Математическая физика, анализ, геометрия
2002, т. 9, № 4, с. 595–603

О полиномиальной аппроксимации целых трансцендентных функций

С.Б. Вакарчук, С.И. Жир

Таможенная академия Украины
ул. Рогалева, 8, Днепропетровск, 49030, Украина
E-mail:academy@amsu.dnp.ukrpack.net

Статья поступила в редакцию 28 ноября 2001 г.
Представлена И.В. Островским

С целью расширения шкалы роста максимума модуля целых трансцендентных функций, имеющих нулевой порядок $\rho = 0$, М.Н. Шеремета ввел понятие обобщенного α-порядка ρ_α и установил для него соотношение типа Адамара. На основе этого в данной статье получены предельные равенства, связывающие указанную характеристику целой функции с последовательностью ее наилучших полиномиальных приближений в некоторых банаховых пространствах аналитических в единичном круге функций.

З метою розширення шкали зростання максимуму модуля цілих трансцендентних функцій, які мають нульовий порядок $\rho = 0$, М.Н. Шеремета ввів поняття узагальненого α-порядку ρ_α і встановив для нього співвідношення типу Адамара. На основі цього в даній статті одержано граничні рівності, які зв'язують вказану характеристику цілої функції з послідовністю її найкращих поліноміальних наближень в деяких банахових просторах аналітичних в одиничному колі функцій.

1. Пусть Γ_R $(R > 1)$ — эллипс с фокусами в точках $(1, 0)$ и $(-1, 0)$, с суммой полуосей R, и D_R — ограниченная им область. С.Н. Бернштейн показал [1, с. 41, 93], что если функция $f(z)$ регулярна в D_R, то для последовательности $\{E_n(f)\}$ ее наилучших приближений алгебраическими полиномами степени $\leq n$ в равномерной метрике на отрезке $[-1, 1]$ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{E_n(f)} \leq 1/R$. Это означает, что для целой функции $f(z)$ справедливо соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{E_n(f)} = 0$. В связи с этим определенный интерес представляет вопрос о скорости стремления к нулю элементов последовательности $\{E_n(f)\}$ для целой трансцендентной функции f. В работах А.В. Батырева, Р.С. Варга, Р.С. Редди было показано, что эта скорость зависит от характеристик роста

Mathematics Subject Classification 2000: 30D41.

целой функции — ее порядка ρ и типа σ. Например, согласно Р.С. Варга, выполнение равенства $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\{n\ln n/(-\ln E_n(f))\} = \rho$ является необходимым и достаточным для того, чтобы f была сужением на $[-1,1]$ целой трансцендентной функции порядка ρ, где $\rho \in [0,\infty)$. Предельные равенства аналогичного содержания, связывающие характеристики роста целых трансцендентных функций с последовательностями их наилучших полиномиальных приближений в некоторых банаховых пространствах функций в комплексной плоскости, были получены в статьях И.И. Ибрагимова и Н.И. Шихалиева, Ф. Жиро, С.Б. Вакарчука. (Ссылки на работы перечисленных выше авторов можно найти, например, в библиографии к статьям [2, 3]).

М.Н. Шеремета обобщил классические характеристики роста целых функций в работах [4, 5]. Использование введенных в [4] характеристик позволило получить в указанном направлении теории приближения ряд содержательных результатов (см., напр., [6, 7]). Данное сообщение является в определенном смысле распространением некоторых идей из [2] и [6, 7] на случай целых трансцендентных функций нулевого порядка [5].

2. Следуя [5], через Λ обозначим класс функций $\alpha(x) \ge 0$, которые определены и дифференцируемы на сегменте $[a,\infty]$, где $a > 0$, строго монотонно возрастают, стремясь к ∞ при $x \to \infty$, и являются функциями медленного роста, т.е. для всех $\beta \in (0,\infty)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(\beta x)/\alpha(x) = 1$.

Известно, что одними из основных характеристик целой функции $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ являются порядок и тип роста ее максимума модуля $M(f,r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, а теорема Адамара устанавливает связь между этими величинами и коэффициентами Тейлора $c_n = c_n(f)$ $(n \in Z_+)$ функции $f(z)$. Для случая, когда порядок роста равен нулю, М.Н. Шеремета ввел для характеристики $M(f,r)$ и $|c_n|$ следующие величины:

$$\begin{aligned} \rho_\alpha &= \overline{\lim_{r\to\infty}}\, \alpha(\ln\ln M(f,r))/\,\alpha(\ln\ln r), \\ \rho'_\alpha &= \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \alpha(\ln n)/\,\alpha\left[\ln(-n^{-1}\ln|c_n|)\right], \end{aligned} \tag{1}$$

где $\alpha(x) \in \Lambda$. Исключив тривиальный случай $f(z) = const$, имеем $\rho_\alpha \ge 1$. Величину ρ_α будем называть α-порядком целой функции.

