} = 2$, но не тождественно, то $p = 2$;

3) если не существует направлений, вдоль которых $K_{hol} = 2$, то $p = 3$.

Для комплексных поверхностей $F^2 \subset \mathbf{C}^4$ с комплексной точечной коразмерностью $p = 2$ аффинный класс точки и количество направлений, касательных к грассманову образу, вдоль которых $K_{hol} = 2$, определяются элементарными делителями пучка вторых квадратичных форм в рассматриваемой точке (табл. 1).

Таблица 1

№ п/п	Элементарные делители пучка вторых квадратичных форм	Канонический вид пучка вторых квадратичных форм	Количество направлений, вдоль которых $K_{hol} = 2$
1	$\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_2, \lambda_1 \neq \lambda_2,$	$(z^1)^2, (z^2)^2$	2
2	$(\lambda - \lambda_1)^2$	$(z^1)^2, 2z^1z^2$	1

Направление z в касательном пространстве T_qF^l называется асимптотическим направлением комплексной поверхности $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$, если $A^\alpha(z, z) = 0$, $\alpha = 1, \dots, p$, где A^α — матрицы вторых квадратичных форм комплексной поверхности в точке q.

Для трехмерных комплексных поверхностей $F^3 \subset \mathbf{C}^5$ с комплексной точечной коразмерностью $p = 2$ справедлива

Теорема 2. *Пусть $F^3 \subset \mathbf{C}^5$ — неособая комплексная поверхность, точка $q \in F^3$ и внешний нуль-индекс комплексной поверхности F^3 в точке q равен нулю. Тогда в зависимости от элементарных делителей пучка вторых квадратичных форм комплексной поверхности F^3 в точке q голоморфная кривизна K_{hol} комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(3, 5)$ в точке $\Gamma(q)$ вдоль грассманова образа комплексной поверхности F^3 удовлетворяет условиям, приведенным в табл. 2.*

Случаи 5 и 7 отличаются тем, что двумерные плоскости направлений, вдоль которых $K_{hol} = 2$, касаются различных вполне геодезических подмногообразий: в случае 5 — комплексного проективного пространства $\mathbf{C}P^3$, в случае 7 — комплексного проективного пространства $\mathbf{C}P^2$.

Случаи 2 и 6 имеют одно и то же количество асимптотических направлений, но различной кратности. В случае 2 оба асимптотических направления комплексной поверхности F^3 имеют кратность два, а в случае 6 одно — кратность три, другое — кратность один.

Если для точки комплексной поверхности $F^3 \subset \mathbf{C}^5$ известно количество направлений в касательном пространстве к грассманову образу $\Gamma(F^3)$, вдоль которых голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(3, 5)$ принимает максимально возможное значение ($K_{hol} = 2$), а в случаях 5 и 7 различаются касательные площадки, то однозначно определяется вид элементарных делителей пучка вторых квадратичных форм в данной точке и, следовательно, аффинный класс точки и количество асимптотических направлений.

Таблица 2

№ п/п	Элементарные делители пучка вторых квадратичных форм	Канонический вид пучка вторых квадратичных форм	Количество асимптотических направлений	Количество направлений, вдоль которых $K_{hol} = 2$
1	$\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_2,$ $\lambda - \lambda_3, \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$	$(z^2)^2 + (z^3)^2,$ $(z^1)^2 + (z^3)^2$	4	3
2	$\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_1,$ $\lambda - \lambda_3, \lambda_1 \neq \lambda_3$	$(z^3)^2,$ $(z^1)^2 + (z^2)^2$	2	1 направление и плоскость
3	$\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_1,$ $\lambda - \lambda_1$	$0,$ $(z^1)^2 + (z^2)^2 + (z^3)^2$	Комплексный конус	По всем направлениям
4	$(\lambda - \lambda_1)^2, \lambda - \lambda_3,$ $\lambda_1 \neq \lambda_3$	$(z^2)^2 + (z^3)^2,$ $2z^1z^2 + (z^3)^2$	3	2
5	$(\lambda - \lambda_1)^2, \lambda - \lambda_1$	$(z^2)^2,$ $2z^1z^2 + (z^3)^2$	1	Плоскость
6	$(\lambda - \lambda_1)^3$	$2z^2z^3,$ $(z^2)^2 + 2z^1z^3$	2	1
7	Пучок вырожден	$2z^2z^3,$ $2z^1z^3$	1 направление и плоскость	Плоскость

2. Голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана

Согласно [5] голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(l, l+p)$ в точке 0 в направлении вектора X имеет вид

$$K_{hol}(X) = \frac{2Tr(XX^*XX^*)}{(TrXX^*)^2}\,, \tag{4}$$

где X^* означает матрицу, транспонированную и комплексно сопряженную к X.

Выясним, каким условиям должен удовлетворять вектор X, касательный к $\mathbf{C}G(l, l+p)$, в направлении которого голоморфная кривизна принимает максимальное значение ($K_{hol}(X) = 2$).

Лемма. *Голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(l, l+p)$ в точке 0 в направлении вектора*

$$X = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & ... & b_{pl} \end{pmatrix}, \ b_{ik} \in \mathbf{C}, \ i = 1, \dots, p, \ k = 1, \dots, l,$$

имеет вид

$$K_{hol}(X) = 2 - \frac{4 \sum\limits_{i<j} \sum\limits_{k<m} |b_{ik}b_{jm} - b_{im}b_{jk}|^2}{(\sum\limits_{i=1}^{p} \sum\limits_{k=1}^{l} |b_{ik}|^2)^2}. \tag{5}$$

Доказательство. Преобразуем формулу (4)

$$K_{hol}(X) = 2\left\{1 - \frac{(TrXX^*)^2 - Tr(XX^*XX^*)}{(TrXX^*)^2}\right\}. \tag{6}$$

Произведем необходимые вычисления.

