Математическая физика, анализ, геометрия
2002, т. 9, № 4, с. 622–641

Пространства Л. де Бранжа и функциональные модели недиссипативных операторов

В.А. Золотарев

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина
E-mail:Vladimir.A.Zolotarev@univer.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 24 мая 2001 г.

Для произвольного ограниченного недиссипативного оператора A, действующего в гильбертовом пространстве H, такого что $\operatorname{rank}\left(\dfrac{A-A^*}{i}\right) = 2$, построена функциональная модель, которая реализуется оператором умножения на независимую переменную в пространстве голоморфных функций Л. де Бранжа. В отличие от пространства целых функций Л. де Бранжа изучаются пространства голоморфных в $\mathbb{C}$ функций с предписанными особенностями на вещественной оси, что позволяет строить функциональные модели недиссипативных операторов с вещественным спектром, когда $\operatorname{rank}\left(\dfrac{A-A^*}{i}\right) = 2$.

Для довільного обмеженого недисипативного оператору A, що діє у гільбертовому просторі H, такого що $\operatorname{rank}\left(\dfrac{A-A^*}{i}\right) = 2$, побудовано функціональну модель, яка реалізується оператором множення на незалежну змінну в просторі голоморфних функцій Л. де Бранжа. На відміну від простору цілих функцій Л. де Бранжа вивчаються простори голоморфних в $\mathbb{C}$ функцій з предписаними особливостями на дійсній осі, що дозволяє побудувати функціональні моделі недисипативних операторів з дійсним спектром, коли $\operatorname{rank}\left(\dfrac{A-A^*}{i}\right) = 2$.

Построение функциональных моделей диссипативных операторов, основанное на теории дилатаций Б. Секефальви-Надя и Ч. Фояша [2, 4], приводит к гармоническому Фурье-анализу в гильбертовом пространстве L^2 и соответствующих пространствах Харди $H^2_\pm$. Построение аналогичных конструкций в недиссипативном случае вызывало определенные трудности. И дело не только в том, что дилатация в этом случае является J-унитарным

Mathematics Subject Classification 2000: 47A45.

оператором, но также и в том, что соответствующий “гармонический” анализ следует осуществлять в другом классе функций.

В данной работе, используя известную конструкцию гильбертовых пространств целых функций Л. де Бранжа [3], предложен иной способ построения функциональных моделей в недиссипативном случае.

I. Напомним [1, 2], что совокупность ограниченных операторов $A \in [H, H]$, $\varphi \in [H, E]$, $J \in [E, E]$ $(J^* = J = J^{-1})$ и гильбертовых пространств H и E

$$\Delta = (A, H, \varphi, E, J) \tag{1}$$

называется локальным узлом, если

$$A - A^* = i\varphi^* J\varphi. \tag{2}$$

Отметим, что для любого ограниченного оператора $A \in \in [H, H]$ всегда существуют E, φ и J, что имеет место (2), [1]. В дальнейшем будем полагать, что $\dim E = 2$, а инволюция J имеет вид

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Пусть $g_\alpha = \varphi^* e_\alpha$ $(\alpha = 1,\ 2)$, где $\{e_\alpha\}_1^2$ — ортонормированный базис в E. Совокупность

$$\Delta = \left(A, H, \{g_1, g_2\}, J = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\right) \tag{3}$$

назовем операторным комплексом [1], если

$$A - A^* = i \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \langle \cdot, g_\alpha \rangle J_{\alpha,\beta} g_\beta. \tag{4}$$

Очевидно, что соотношение (4) вытекает из (2). Комплекс Δ называется простым [1, 2], если

$$H = \operatorname{span}\{A^n g_\alpha : n \in \mathbb{Z}_+; \alpha = 1, 2\}. \tag{5}$$

Как известно [1, 2], в случае простоты Δ (3) оператор A с вещественным спектром унитарно-эквивалентен простой части треугольного модельного комплекса

$$\Delta_C = \left(A_C, L^2_{2,l}(F_x), \{e_1, e_2\}, J = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\right), \tag{6}$$