Теорема 1 [5]. *Пусть* $F(x,c) = \alpha^{-1}(c\alpha(x))$, $\alpha(x) \in \Lambda$ *и для всех* $c \in (0,\infty)$, *начиная с некоторого* $x = x_1(c)$, *выполняется соотношение*

$$0 \le \frac{dF(x,c)}{dx} \le K_1\left[\exp(F(x,c))\right]^{K_2},$$

где $\alpha^{-1}(\cdot)$ *есть функция, обратная к* $\alpha(\cdot)$, *а* K_1 *и* K_2 *— постоянные величины* $(0 < K_1, K_2 < \infty)$. *Тогда имеет место равенство*

$$\rho_\alpha = \max(\rho'_\alpha, 1). \tag{2}$$

3. Под H_q $(q > 0)$ понимаем пространство Харди аналитических в единичном круге $|z| < 1$ функций $f(z)$, которые удовлетворяют условию $||f||_{H_q} = \lim\limits_{r \to 1-0} M_q(f,r) < \infty$, где

$$M_q(f,r) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(r \exp(it))|^q dt \right\}^{1/q}.$$

Символом $H_q^{'}$ $(q > 0)$ обозначим пространство Бергмана аналитических в круге $|z| < 1$ функций, для которых

$$||f||_{H_q^{'}} = \left\{ \frac{1}{\pi} \int \int\limits_{|z|<1} |f(z)|^q dxdy \right\}^{1/q} < \infty.$$

Очевидно, что при $q \geq 1$ H_q и $H_q^{'}$ являются банаховыми пространствами и $||f||_{H_\infty^{'}} = ||f||_{H_\infty} = \sup\{|f(z)| : |z| < 1\}$.

Говорят [8], что аналитическая в круге $|z| < 1$ функция $f(z)$ принадлежит пространству $\mathcal{B}(p,q,\lambda)$, где $0 < p < q \leq \infty;$ $0 < \lambda \leq \infty$, если

$$||f||_{p,q,\lambda} = \left\{ \int\limits_0^1 (1-r)^{\lambda(1/p-1/q)-1} M_q^{\lambda}(f,r) dr \right\}^{1/\lambda} < \infty,$$

$$||f||_{p,q,\infty} = \sup_{0<r<1} (1-r)^{1/p-1/q} M_q(f,r) < \infty.$$

При $p > 0$ и $q, \lambda \geq 1$ пространство $\mathcal{B}(p,q,\lambda)$ является банаховым, а в остальных случаях — пространством Фреше. Рассматривая всюду далее только банаховы пространства, отметим, что [2]

$$H_q \subset H_q^{'} = \mathcal{B}(q/2,q,q) \ (1 \leq q < \infty), \tag{3}$$

где равенство понимается в смысле эквивалентности норм.

Подразумевая под X одно из перечисленных банаховых пространств, обозначим через $E_n(f,X)$ величину наилучшего приближения функции $f(z) \in X$ алгебраическими многочленами комплексного переменного степени $\leq n$.

В следующей теореме установлена связь между рассматриваемой здесь характеристикой роста максимума модуля целой функции и скоростью стремления к нулю последовательности ее наилучших полиномиальных приближений в метрике пространства X.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и $f(z) \in X$. Тогда равенство*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \alpha(\ln n) / \alpha\left[\ln\left(-n^{-1}\ln E_n(f,X)\right)\right] = \delta_\alpha, \tag{4}$$

где δ_α — некоторое конечное неотрицательное число, является необходимым и достаточным для того, чтобы $f(z)$ была целой функцией α-порядка

$$\eta_\alpha = \max(1, \delta_\alpha). \tag{5}$$

4. Доказательство теоремы 2 проведем только для случая $X = \mathcal{B}(p,q,\lambda)$, поскольку в более простой ситуации, когда $X = H_q$, основные его элементы в общих чертах повторяют рассуждения [2]. Если же $X = H_q^{'}$ $(1 \le q < \infty)$, то утверждение теоремы следует из правой части соотношения (3), а при $q = \infty$ — из того факта, что $H_\infty^{'} = H_\infty$.