Пусть $b_i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{il})$, $i = 1, \dots, p$, — строки вектора X.

Тогда

$$XX^* = \begin{pmatrix} <b_1, b_1> & <b_1, b_2> & ... & <b_1, b_p> \\ <b_2, b_1> & <b_2, b_2> & ... & <b_2, b_p> \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ <b_p, b_1> & <b_p, b_2> & ... & <b_p, b_p> \end{pmatrix},$$

где $<,>$ означает эрмитово скалярное произведение в $\mathbf{C}^l$. Значит,

$$(TrXX^*)^2 = (\sum_{i=1}^{p} <b_i, b_i>)^2 = \sum_{i=1}^{p} (<b_i, b_i>)^2 + 2\sum_{i<j} <b_i, b_i><b_j, b_j>,$$

$$\begin{aligned} Tr(XX^*XX^*) &= \sum_{i,j=1}^{p} <b_i, b_j><b_j, b_i> \\ &= \sum_{i=1}^{p} (<b_i, b_i>)^2 + 2\sum_{i<j} <b_i, b_j><b_j, b_i>. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}(TrXX^*)^2 - Tr(XX^*XX^*) &= 2\sum_{i<j}(< b_i, b_i >< b_j, b_j > -| < b_i, b_j > |^2 \\ &= 2\sum_{i<j}(\sum_{k=1}^{l}|b_{ik}|^2\sum_{k=1}^{l}|b_{jk}|^2 - |\sum_{k=1}^{l} b_{ik}\bar{b}_{jk}|^2) \\ &= 2\sum_{i<j}\sum_{k<m}|b_{ik}b_{jm} - b_{im}b_{jk}|^2.\end{aligned}$$

Подставляем в (6) и получаем (5).

Из леммы очевидным образом получаем

Следствие. *Голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана* $\mathbf{C}G(l, l+p)$ *в точке 0 в направлении вектора* $X = (b_{ik})_{i=1}^{p}{}_{k=1}^{l}$ *максимальна* ($K_{hol}(X) = 2$) *тогда и только тогда, когда все миноры второго порядка матрицы* X *равны нулю:*

$$\Delta_{ij}^{km} := b_{ik}b_{jm} - b_{im}b_{jk} = 0 \qquad (i < j,\ k < m). \tag{7}$$

Доказательство теоремы 1

Пусть $F^2 \subset \mathbf{C}^n$ — неособая комплексная поверхность с комплексной точечной коразмерностью p в точке $q \in F^2$. Тогда с точки зрения аффинной классификации точек комплексную поверхность F^2 можно рассматривать как F^2 в $\mathbf{C}^{2+p} \subset \mathbf{C}^n$.

1) При $p = 1$ согласно (3) голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(2,3)$ тождественно равна двум, что и доказывает первое утверждение.

2) При $p = 2$ для двумерных комплексных поверхностей $F^2 \subset \mathbf{C}^4$ согласно [4] в зависимости от элементарных делителей пучка вторых квадратичных форм существуют два класса аффинно-эквивалентных точек.

Пусть

$$z^3 = A^1(z,z),\ z^4 = A^2(z,z)$$

— канонический вид соприкасающегося параболоида в точке q к некоторой комплексной поверхности $F^2 \subset \mathbf{C}^4$. Согласно (1) вектор вторых квадратичных форм в произвольной точке $\tilde{q}$, аффинно-эквивалентной точке q, будет иметь вид

$$\begin{aligned}\tilde{A}^1 &= U^*(v_1A^1 + v_2A^2)U, \\ \tilde{A}^2 &= U^*(v_3A^1 + v_4A^2)U,\end{aligned} \tag{8}$$

где
$$U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbf{C}), \;\; V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbf{C})$$
— аффинные преобразования в касательном и нормальном пространствах комплексной поверхности F^2.

Если элементарные делители пучка вторых квадратичных форм в точке q комплексной поверхности имеют вид $\lambda-\lambda_1$, $\lambda-\lambda_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\;\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbf{C}$, то она является представителем первого аффинного класса. Канонический вид соприкасающегося параболоида будет следующим:
$$(z^3) = (z^1)^2, \;\; (z^4) = (z^2)^2.$$
Пучок вторых квадратичных форм аффинными преобразованиями в касательном и нормальном пространствах комплексной поверхности F^2 приводится к виду
$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \;\; A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

По матрицам A^1 и A^2 согласно (2) построим векторы X^1 и X^2, касательные к грассманову образу комплексной поверхности. Произвольный вектор, касательный к грассманову образу комплексной поверхности, будет иметь вид
$$X = \alpha X^1 + \beta X^2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \;\; \alpha,\beta \in \mathbf{C}.$$
Согласно (7) голоморфная кривизна многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(2,4)$ в точке 0 в направлении вектора X максимальна ($K_{hol}(X) = 2$) тогда и только тогда, когда $detX = \alpha\beta = 0$, т.е. либо при $\alpha = 0$, либо при $\beta = 0$. Следовательно, существуют только два направления $\alpha\tilde{X}^1$, $\beta\tilde{X}^2$, касательные к грассманову образу, вдоль которых голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(2,4)$ максимальна.