где $L^2_{2,l}(F_x)$ образуют вектор-функции $f(\xi) = [f_1(\xi); f_2(\xi)]$, $\xi \in [0, l]$, такие что

$$\int_0^l f(\xi) dF_\xi f^*(\xi) < \infty,$$

а неубывающая на $[0, l]$ матричнозначная (2×2) функция

$$F_x = \begin{bmatrix} \alpha_x & \beta_x \\ \bar{\beta}_x & \gamma_x \end{bmatrix}$$

такова, что $\operatorname{tr} F_x \equiv x$. Оператор A_C в $L^2_{2,l}(F_x)$ действует по формуле

$$(A_C f)(x) = \alpha_x f(x) + i \int\limits_x^l f(t) dF_t J, \tag{7}$$

где α_x — вещественная неубывающая ограниченная функция на $[0, l]$. И наконец, $e_1 = [1; 0]$, $e_2 = [0; 1]$.

Вначале будем изучать тот случай, когда спектр A сосредоточен в нуле, $\sigma(A) = \{0\}$, тогда A_C (7) будет иметь вид

$$(A_C f)(x) = i \int\limits_x^l f(t) dF_t J. \tag{8}$$

II. Рассмотрим $M_x(z)$ — матрицу-функцию, являющуюся решением интегрального уравнения

$$M_x(z) + iz \int\limits_0^x M_t(z) dF_t J = I, \tag{9}$$

где $x \in [0, l]$, $z \in \mathbb{C}$, которое в случае $dF_t = a_t dt$ эквивалентно задаче Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx} M_x(z) + iz M_x(z) a_x J = 0, \\ M_0(z) = I. \end{cases} \tag{10}$$

Очевидно, что $M_x(z)$ представлена в виде мультипликативного интеграла

$$M_x(z) = \int\limits_0^{\overrightarrow{x}} \exp\{-iz dF_t J\} = W_x(z),$$

где $W_x(z) = J S_x^* \left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right) J$, а $S_x(z)$ является характеристической функцией сужения комплекса (6) $\mathring{\Delta}_H$ на инвариантное относительно $\mathring{A}_C$ (8) подпространство $f(t) \in L^2_{2,l}(F_t)$ таких, что $\operatorname{supp} f(t) \subseteq [0, x]$.

З а м е ч а н и е 1. Если $\beta_x = b_x + ih_x$ ($b_x = \operatorname{Re}\beta_x$, $h_x = \operatorname{Im}\beta_x$), то $F_x = m_x + h_x J$, где

$$m_x = \begin{bmatrix} \alpha_x & b_x \\ b_x & \gamma_x \end{bmatrix}$$

является вещественной (α_x, b_x, $\gamma_x \in \mathbb{R}$) неубывающей матрицей-функцией на $[0, l]$. Более того, легко видеть, что

$$M_x(z) = \widetilde{M}_x(z) e^{-izh_x}, \tag{11}$$

где матрица $\widetilde{M}_x(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\widetilde{M}_x(z) + iz \int\limits_0^x \widetilde{M}_t(z) dm_t J = I,$$

а h_x — вещественная функция на $[0, l]$.

Из (10) следует, что

$$\frac{d}{dx} M_x(z) J M_x^*(w) = \frac{z - \bar{w}}{i} M_x(z) a_x M_x^*(w),$$

и значит,

$$M_x(z) J M_x^*(w) - J = \frac{z - \bar{w}}{i} \int\limits_0^x M_t(z) dF_t M_t^*(w). \tag{12}$$

Таким образом, ядро

$$\mathcal{L}_x(z, w) = \frac{i M_x(z) J M_x(w) - J}{z - \bar{w}}$$

является эрмитово-положительным ядром переменных z, w при любом $x \in [0, l]$.