Для удобства разобъем доказательство на две части. Вначале рассмотрим ситуацию, когда $q = 2$, т.е. все рассуждения проведем для пространств $X = \mathcal{B}(p,2,\lambda)$, где $0 < p < 2$; $\lambda \ge 1$. Это объясняется тем, что в указанном случае частная сумма n-го порядка ряда Тейлора произвольной функции $f(z) \in \mathcal{B}(p,2,\lambda)$ является одновременно и ее полиномом наилучшего приближения n-ой степени. Затем рассмотрим пространства $X = \mathcal{B}(p,q,\lambda)$, где $q \ne 2$, $0 < p < q$; q, $\lambda \ge 1$. При $0 < p < q < 2$ доказательство сведется к уже рассмотренному случаю $q = 2$, а при $0 < p \le 2 < q$ и $2 \le p < q$ будет использован ряд других соображений. Все последующие рассуждения проведем для $1 \le \lambda < \infty$, поскольку случай $\lambda = \infty$ ничем принципиальным не отличается.

Напомним [8], что при $p \ge p_1$; $q \le q_1$; $\lambda \le \lambda_1$ имеет место включение $\mathcal{B}(p,q,\lambda) \subset \mathcal{B}(p_1,q_1,\lambda_1)$ и для произвольной функции $f(z) \in \mathcal{B}(p,q,\lambda)$ [2]:

$$E_n(f;\mathcal{B}(p_1,q_1,\lambda_1)) \le 2^{1/q-1/q_1}(\lambda(1/p-1/q))^{1/\lambda-1/\lambda_1} E_n(f;\mathcal{B}(p,q,\lambda)). \tag{6}$$

4.1. На первом этапе докажем достаточность условия (4). Воспользовавшись определением класса Λ, содержащего функцию $\alpha(x)$, из (4) имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{E_n(f;\mathcal{B}(p,2,\lambda))} = 0$. В [2] было показано, что это соотношение является необходимым и достаточным для того, чтобы $f(z) \in \mathcal{B}(p,2,\lambda)$ была целой функцией. Пользуясь теоремой 1, докажем равенство $\rho_\alpha^{'} = \delta_\alpha$, где $\rho_\alpha^{'}$ определяется формулой (1).

Запишем очевидное равенство

$$r^{n+1}c_{n+1} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(f(re^{it}) - \sum_{j=0}^{n} c_j r^j e^{ijt}\right)e^{-i(n+1)t}dt \quad (0 < r < 1)$$

и, применив неравенство Гельдера, отсюда получим

$$r^{n+1}|c_{n+1}| \le \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(re^{it}) - \sum_{j=0}^{n} c_j r^j e^{ijt}|^2 dt \right\}^{1/2} \quad (0 < r < 1).$$

Возведем это неравенство в степень λ, умножим на $(1-r)^{\lambda(1/p-1/2)-1}$, проинтегрируем по r в пределах от 0 до 1 и извлечем корень степени λ. В результате имеем

$$|c_{n+1}| B_{n,p,2,\lambda} \le \|f(z) - \sum_{j=0}^{n} c_j z^j\|_{p,2,\lambda} = E_n(f; \mathcal{B}(p,2,\lambda)), \tag{7}$$

где $B_{n,p,q,\lambda} = B^{1/\lambda}\left((n+1)\lambda + 1; \lambda(1/p - 1/q)\right)$, а $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ $(a, b > 0)$ — эйлеров интеграл первого рода.

Используя (7), запишем соотношение

$$\alpha(n) \,/\, \alpha \left[\ln\left(-n^{-1} \ln E_n(f; \mathcal{B}(p,2,\lambda))\right)\right]$$

$$\ge\ \alpha(n) \,/\, \alpha \left[\ln\left(-(1+n^{-1})\left((n+1)^{-1} \ln|c_{n+1}| + (n+1)^{-1} \ln B_{n,p,2,\lambda}\right)\right)\right]. \tag{8}$$

Воспользовавшись формулой $B(a,b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$ и учитывая, что при $n \to \infty$ $\quad \Gamma(n+t_1)/\Gamma(n+t_2) \sim n^{t_1 - t_2}$, получим

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{B_{n,p,q,\lambda}} = 1. \tag{9}$$

Переходя к верхнему пределу при $n \to \infty$ в обеих частях неравенства (8), в силу (1), (4) и (9) имеем $\rho_\alpha^{'} \le \delta_\alpha$.