Покажем, что это справедливо для всех представителей рассматриваемого класса аффинно-эквивалентных точек.

Согласно (8) вторые квадратичные формы в произвольной точке $\tilde{q}$, аффинно-эквивалентной точке q, будут иметь следующий вид:
$$\tilde{A}^1 = U^* \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} |u_1|^2 v_1 + |u_3|^2 v_2 & \bar{u}_1 u_2 v_1 + \bar{u}_3 u_4 v_2 \\ u_1 \bar{u}_2 v_1 + u_3 \bar{u}_4 v_2 & |u_2|^2 v_1 + |u_4|^2 v_2 \end{pmatrix},$$
$$\tilde{A}^2 = U^* \begin{pmatrix} v_3 & 0 \\ 0 & v_4 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} |u_1|^2 v_3 + |u_3|^2 v_4 & \bar{u}_1 u_2 v_3 + \bar{u}_3 u_4 v_4 \\ u_1 \bar{u}_2 v_3 + u_3 \bar{u}_4 v_4 & |u_2|^2 v_3 + |u_4|^2 v_4 \end{pmatrix}.$$

По матрицам $\tilde{A}^1$ и $\tilde{A}^2$ согласно (2) построим векторы, касательные к грассманову образу комплексной поверхности:

$$\tilde{X}^1 = \begin{pmatrix} |u_1|^2 v_1 + |u_3|^2 v_2 & u_1 \bar{u}_2 v_1 + u_3 \bar{u}_4 v_2 \\ |u_1|^2 v_3 + |u_3|^2 v_4 & u_1 \bar{u}_2 v_3 + u_3 \bar{u}_4 v_4 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{X}^2 = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 u_2 v_1 + \bar{u}_3 u_4 v_2 & |u_2|^2 v_1 + |u_4|^2 v_2 \\ \bar{u}_1 u_2 v_3 + \bar{u}_3 u_4 v_4 & |u_2|^2 v_3 + |u_4|^2 v_4 \end{pmatrix}.$$

Произвольный вектор, касательный к грассманову образу комплексной поверхности, примет вид $\tilde{X} = \alpha \tilde{X}^1 + \beta \tilde{X}^2$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$.

Введем обозначение

$$\mu_1 = \alpha u_1 + \beta u_2,$$

$$\mu_2 = \alpha u_3 + \beta u_4.$$

Тогда

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} \mu_1 \bar{u}_1 v_1 + \mu_2 \bar{u}_3 v_2 & \mu_1 \bar{u}_2 v_1 + \mu_2 \bar{u}_4 v_2 \\ \mu_1 \bar{u}_1 v_3 + \mu_2 \bar{u}_3 v_4 & \mu_1 \bar{u}_2 v_3 + \mu_2 \bar{u}_4 v_4 \end{pmatrix}.$$

Согласно (7) голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(2,4)$ в точке 0 в направлении вектора $\tilde{X}$ максимальна ($K_{hol}(\tilde{X}) = 2$) тогда и только тогда, когда $det\tilde{X} = 0$.

В рассматриваемом случае

$$det\tilde{X} = \mu_1 \mu_2 det V det \bar{U} = 0.$$

Так как $U, V \in GL(2, \mathbf{C})$, то $detU \neq 0$ и $detV \neq 0$.

Следовательно,

$$\text{либо } \mu_1 = \alpha u_1 + \beta u_2 = 0, \qquad (I)$$

$$\text{либо } \mu_2 = \alpha u_3 + \beta u_4 = 0, \qquad (II)$$

т.к. $|\mu_1|^2 + |\mu_2|^2 \neq 0$, если вектор $\tilde{X}$ ненулевой.

Получаем, что для произвольного представителя данного аффинного класса точек существуют только два направления $\tilde{X} = \alpha \tilde{X}^1 + \beta \tilde{X}^2$, касательные к грассманову образу комплексной поверхности, где α и β удовлетворяют соотношениям (I) или (II), вдоль которых голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(2,4)$ максимальна.

Если пучок вторых квадратичных форм комплексной поверхности $F^2 \subset \mathbf{C}^4$ в точке q имеет один элементарный делитель $(\lambda - \lambda_1)^2, \lambda_1 \in \mathbf{C}$, то она является представителем второго аффинного класса.

Канонический вид соприкасающегося параболоида будет следующим:

$$(z^3) = (z^1)^2, \;\; (z^4) = 2z^1 z^2.$$

Пучок вторых квадратичных форм аффинными преобразованиями в касательном и нормальном пространствах комплексной поверхности F^2 приводится к виду

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \ A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

По матрицам A^1 и A^2 согласно (2) построим векторы X^1, X^2, касательные к грассманову образу комплексной поверхности. Произвольный вектор, касательный к грассманову образу комплексной поверхности, будет иметь вид

$$X = \alpha X^1 + \beta X^2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \ \ \alpha, \beta \in \mathbf{C}.$$

Согласно (7) голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(2,4)$ в точке 0 в направлении вектора X максимальна ($K_{hol}(X) = 2$) тогда и только тогда, когда $detX = \alpha^2 = 0$, т.е. при $\alpha = 0$.

Следовательно, существует только одно направление βX^2, касательное к грассманову образу, вдоль которого голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(2,4)$ максимальна.

Покажем, что это справедливо для всех представителей рассматриваемого класса аффинно-эквивалентных точек.