Рассмотрим вектор-строку

$$L_x(z) = [1; 0] M_x(z) = [A_x(z); B_x(z)], \tag{13}$$

которая, в силу (9), является решением интегрального уравнения

$$L_x(z) + iz \int\limits_0^x L_t(z) dF_t J = [1; 0]. \tag{14}$$

Из (12) следует, что

$$L_x(z) J L_x^*(w) = \frac{z - \bar{w}}{i} \int\limits_0^x L_t(z) dF_t L_t^*(w), \tag{15}$$

т.е. $L_t(z) \in L^2_{2,a}(F_t)$ при любом $z \in \mathbb{C}$ и $\forall a \in (0,l)$, а ядро

$$K_x(z,w) = \frac{iL_x(z)JL_x^*(w)}{\pi(z-\bar{w})} = \frac{B_x(z)\overline{A}_x(w) - A_x(z)\overline{B}_x(w)}{\pi(z-\bar{w})} \tag{16}$$

является эрмитово-положительной функцией. В частности,

$$L_x(z)JL_x^*(w) = \begin{cases} \geq 0, & \operatorname{Im} z > 0, \\ = 0, & \operatorname{Im} z = 0, \\ \leq 0, & \operatorname{Im} z < 0; \end{cases} \tag{17}$$

т.е. $L_x(z)$ в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > 0$ ($\operatorname{Im} z < 0$) имеет неотрицательную (неположительную) J-норму, а при $z \in \mathbb{R}$ принадлежит изотропному (относительно J) линеалу. Из (11) заключаем, что $L_x(z) = e^{-izh_x}\widetilde{L}_x(z)$, где компоненты вектор-функции $\widetilde{L}_x(z) = [\widetilde{L}_x^1(z), \widetilde{L}_x^2(z)]$ являются целыми вещественными функциями, т.е.

$$\overline{\widetilde{L}_x^k(z)} = \widetilde{L}_x^k(\bar{z}) \ (k=1,2), \quad \widetilde{L}_x^k(z) = [1;0]\widetilde{M}_x(z).$$

III. Инволюция J может быть представлена в виде $J = P_+ - P_-$, где $P_\pm^2 = P_\pm = P_\pm^*$; $P_+P_- = 0$; $P_+ + P_- = I$. Очевидно, что

$$P_+ = \frac{1}{2}(I+J) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}; \ P_- = \frac{1}{2}(I-J) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}.$$

Выделим следующие важные свойства вектор-строки $L_x(z)$:

$$L_x(z)P_+ = E_x(z)L_0^+, \quad L_x(z)P_- = \widetilde{E}_x(z)L_0^-,$$

где $L_0^\pm = L_0P_\pm$, $L_0^+ = \dfrac{1}{2}[1;i]$, $L_0^- = \dfrac{1}{2}[1;-i]$; ($L_0 = [1;0]$), а функции $E_x(z)$ и $\widetilde{E}_x(z)$ равны

$$E_x(z) = A_x(z) - iB_x(z), \quad \widetilde{E}_x(z) = A_x(z) + iB_x(z). \tag{18}$$

Функцию $\widetilde{E}_x(z)$ назовем сопряженной функцией по отношению к $E_x(z)$, т.к. в случае вещественной меры $F_t = m_t$ будем иметь $\widetilde{E}_x(z) = \overline{E_x(\bar{z})}$. И как будет показано ниже, целая функция $E_x(z)$ характеризует поведение строки $L_x(z)$ в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, а $\widetilde{E}_x(z)$ — в нижней $\operatorname{Im} z < 0$. Вычислим J-форму

$$\begin{aligned} L_x(z)JL_x^*(w) &= L_x(z)[P_+ - P_-]L_x^*(w) \\ &= E_x(z)L_0^+(L_0^+)^*\overline{E_x(w)} - \widetilde{E}_x(z)L_0^-(L_0^-)^*\overline{\widetilde{E}_x(w)} \\ &= \frac{1}{2}\{E_x(z)\overline{E}_x(w) - \widetilde{E}_x(z)\overline{\widetilde{E}}_x(w)\}. \end{aligned}$$