Получим противоположное неравенство $\rho_\alpha^{'} \ge \delta_\alpha$. Из (1) следует, что для произвольного числа $\epsilon > 0$ существует $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathsf{N}$ такое, что для всех $n > n_0 \quad (n \in \mathsf{N})$ выполнено неравенство $\alpha(\ln n)/(\rho_\alpha^{'} + \epsilon) < \alpha(\ln(-n^{-1}\ln|c_n|))$. Учитывая монотонность функции $\alpha(x) \in \Lambda$, отсюда имеем

$$|c_n| < \exp\left\{-n \exp\left[\alpha^{-1}\left(\frac{\alpha(\ln n)}{\rho_\alpha^{'} + \epsilon}\right)\right]\right\}. \tag{10}$$

Полагая

$$\varphi_j(\alpha) \exp\left\{(1+n)\exp\left[\alpha^{-1}\left(\frac{\alpha(\ln(1+n))}{\rho_\alpha^{'} + \epsilon}\right)\right] - j \exp\left[\alpha^{-1}\left(\frac{\alpha(\ln j)}{\rho_\alpha^{'} + \epsilon}\right)\right]\right\},$$

для произвольного натурального числа $n > n_0$, в силу (10), запишем

$$E_n(f; \mathcal{B}(p,2,\lambda)) = \left\| f(z) - \sum_{j=0}^{n} c_j z^j \right\|_{p,2,\lambda}$$

$$\leq \left\{ \int_0^1 (1-r)^{\lambda(1/p-1/2)-1} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} r^j |c_j| \right)^{\lambda} dr \right\}^{1/\lambda}$$

$$\leq \left\{ \int_0^1 r^{\lambda(n+1)} (1-r)^{\lambda(1/p-1/2)-1} dr \right\}^{1/\lambda} \sum_{j=n+1}^{\infty} |c_j| = B_{n,p,2,\lambda} \sum_{j=n+1}^{\infty} |c_j|$$

$$\leq B_{n,p,2,\lambda} \exp\left\{ -(n+1) \exp\left[\alpha^{-1} \left(\frac{\alpha(\ln(1+n))}{\rho_{\alpha}^{'} + \epsilon} \right) \right] \right\} \sum_{j=n+1}^{\infty} \varphi_j(\alpha). \qquad (11)$$

Введем дополнительное обозначение $\Phi(\alpha) = \exp\{-\exp[\alpha^{-1}\big(\alpha(\ln 2)/(\rho_{\alpha}^{'} + \epsilon)\big)]\}$. Учитывая, что $E_{n+1}(f,X) \leq E_n(f,X) \quad (n \in \mathsf{N})$ и при $j \geq n+1$ имеет место неравенство $\varphi_j(\alpha) \leq \Phi^{j-n-1}(\alpha)$, из (11) получим

$$E_{n+1}(f; \mathcal{B}(p,2,\lambda))$$
$$\leq B_{n,p,2,\lambda}(1-\Phi(\alpha))^{-1} \exp\left\{ -(n+1) \exp\left[\alpha^{-1} \left(\frac{\alpha(\ln(1+n))}{\rho_{\alpha}^{'} + \epsilon} \right) \right] \right\}. \qquad (12)$$

Выразив из (12) $\rho_{\alpha}^{'} + \epsilon$, имеем

$$\rho_{\alpha}^{'} + \epsilon$$
$$\geq \alpha(\ln(1+n)) \,/\, \alpha \left(\ln \left(\frac{1}{n+1} \ln \frac{B_{n,p,2,\lambda}}{1-\Phi(\alpha)} + \frac{1}{n+1} \ln \frac{1}{E_{n+1}(f; \mathcal{B}(p,2,\lambda))} \right) \right). \qquad (13)$$

Перейдем в обеих частях неравенства (13) к верхнему пределу при $n \to \infty$. Поскольку, в силу (9), первым слагаемым под знаком внешнего логарифма в знаменателе формулы (13) можно пренебречь, то на основании (4), где $X = \mathcal{B}(p,2,\lambda)$, и произвольного выбора числа $\epsilon > 0$ имеем неравенство $\rho_{\alpha}^{'} \geq \delta_{\alpha}$. С учетом полученного ранее соотношения $\rho_{\alpha}^{'} \leq \delta_{\alpha}$ получаем равенство $\rho_{\alpha}^{'} = \delta_{\alpha}$, т.е. $\rho_{\alpha} = \eta_{\alpha}$.