Согласно (8) найдем вторые квадратичные формы в произвольной точке $\tilde{q}$, аффинно-эквивалентной точке q:

$$\tilde{A}^1 = U^* \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & 0 \end{pmatrix} U$$

$$= \begin{pmatrix} |u_1|^2 v_1 + (u_1\bar{u}_3 + u_3\bar{u}_1)v_2 & u_2\bar{u}_1 v_1 + (u_2\bar{u}_3 + u_4\bar{u}_1)v_2 \\ u_1\bar{u}_2 v_1 + (u_1\bar{u}_4 + u_3\bar{u}_2)v_2 & |u_2|^2 v_1 + (u_2\bar{u}_4 + \bar{u}_2 u_4)v_2 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\tilde{A}^2$ получается из $\tilde{A}^1$ заменой v^1, v^2 на v^3, v^4 соответственно.

По матрицам $\tilde{A}^1$ и $\tilde{A}^2$ согласно (8) построим векторы X^1, X^2, касательные к грассманову образу комплексной поверхности. Произвольный вектор, касательный к грассманову образу комплексной поверхности, будет иметь вид $\tilde{X} = \alpha\tilde{X}^1 + \beta\tilde{X}^2$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$.

Получаем

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} \mu_1(\bar{u}_1 v_1 + \bar{u}_3 v_2) + \mu_2\bar{u}_1 v_2 & \mu_1(\bar{u}_2 v_1 + \bar{u}_4 v_2) + \mu_2\bar{u}_2 v_2 \\ \mu_1(\bar{u}_1 v_3 + \bar{u}_3 v_4) + \mu_2\bar{u}_1 v_4 & \mu_1(\bar{u}_2 v_3 + \bar{u}_4 v_4) + \mu_2\bar{u}_1 v_4 \end{pmatrix}.$$

В рассматриваемом случае

$$det\tilde{X} = \mu_1^2 detV det\bar{U} = 0.$$

Так как $U, V \in GL(2, \mathbf{C})$, то $detU \neq 0$ и $detV \neq 0$.

Следовательно,

$$\mu_1 = \alpha u_1 + \beta u_2 = 0. \qquad (III)$$

Получаем, что для произвольного представителя второго аффинного класса точек существует только одно направление $\tilde{X} = \alpha \tilde{X}^1 + \beta \tilde{X}^2$, касательное к грассманову образу комплексной поверхности, где α и β удовлетворяют соотношению (III), вдоль которого голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(2,4)$ максимальна.

3) При $p = 3$ (комплексная точечная коразмерность максимальна) для комплексных поверхностей $F^2 \subset \mathbf{C}^5$ существует единственный класс аффинно-эквивалентных точек (канонический вид соприкасающегося параболоида $z^3 = (z^1)^2$, $z^4 = (z^2)^2$, $z^5 = 2z^1 z^2$). Матрицы вторых квадратичных форм в точке q приводятся к виду

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

По матрицам A^1, A^2 и A^3 согласно (2) построим векторы X^1, X^2, касательные к грассманову образу комплексной поверхности. Произвольный вектор, касательный к грассманову образу комплексной поверхности, будет иметь вид

$$X = \alpha X^1 + \beta X^2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \ \ \alpha, \beta \in \mathbf{C}.$$

Согласно (7) голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(2,5)$ в точке 0 в направлении вектора X максимальна ($K_{hol}(X) = 2$) тогда и только тогда, когда все миноры второго порядка матрицы X равны нулю:

$$\begin{cases} \Delta_{12}^{12} = \alpha\beta = 0, \\ \Delta_{13}^{12} = \alpha^2 = 0, \\ \Delta_{23}^{12} = -\beta^2 = 0. \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \beta = 0.$$

Следовательно, не существует направлений, вдоль которых $K_{hol} = 2$.

Покажем, что это справедливо для всех представителей рассматриваемого класса аффинно-эквивалентных точек.

Согласно (1) вектор вторых квадратичных форм в произвольной точке $\tilde{q}$, аффинно-эквивалентной точке q, будет иметь вид

$$\begin{aligned} \tilde{A}^1 &= U^*(v_1 A^1 + v_2 A^2 + v_3 A^3)U, \\ \tilde{A}^2 &= U^*(v_4 A^1 + v_5 A^2 + v_6 A^3)U, \\ \tilde{A}^3 &= U^*(v_7 A^1 + v_8 A^2 + v_9 A^3)U, \end{aligned} \qquad (9)$$

где

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbf{C}), \quad V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_4 & v_5 & v_6 \\ v_7 & v_8 & v_9 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbf{C})$$

— аффинные преобразования в касательном и нормальном пространствах комплексной поверхности. Имеем

$$\tilde{A}^1 = U^* \begin{pmatrix} v_1 & v_3 \\ v_3 & v_2 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} |u_1|^2 v_1 + (u_1\bar{u}_3 + u_3\bar{u}_1)v_3 + |u_3|^2 v_2 & * \\ u_1\bar{u}_2 v_1 + (u_1\bar{u}_4 + u_3\bar{u}_2)v_3 + u_3\bar{u}_4 v_2 & * \end{pmatrix},$$

где второй столбец матрицы $\tilde{A}^1$ получается из первого заменой u_1, u_3 на u_2, u_4, соответственно, т.е. заменой элементов из первого столбца матрицы U соответственно на элементы второго столбца. Матрицы $\tilde{A}^2$ и $\tilde{A}^3$ получены из $\tilde{A}^1$ путем замены v_1, v_2, v_3 на v_4, v_5, v_6 и v_7, v_8, v_9, соответственно, т.е. заменой элементов из первой строки матрицы V соответственно на элементы второй и третьей строк. По матрицам $\tilde{A}^1$,$\tilde{A}^2$ и $\tilde{A}^3$ согласно (2) построим векторы $\tilde{X}^1$, $\tilde{X}^2$, касательные к грассманову образу комплексной поверхности.