И следовательно, в силу (17), будем иметь

$$|E_x(z)| - |\widetilde{E}_x(z)| = \begin{cases} \geq 0, & \operatorname{Im} z > 0, \\ = 0, & \operatorname{Im} z = 0, \\ \leq 0, & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases} \tag{19}$$

При этом ядро $K_x(z, w)$ (16) будет представлять собой

$$K_x(z, w) = \frac{E_x(z)\overline{E_x}(w) - \widetilde{E}_x(z)\overline{\widetilde{E}_x}(w)}{2\pi(z - \bar{w})}. \tag{20}$$

Предположим, что в некоторой внутренней точке полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ (при фиксированном x), имеет место

$$|E_x(z_0)| = |\widetilde{E}_x(z_0)| \quad (\operatorname{Im} z_0 > 0).$$

Тогда, в силу леммы Шварца,

$$\widetilde{E}_x(z) = e^{i\theta_x} E_x(z), \quad \theta_x \in \mathbb{R},$$

и значит, $|E_x(z)| = |\widetilde{E}_x(z)|$ при всех z из верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Поэтому, в силу (15) и (20), заключаем, что

$$\int_0^x L_t(z) dF_t L_t(z) = 0,$$

т.е. $L_t(z)$ как элемент пространства $L^2_{2,x}(F_t)$ принадлежит ядру метрики, поэтому

$$\int_0^x L_t(z) dF_t = 0,$$

что в силу интегрального уравнения (14) дает $L_t(z) = [1; 0]$. Исключая в дальнейшем эту тривиальность, будем полагать, что

$$|E_x(z)| > |\widetilde{E}_x(z)| \quad (\operatorname{Im} z > 0)$$

и аналогично

$$|\widetilde{E}(z)| > |E_x(z)| \quad (\operatorname{Im} z < 0).$$

Нетрудно видеть, что $E_x(z) \neq 0$ при $\operatorname{Im} z > 0$ ($\widetilde{E}_x(z) \neq 0$ при $\operatorname{Im} z < 0$). Действительно, из $E_x(z_0) = 0$ ($\operatorname{Im} z_0 > 0$), в силу (19), следует, что $\widetilde{E}_x(z_0) = 0$, и значит, $L_x(z_0) J L^*_x(z_0) = 0$, поэтому (15) $L_t(z_0) = 0$ как элемент пространства $L^2_{2,x}(F_t)$. А в силу уравнения (14), $L_x(z_0) = [1; 0]$, что противоречит $E_x(z_0) = 0$.

Теорема 1. *Вектор-функция* $L_x(z) = [A_x(z); B_x(z)]$, *являющаяся нетривиальным* ($L_x(z) \not\equiv [1;0]$) *решением интегрального уравнения (14) такова, что:*

1) $L_t(z) \in L^2_{2,a}(F_t)$ *для любого* $a \in [0,l]$ *и* $z \in \mathbb{C}$;

2) функции $E_x(z) = A_x(z) - iB_x(z)$ *и* $\widetilde{E}_x(z) = A_x(z) + iB_x(z)$ *(18) не имеют корней в полуплоскостях* $\operatorname{Im} z > 0$ *и* $\operatorname{Im} z < 0$ *соответственно, причем*

$$|E_x(z)| - |\widetilde{E}_x(z)| = \begin{cases} > 0, & \operatorname{Im} z > 0, \\ = 0, & \operatorname{Im} z = 0, \\ < 0, & \operatorname{Im} z < 0 \end{cases} \tag{21}$$

и $E_x(0) = \widetilde{E}_x(0) = 1$ *при всех* $x \in [0,l]$.