Кратко наметим ход доказательства необходимости условия (4). Полагаем, что $f(z)$ является целой трансцендентной функцией, имеющей конечный α-порядок $\rho_{\alpha} = \max(1, \rho_{\alpha}^{'})$, где величина $\rho_{\alpha}^{'}$ определяется формулой (1). Выполнение равенства $\rho_{\alpha}^{'} = \delta_{\alpha}$, а значит, и соотношения $\rho_{\alpha} = \eta_{\alpha}$, показываем по вышеизложенной схеме.

4.2. Рассмотрим далее случай $X = \mathcal{B}(p,q,\lambda) \quad (q \neq 2)$ и докажем необходимость условия (4). Для этого полагаем, что $f(z)$ является целой трансцендентной функцией конечного α-порядка ρ_{α}, который, в силу теоремы 1, определяется формулой (2). Как и ранее, достаточно убедиться в справедливости равенства $\rho_{\alpha}^{'} = \delta_{\alpha}$. Используя (10) и проведя вычисления, аналогичные

(11), (12), для любого натурального числа $n > n_0 = n_0(\epsilon)$ запишем оценку сверху величины наилучшего полиномиального приближения

$$E_{n+1}(f;\mathcal{B}(p,q,\lambda))$$

$$\leq B_{n,p,q,\lambda}(1-\Phi(\alpha))^{-1}\exp\left\{-(n+1)\exp\left[\alpha^{-1}\left(\frac{\alpha(\ln(1+n))}{\rho_\alpha^{'}+\epsilon}\right)\right]\right\}. \tag{14}$$

Выражая из (14) $\rho_\alpha^{'}+\epsilon$, имеем неравенство вида (13), в правой части которого вместо числа 2 расположено число q. Переходя затем в обеих его частях к верхнему пределу при $n \to \infty$ и учитывая (4), (9) и произвольный характер выбора $\epsilon > 0$, получим соотношение $\rho_\alpha^{'} \geq \delta_\alpha$.

Докажем справедливость противоположного неравенства $\rho_\alpha^{'} \leq \delta_\alpha$. Для этого вначале полагаем $0 < p < q < 2$; $\quad q, \lambda \geq 1$. Поскольку по предположению, сделанному выше, $f(z)$ есть целая трансцендентная функция, имеющая конечный α-порядок ρ_α, то, в силу теоремы 2, уже доказанной для пространств $X = \mathcal{B}(p,2,\lambda) \quad (0 < p < 2; \lambda \geq 1)$, и формулы (2), имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \alpha(\ln n)\,/\,\alpha\left(\ln\left(-n^{-1}\ln E_n(f;\mathcal{B}(p,2,\lambda))\right)\right) = \rho_\alpha^{'}. \tag{15}$$

Воспользовавшись неравенством (6), где $p_1 = p$, $q_1 = 2$, $\lambda_1 = \lambda$, из формул (4) и (15) получим

$$\delta_\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \alpha(\ln n)\,/\,\alpha\left(\ln\left(-n^{-1}\ln E_n(f;\mathcal{B}(p,q,\lambda))\right)\right) \geq \rho_\alpha^{'}.$$

Таким образом, и в рассматриваемом случае имеет место равенство $\delta_\alpha = \rho_\alpha^{'}$.

Пусть $0 < p \leq 2 < q$; $\lambda \geq 1$ и $\mathcal{P}_n$ есть подпространство алгебраических полиномов комплексного переменного степени $\leq n$. Учитывая, что при $0 < r < 1$ справедливо соотношение $M_2(f,r) \leq M_q(f,r)$, получим

$$\begin{aligned}
E_n(f;\mathcal{B}(p,q,\lambda)) &\geq \left\{\int_0^1 (1-r)^{\lambda(1/p-1/q)-1}\left(\inf_{p_n\in\mathcal{P}_n} M_2(f-p_n;r)\right)^{\lambda} dr\right\}^{1/\lambda} \\
&= \left\{\int_0^1 (1-r)^{\lambda(1/p-1/q)-1}\left(\sum_{j=n+1}^{\infty} r^{2j}|c_j|^2\right)^{\lambda/2} dr\right\}^{1/\lambda} \\
&\geq \left\{\int_0^1 r^{(n+1)\lambda}(1-r)^{\lambda(1/p-1/q)-1}dr\right\}^{1/\lambda}\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}|c_j|^2\right)^{1/2} \\
&\geq B_{n,p,q,\lambda}|c_{n+1}|.
\end{aligned} \tag{16}$$

Используя (16), нетрудно получить неравенство вида (8), в левой и правой частях которого вместо числа 2 расположено число q. Перейдя затем в обеих его частях к верхнему пределу при $n \to \infty$ и учитывая (1), (4) и (9), получим неравенство $\rho_\alpha^{'} \le \delta_\alpha$. Значит, формула $\delta_\alpha = \rho_\alpha^{'}$ справедлива и в данном случае.