Произвольный вектор, касательный к грассманову образу комплексной поверхности, будет иметь вид $\tilde{X} = \alpha\tilde{X}^1 + \beta\tilde{X}^2$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$.

Получаем

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} \mu_1(\bar{u}_1 v_1 + \bar{u}_3 v_3) + \mu_2(\bar{u}_1 v_3 + \bar{u}_3 v_2) & * \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

где:

(i) второй элемент первой строки матрицы $\tilde{X}$ получается из первого заменой элементов из первой строки матрицы U^* соответственно на элементы второй;

(ii) вторая и третья строки матрицы $\tilde{X}$ получаются из первой заменой элементов из первой строки матрицы V соответственно на элементы второй и третьей строк.

Согласно (7) голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(2,5)$ в точке 0 в направлении вектора $\tilde{X}$ максимальна ($K_{hol}(\tilde{X}) = 2$) тогда и только тогда, когда все миноры второго порядка матрицы $\tilde{X}$ равны нулю:

$$\begin{cases} \Delta_{12}^{12} = det\bar{U}[\mu_1^2(v_1v_6 - v_3v_4) + \mu_2^2(v_3v_5 - v_2v_6) + \mu_1\mu_2(v_1v_5 - v_2v_4)] = 0, \\ \Delta_{13}^{12} = det\bar{U}[\mu_1^2(v_1v_9 - v_3v_7) + \mu_2^2(v_3v_8 - v_2v_9) + \mu_1\mu_2(v_1v_8 - v_2v_7)] = 0, \\ \Delta_{23}^{12} = det\bar{U}[\mu_1^2(v_4v_9 - v_6v_7) + \mu_2^2(v_6v_8 - v_5v_9) + \mu_1\mu_2(v_4v_8 - v_5v_7)] = 0. \end{cases}$$

Так как $U \in GL(2, \mathbf{C})$, то $detU \neq 0$.

Имеем однородную систему уравнений с неизвестными μ_1^2, μ_2^2, $\mu_1\mu_2$. Детерминант системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} -D_{32} & -D_{31} & D_{33} \\ D_{22} & -D_{21} & D_{23} \\ -D_{12} & -D_{11} & D_{13} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ D_{12} & D_{22} & D_{32} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{vmatrix} = (detV)^2 \neq 0,$$

где D_{ij} — алгебраические дополнения элементов матрицы $V \in GL(3, \mathbf{C})$. Следовательно, система имеет только тривиальное решение

$$\begin{cases} \mu_1^2 = 0 \\ \mu_2^2 = 0 \\ \mu_1\mu_2 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \mu_1 = \mu_2 = 0.$$

Тогда любой вектор $\tilde{X}$, касательный к грассманову образу комплексной поверхности $F^2 \subset \mathbf{C}^5$, в направлении которого голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(2,5)$ максимальна ($K_{hol} = 2$), будет нулевым.

Таким образом, не существует направлений, вдоль которых $K_{hol} = 2$.

Доказательство теоремы 2

Пусть $F^3 \subset \mathbf{C}^n$ — неособая комплексная поверхность с комплексной точечной коразмерностью $p = 2$ в точке $q \in F^3$ и внешний нуль-индекс $\mu(q) = 0$. Тогда с точки зрения аффинной классификации точек комплексную поверхность F^3 можно рассматривать как F^3 в $\mathbf{C}^5 \subset \mathbf{C}^n$.

Для трехмерных комплексных поверхностей $F^3 \subset \mathbf{C}^5$ согласно [4] в зависимости от элементарных делителей пучка вторых квадратичных форм существуют семь классов аффинно-эквивалентных точек.

Пусть

$$z^4 = A^1(z,z),\ z^5 = A^2(z,z)$$

— канонический вид соприкасающегося параболоида в точке q к некоторой поверхности $F^3 \subset \mathbf{C}^5$.

Согласно (1) вектор вторых квадратичных форм в произвольной точке $\tilde{q}$, аффинно-эквивалентной точке q, будет иметь вид

$$\tilde{A}^1 = U^*(v_1 A^1 + v_2 A^2)U, \tag{10}$$

$$\tilde{A}^2 = U^*(v_3 A^1 + v_4 A^2)U,$$

где

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_4 & u_5 & u_6 \\ u_7 & u_8 & u_9 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbf{C}), \quad V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbf{C})$$

— аффинные преобразования в касательном и нормальном пространствах комплексной поверхности F^3.

В случае 1 элементарные делители пучка вторых квадратичных форм комплексной поверхности в точке q имеют вид $\lambda-\lambda_1$, $\lambda-\lambda_2$, $\lambda-\lambda_3$, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{C}$.

Канонический вид соприкасающегося параболоида будет следующим:

$$(z^2)^2 + (z^3)^2, (z^1)^2 + (z^3)^2.$$

Пучок вторых квадратичных форм аффинными преобразованиями в касательном и нормальном пространствах комплексной поверхности F^3 приводится к виду

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

По матрицам A^1 и A^2 согласно (2) построим векторы X^1, X^2 и X^3, касательные к грассманову образу комплексной поверхности.