IV. Напомним [3], что функция $g(z)$ называется функцией ограниченного вида в $\operatorname{Im} z > 0$, если она является частным двух голоморфных ограниченных в $\operatorname{Im} z > 0$ функций. Нетрудно видеть [3], что если $\operatorname{Re} g(z) \geq 0$ в $\operatorname{Im} z > 0$ и $g(z)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, то $g(z)$ является функцией ограниченного вида. Отсюда легко получить [3] следующее представление аналитических ограниченного вида в $\operatorname{Im} z > 0$ функций $g(z)$:

$$g(z) = B(z) e^{-izh} G(z),$$

где $B(z)$ — произведение Бляшке, отвечающее нулям $g(z)$; число $h \in \mathbb{R}$ называется средним типом $g(z)$; а $G(z)$ является голоморфной в $\operatorname{Im} z > 0$ функцией, для которой

$$\operatorname{Re} G(x+iy) = \frac{y}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(t)}{(t-x)^2 + y^2} \quad (z = x+iy, \ y > 0);$$

причем вещественная функция $\mu(t)$ такова, что $\mu(0) = 0$ и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|d\mu(t)|}{1+t^2} < \infty.$$

Средний тип h при этом вычисляется по формуле

$$h = \lim_{y \uparrow \infty} \frac{\ln |g(iy)|}{y}$$

и обусловлен тем, что при отображении $z = i\dfrac{1+\xi}{1-\xi}$ круга $|\xi| < 1$ на полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ возникает множитель $\exp(-ihz)$, отвечающий бесконечно удаленной точке на границе $\operatorname{Im} z = 0$ полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Упомянутые выше факты следуют из свойств аналитических в круге $|\xi| < 1$ функций после стандартной замены переменной $z = i\dfrac{1+\xi}{1-\xi}$. Для функций ограниченного вида $f(z)$ и неположительного среднего типа в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ таких, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty,$$

имеет место [3] следующая формула Коши:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt = \begin{cases} f(z), & \operatorname{Im} z > 0, \\ 0, & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases} \tag{22}$$

Следует отметить, что в нашем случае функции $E_x(z)$ и $\widetilde{E}_x(z)$ имеют средний тип h_x, что является очевидным следствием представления матрицы-функции $M_x(z)$ в виде (11). Таким образом, средний тип h характеризует "степень невещественности" представляющей меры F_x для матрицы $M_x(z)$.

V. Рассмотрим пару целых функций $A(z)$ и $B(z)$ такую, что функция $E(z) = A(z) - iB(z)$ и сопряженная к ней $\widetilde{E}(z) = A(z) + iB(z)$ не имеют корней в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$ соответственно, причем

$$|E(z)| - |\widetilde{E}(z)| = \begin{cases} > 0, & \operatorname{Im} z > 0, \\ = 0, & \operatorname{Im} z = 0, \\ < 0, & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases} \tag{23}$$

Ассоциируем с такой парой функций гильбертово пространство $\mathcal{B}(A, B)$, [3].

Пространством Л. де Бранжа $\mathcal{B}(A, B)$ *называется линейное многообразие целых функций* $F(z)$ *таких, что:*

а) $\dfrac{F(z)}{E(z)}$ $\left(\dfrac{F(z)}{\widetilde{E}(z)}\right)$ *является функцией ограниченного вида и неположительного среднего типа в верхней,* $\operatorname{Im} z > 0$ *(нижней,* $\operatorname{Im} z < 0$*), полуплоскости;*

б) имеет место

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{F(t)}{E(t)}\right|^2 dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{F(t)}{\widetilde{E}(t)}\right|^2 dt < \infty. \tag{24}$$

Гильбертовость пространства $\mathcal{B}(A,B)$ следует из принципа Фрагмена–Линделефа и формулы Коши [3, (2)]. Из формулы (22), в частности, вытекает существование в $\mathcal{B}(A,\, B)$ воспроизводящего ядра

$$K(z,w)=i\frac{E(z)\overline{E}(w)-\widetilde{E}(z)\overline{\widetilde{E}}(w)}{2\pi(z-\bar{w})},$$

т.е., при каждом фиксированном $w\in\mathbb{C}$, функция от z, $K(z,w)$, принадлежит $\mathcal{B}(A,B)$, и

$$\langle F(t),K(t,w)\rangle_{\mathcal{B}(A,B)}=F(w) \tag{25}$$

для любой функции $F(z)\in\mathcal{B}(A,B)$ и для любого $w\in\mathbb{C}$. Скалярное произведение в $\mathcal{B}(A,B)$ задается естественным образом:

$$\langle F(z),G(z)\rangle_{\mathcal{B}(A,B)}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(t)\overline{G}(t)\frac{dt}{|E(t)|^2}.$$