Пусть $2 \le p < q$; $\lambda \ge 1$. Полагая в формуле (6) $q_1 = q$, $\lambda_1 = \lambda$ и $p_1 \in (0, 2)$, где p_1 — произвольное фиксированное число, на основании (16) получим

$$E_n(f; \mathcal{B}(p, q, \lambda)) \ge E_n(f; \mathcal{B}(p_1, q, \lambda)) \ge B_{n,p_1,q,\lambda}|c_{n+1}|. \tag{17}$$

Воспользовавшись (17) и действуя аналогично предыдущему случаю, убеждаемся, что имеет место равенство $\delta_\alpha = \rho_\alpha^{'}$.

Наметим кратко ход доказательства достаточности условия (4) в случае, когда $X = \mathcal{B}(p, q, \lambda) \quad (q \ne 2)$. В силу определения класса Λ, которому принадлежит функция $\alpha(x)$, из (4) получим $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{E_n(f; \mathcal{B}(p, q, \lambda))} = 0$. Это означает, что $f(z)$ есть целая функция [2]. Полагаем ее α-порядок равным числу ρ_α, которое вычисляется по формуле (1). При этом по теореме 1 для ρ_α справедливо соотношение (2). Конечность величины $\rho_\alpha^{'}$ следует из соображений, аналогичных имевшим место при получении неравенства $\rho_\alpha^{'} \le \delta_\alpha$ в случае $q = 2$. Справедливость равенства $\rho_\alpha^{'} = \delta_\alpha$, а значит, и $\rho_\alpha = \eta_\alpha$, показываем так же, как и при доказательстве необходимости условия (4) в случае $q \ne 2$. Теорема 2 доказана.

Список литературы

[1] *С.Н. Бернштейн*, О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени. Собр. соч. Т. 1. АН СССР, Москва (1952).

[2] *С.Б.Вакарчук*, О наилучшем полиномиальном приближении в некоторых банаховых пространствах аналитических в единичном круге функций. — *Мат. заметки* (1994), т. 55, № 4, с. 6–14.

[3] *С.Б. Вакарчук*, О наилучшем полиномиальном приближении целых трансцендентных функций в некоторых банаховых пространствах. I. — *Укр. мат. журн.* (1994), т. 47, № 9, с. 1123–1133.

[4] *М.Н. Шеремета*, О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения. — *Изв. вузов. Мат.* (1967), № 2, с. 100–108.

[5] *М.Н. Шеремета*, О связи между ростом целых или аналитических в круге функций нулевого порядка и коэффициентами их степенных разложений. — *Изв. вузов. Мат.* (1968), № 6, с. 115–121.

[6] *S.M. Shah*, Polynomial approximation of an entire function and generalized orders. — *J. Approxim. Theory* (1977), v. 19, № 4, c. 315–324.

[7] *S.B. Vakarchuk and S.I. Zheer*, Polynomial approximation of entire functions of generalized order in the unit disk. — In: Book of abstracts. Intern. Akhiezer Centenary Conf.... Inst. for Low Temp. Physics and Engin., Kharkov Nat. Univ., Kharkov (2001), p. 98–99.

[8] *М.И. Гварадзе*, Об одном классе пространств аналитических функций. — *Мат. заметки* (1977), т. 21, № 2, с. 141–150.

On polinomial approximation of entire transcendental functions

S.B. Vakarchuk and S.I. Zheer

M.N. Sheremeta introduced the notion of the α-order ρ_α so that to extend the scale of growth of maximum modulus of entire transcendental functions, having the order zero $\rho = 0$. He established the relation of Hadamard type too. In this article the limiting equalities, connecting the indicated characteristic of an entire function with the sequence of its best polynomial approximation in some Banach spaces of functions analytic in the unit disk have been obtained.