Произвольный вектор, касательный к грассманову образу комплексной поверхности, будет иметь вид

$$X = \alpha X^1 + \beta X^2 + \gamma X^3 = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ \alpha & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}.$$

Согласно (7) голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(3,5)$ в точке 0 в направлении вектора X максимальна ($K_{hol}(X) = 2$) тогда и только тогда, когда все миноры второго порядка матрицы X равны нулю:

$$\begin{cases} \Delta^{12}_{12} = -\alpha\beta = 0, \\ \Delta^{13}_{12} = -\alpha\gamma = 0, \\ \Delta^{23}_{12} = \beta\gamma = 0. \end{cases}$$

Значит,

$$\left[\begin{array}{l} \beta = \gamma = 0, \ \alpha \neq 0, \\ \alpha = \gamma = 0, \ \beta \neq 0, \\ \alpha = \beta = 0, \ \gamma \neq 0, \end{array} \right.$$

т.к. $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 \neq 0$, если вектор X ненулевой.

Таким образом, существуют только три направления αX^1, βX^2, γX^3, касательные к грассманову образу, вдоль которых голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(3,5)$ максимальна.

Покажем, что это справедливо для всех представителей рассматриваемого класса аффинно-эквивалентных точек.

Согласно (10) найдем вторые квадратичные формы в произвольной точке $\tilde{q}$, аффинно-эквивалентной точке q.

$$\tilde{A}^1 = U^* \begin{pmatrix} v_2 & 0 & 0 \\ 0 & v_1 & 0 \\ 0 & 0 & v_1+v_2 \end{pmatrix} U$$

$$= \begin{pmatrix} |u_1|^2 v_2 + |u_4|^2 v_1 + |u_7|^2(v_1+v_2) & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix},$$

где:

1) второй и третий элементы первого столбца матрицы $\tilde{A}^1$ получаются из первого заменой $\bar{u}_1, \bar{u}_4, \bar{u}_7$ на $\bar{u}_2, \bar{u}_5, \bar{u}_8$ и $\bar{u}_3, \bar{u}_6, \bar{u}_9$, соответственно, т.е. заменой элементов из первой строки матрицы U^* соответственно на элементы второй и третьей строк;

2) второй и третий столбцы матрицы $\tilde{A}^1$ получаются из первого заменой u_1, u_4, u_7 на u_2, u_5, u_8 и u_3, u_6, u_9, соответственно, т.е. заменой элементов из первого столбца матрицы U соответственно на элементы второго и третьего столбцов.

Матрица $\tilde{A}^2$ получается из $\tilde{A}^1$ заменой v_1, v_2 на v_3, v_4, соответственно, т.е. заменой элементов из первой строки матрицы V соответственно на элементы второй строки.

По матрицам $\tilde{A}^1$ и $\tilde{A}^2$ согласно (2) построим векторы $\tilde{X}^1$, $\tilde{X}^2$ и $\tilde{X}^3$, касательные к грассманову образу комплексной поверхности.

Произвольный вектор, касательный к грассманову образу комплексной поверхности, будет иметь вид $\tilde{X} = \alpha\tilde{X}^1 + \beta\tilde{X}^2 + \gamma\tilde{X}^3$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}$.

Введем обозначение

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3, \\ \mu_2 &= \alpha u_4 + \beta u_5 + \gamma u_6, \\ \mu_3 &= \alpha u_5 + \beta u_6 + \gamma u_7. \end{aligned}$$

Тогда

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 v_2 \mu_1 + \bar{u}_4 v_1 \mu_2 + \bar{u}_7 (v_1+v_2)\mu_3 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix},$$

где:

I) второй и третий элементы первой строки матрицы $\tilde{X}$ получаются из первого заменой $\bar{u}_1, \bar{u}_4, \bar{u}_7$ на $\bar{u}_2, \bar{u}_5, \bar{u}_8$ и $\bar{u}_3, \bar{u}_6, \bar{u}_9$, соответственно, т.е. заменой элементов из первой строки матрицы U^* соответственно на элементы второй и третьей строк;

II) вторая строка матрицы $\tilde{X}$ получается из первой заменой v_1, v_2 на v_3, v_4, соответственно, т.е. заменой элементов из первой строки матрицы V соответственно на элементы второй строки.

Таким образом, для того чтобы найти произвольный вектор $\tilde{X}$, касательный к грассманову образу $\Gamma(F^3)$ комплексной поверхности $F^3 \subset \mathbf{C^5}$ в точке $\Gamma(\tilde{q})$, достаточно найти элемент $\tilde{a}^1_{11}$ второй квадратичной формы $\tilde{A}^1$, а затем, заменив u_1, u_4, u_7 на μ_1, μ_2, μ_3, соответственно, получить из него элемент $\tilde{b}_{11}$ вектора $\tilde{X}$ и далее следовать замене, описанной в пп. I) и II).

Согласно (7) голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(3,5)$ в точке 0 в направлении вектора $\tilde{X}$ максимальна ($K_{hol}(\tilde{X}) = 2$) тогда и только тогда, когда все миноры второго порядка матрицы $\tilde{X}$ равны нулю.

В рассматриваемом случае получаем однородную систему уравнений с неизвестными $\mu_1\mu_2, \mu_1\mu_3, \mu_2\mu_3$:

$$\begin{cases} \Delta^{12}_{12} = detV[\mu_1\mu_2(\bar{u}_2\bar{u}_4 - \bar{u}_1\bar{u}_5) + \mu_1\mu_3(\bar{u}_2\bar{u}_7 - \bar{u}_1\bar{u}_8) + \mu_2\mu_3(\bar{u}_4\bar{u}_8 - \bar{u}_7\bar{u}_5)] = 0, \\ \Delta^{13}_{12} = detV[\mu_1\mu_2(\bar{u}_3\bar{u}_4 - \bar{u}_1\bar{u}_6) + \mu_1\mu_3(\bar{u}_3\bar{u}_7 - \bar{u}_1\bar{u}_9) + \mu_2\mu_3(\bar{u}_4\bar{u}_9 - \bar{u}_6\bar{u}_7)] = 0, \\ \Delta^{23}_{12} = detV[\mu_1\mu_2(\bar{u}_3\bar{u}_5 - \bar{u}_2\bar{u}_6) + \mu_1\mu_3(\bar{u}_3\bar{u}_8 - \bar{u}_2\bar{u}_9) + \mu_2\mu_3(\bar{u}_5\bar{u}_9 - \bar{u}_6\bar{u}_8)] = 0. \end{cases}$$

Так как $V \in GL(2, \mathbf{C})$, то $detV \neq 0$.

Детерминант системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} -D_{33} & D_{23} & D_{13} \\ D_{32} & -D_{22} & -D_{12} \\ -D_{31} & D_{21} & D_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ D_{12} & D_{22} & D_{32} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{vmatrix} = (detU)^2 \neq 0,$$

где D_{ij} — алгебраические дополнения элементов матрицы $U \in GL(3, \mathbf{C})$. Следовательно, система имеет только тривиальное решение

$$\begin{cases} \mu_1\mu_2 = 0, \\ \mu_1\mu_3 = 0, \\ \mu_2\mu_3 = 0. \end{cases}$$

Значит,

$$\left[\begin{array}{l} \mu_2 = \mu_3 = 0, \ \mu_1 \neq 0, \\ \mu_1 = \mu_3 = 0, \ \mu_2 \neq 0, \\ \mu_1 = \mu_2 = 0, \ \mu_3 \neq 0, \end{array} \right. \tag{11}$$

т.к. $|\mu_1|^2 + |\mu_2|^2 + |\mu_3|^2 \neq 0$, если вектор $\tilde{X}$ ненулевой.

Получаем, что для произвольного представителя рассматриваемого аффинного класса точек существуют только три направления $\tilde{X} = \alpha\tilde{X}^1 + \beta\tilde{X}^2 + \gamma\tilde{X}^3$, касательные к грассманову образу комплексной поверхности, где α, β и γ удовлетворяют соотношениям (11), вдоль которых голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(3,5)$ максимальна.

Случаи 2, 4 и 6 доказываются анологично. В случае 3 элементарные делители пучка вторых квадратичных форм комплексной поверхности имеют вид $\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_1$, $\lambda_1 \in \mathbf{C}$.

Канонический вид соприкасающегося параболоида будет следующим:

$$0, (z^1)^2 + (z^2)^2 + (z^3)^2.$$

Следовательно, в данном случае комплексную поверхность можно рассматривать как $F^3 \subset \mathbf{C}^4 \subset \mathbf{C}^5$.

Тогда согласно (3) голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(3,4)$ тождественно равна двум, т.е. максимальна по всем направлениям.

В случае 5 элементарные делители пучка вторых квадратичных форм комплексной поверхности в точке q имеют вид $(\lambda - \lambda_1)^2$, $\lambda - \lambda_1$, $\lambda_1 \in \mathbf{C}$.

Канонический вид соприкасающегося параболоида будет следующим:

$$(z^2)^2, 2z^1 z^2 + (z^3)^2.$$

Пучок вторых квадратичных форм аффинными преобразованиями в касательном и нормальном пространствах комплексной поверхности F^3 приводится к виду

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

По матрицам A^1 и A^2 согласно (2) построим векторы X^1, X^2 и X^3, касательные к грассманову образу комплексной поверхности.

Произвольный вектор, касательный к грассманову образу комплексной поверхности, будет иметь вид

$$X = \alpha X^1 + \beta X^2 + \gamma X^3 = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \gamma \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}.$$

Согласно (7) голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(3,5)$ в точке 0 в направлении вектора X максимальна ($K_{hol}(X) = 2$) тогда и только тогда, когда все миноры второго порядка матрицы X равны нулю:

$$\begin{cases} \Delta_{12}^{12} = -\beta^2 = 0, \\ \Delta_{12}^{13} \equiv 0, \\ \Delta_{12}^{23} = \beta\gamma = 0. \end{cases}$$

Значит,

$$\beta = 0, \ |\alpha|^2 + |\gamma|^2 \neq 0,$$

т.к. $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 \neq 0$, если вектор X ненулевой.

Таким образом, существует целая плоскость $\alpha X^1 + \gamma X^3$ направлений в касательном пространстве к грассманову образу комплексной поверхности, вдоль которых голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(3,5)$ максимальна.

Покажем, что эта плоскость является касательной к вполне геодезическому комплексному проективному пространству $\mathbf{C}P^3 \subset \mathbf{C}G(3,5)$. Действительно, комплексное многообразие Грассмана является симметрическим пространством $\mathbf{C}G(3,5) = SU(5)/SU(3) \times SU(2)$, где $SU(n)$ — группа собственных унитарных матриц порядка n, и касательное пространство m к $\mathbf{C}G(3,5)$ представляется кососимметрическими комплексными матрицами вида

$$\begin{pmatrix} 0 & -T^* \\ T & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \end{pmatrix},$$

T^* — матрица, транспонированная и комплексно сопряженная к T. Подмногообразие симметрического пространства G/H является вполне геодезическим тогда и только тогда, когда касательное пространство m удовлетворяет следующему условию:

$$[[m,m],m] \subset m, \tag{12}$$

где $[,]$ — скобка Ли в алгебре Ли группы G [6]. Для комплексного многообразия Грассмана скобка Ли есть коммутатор кососимметрических комплексных матриц.

Рассматриваемая плоскость натянута на векторы X^1, X^3, которые расположены в трехмерной плоскости векторов:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Из непосредственного подсчета видно, что для подпространства

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{c}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{c}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{c}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

выполняется условие (12). Это подпространство является касательным пространством к комплексному проективному пространству $\mathbf{C}P^3$.

Аналогично случаю 1 можно показать, что для всех представителей рассматриваемого класса аффинно-эквивалентных точек существует целая плоскость направлений в касательном пространстве к грассманову образу комплексной поверхности, вдоль которых голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(3,5)$ максимальна.

В случае 7 пучок вторых квадратичных форм комплексной поверхности в точке q вырожден ($det(A^1 - \lambda A^2) \equiv 0$). Аффинными преобразованиями в касательном и нормальном пространствах комплексной поверхности F^3 он приводится к виду

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Канонический вид соприкасающегося параболоида будет следующим:

$$2z^2z^3, 2z^1z^3.$$

По матрицам A^1 и A^2 согласно (2) построим векторы X^1, X^2 и X^3, касательные к грассманову образу комплексной поверхности.

Произвольный вектор, касательный к грассманову образу комплексной поверхности, будет иметь вид

$$X = \alpha X^1 + \beta X^2 + \gamma X^3 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & \beta \\ \gamma & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}.$$

Согласно (7) голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(3,5)$ в точке 0 в направлении вектора X максимальна ($K_{hol}(X) = 2$) тогда и только тогда, когда все миноры второго порядка матрицы X равны нулю:

$$\begin{cases} \Delta_{12}^{12} = -\gamma^2 = 0, \\ \Delta_{12}^{13} = -\beta\gamma = 0, \\ \Delta_{12}^{23} = \alpha\gamma = 0. \end{cases}$$

Значит,

$$\gamma = 0, \ |\alpha|^2 + |\beta|^2 \neq 0,$$

т.к. $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 \neq 0$, если вектор X ненулевой.

Таким образом, существует целая плоскость $\alpha X^1 + \beta X^2$ направлений в касательном пространстве к грассманову образу комплексной поверхности, вдоль которых голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(3,5)$ максимальна.

Рассматриваемая плоскость натянута на векторы X^1, X^2, которые расположены в двумерной плоскости векторов:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix}.$$

Рассуждая, как и в случае 5, получим, что эта плоскость касается вполне геодезического комплексного проективного пространства $\mathbf{C}P^2 \subset \mathbf{C}G(3,5)$.

Касательные пространства к комплексному проективному пространству $\mathbf{C}P^3$ в случае 5 и к комплексному проективному пространству $\mathbf{C}P^2$ в рассматриваемом случае пересекаются по одномерному направлению. Поэтому плоскости, вдоль которых $K_{hol} = 2$, в случаях 5 и 7 различны.

Аналогично случаю 1 можно показать, что для всех представителей рассматриваемого класса аффинно-эквивалентных точек существует целая плоскость направлений в касательном пространстве к грассманову образу комплексной поверхности, вдоль которых голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(3,5)$ максимальна.

Непосредственным подсчетом можно найти указанное в формулировке теоремы количество асимптотических направлений комплексной поверхности в каждом из рассматриваемых случаев.

Таким образом, теоремы 1 и 2 полностью доказаны.

Список литературы

[1] *А.А. Борисенко*, Аффинная классификация точек многомерных поверхностей. — *Сиб. мат. журн.* (1990), т. 31, № 3, с. 19–29.

[2] *Ю.А. Аминов*, О грассмановом образе двумерной поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве. — *Укр. геом. сб.* (1980), № 23, с. 3–16.

[3] *А.А. Борисенко, Ю.А. Николаевский*, Классификация точек трехмерных поверхностей по грассманову образу. — *Укр. геом. сб.* (1989), № 32, с. 11–27.

[4] *О.В. Лейбина*, Афинная классификация точек многомерных комплексних поверхностей. — *Вісн. ХНУ. Сер. "Математика, прикладна математика і механіка"* (2001), в. 50, № 514, с. 129–141.

[5] *Y.C. Wong*, Sectional curvatures of Grassmann manifolds. — *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* (1968), v. 60, No. 1, p. 75–79.

[6] *Ш. Кобаяси, К. Номидзу*, Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. Наука, Москва (1981).

[7] *А.А. Борисенко, Ю.А. Николаевский*, Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий. — *Успехи мат. наук* (1991), т. 46, вып. 2(278), с. 41-83.

Classification of the points of two-dimensional and three-dimensional complex submanifolds according to the Grassmann image

A.A. Borisenko and O.V. Leybina

Classification of the points of two-dimensional and three-dimensional complex submanifolds according to holomorphic curvature of complex Grassmann manifold with respect to the 2-plane tangent to the Grassmann image of complex submanifold is obtained.