Нетрудно видеть, что в случае $A(z)=\cos az$, $B(z)=\sin az$, $(a>0)$ мы получаем классическесское пространство Винера–Пэли. Действительно, $E(z)=e^{-iaz}$, $\widetilde{E}(z)=\overline{E(\bar{z})}=e^{iaz}$, и в силу теоремы Винера–Пэли пространство $\mathcal{B}(A,B)$ в этом случае состоит из целых функций экспоненциального типа (не выше a), которые на вещественной оси $\mathbb{R}$ принадлежат $L^2_{\mathbb{R}}(dx)$. Преобразование Фурье [3] устанавливает унитарный изоморфизм между пространством $L^2_{(-a,a)}$ и пространством Л. де Бранжа $H(\cos az,\sin az)$, которое принято называть пространством Винера–Пэли.

Более глубокий факт, содержащий теорему Винера–Пэли, был доказан Л. де Бранжем [3].

Теорема Л. де Бранжа 2 [3]. *Рассмотрим семейство гильбертовых пространств Л. де Бранжа $\mathcal{B}(A_x(z),\ B_x(z))$, где вектор-строка $L_x(z)=[A_x(z);B_x(z)]$ является решением интегрального уравнения (14) на отрезке $x\in[0,l]$ для некоторой матричнозначной меры F_t. Сопоставим каждой строке $[f(t);g(t)]\in L^2_{2,l}(F_t)$ функцию*

$$F(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^a[f(t);g(t)]dF_tL_t^*(\bar{z}), \tag{26}$$

где a — внутренняя точка отрезка $[0,l]$, $0<a<l$.

Тогда $F(z)\in\mathcal{B}(A_a(z);B_a(z))$, причем справедливо равенство Парсеваля

$$\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|F(t)|^2}{|E_a(t)|^2}dt=\int\limits_0^a[f(t);g(t)]dF_t\left[\begin{array}{c}\bar{f}(t)\\ \bar{g}(t)\end{array}\right]. \tag{27}$$

Для любой функции $G(z) \in \mathcal{B}(A_a(z), B_a(z))$ *существует вектор-функция* $[\varphi(t), \psi(t)] \in L^2_{2,l}(F_t)$ *с носителем на* $[0, a]$, *такая что для* $G(z)$ *имеет место представление (26).*

Преобразование $F(z)$ (26) функции $[f(t); g(t)]$ из $L^2_{2,l}(F_t)$ будем называть преобразованием Л. де Бранжа по мере F_t функции $[f(t); g(t)]$.

Если $F_x = x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, то уравнение (14) приводит к системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}A_x(z) + zB_x(z) = 0, \quad A_0(z) = 1, \\ \dfrac{d}{dx}B_x(z) - zB_x(z) = 0, \quad B_0(z) = 0, \end{cases}$$

решением которой являются функции $A_x(z) = \cos xz$, $B_x\ (z) = \sin xz$. Таким образом, $\mathcal{B}(A_a(z), B_a(z))$ в этом случае совпадает с пространством Винера–Пэли, а преобразование (26) совпадает с суммой синус-преобразования и косинус-преобразования Фурье и при $if(t) = g(t)$ является обычным преобразованием Фурье, для которого соотношение (27) является классическим равенством Парсеваля.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В основе доказательства теоремы 2 лежат следующие соображения, отличающиеся от рассуждений в [3], которые воспроизведем в общих чертах. Как следует из приведенных ранее рассмотрений, функция от z

$$K_a(z, w) = \frac{1}{\pi}\int_0^a L_t(w)dF_tL_t^*(\bar{z}) \tag{28}$$

принадлежит пространству $\mathcal{B}(A_a(z), B_a(z))$ при каждом фиксированном $w \in \mathbb{C}$. Учитывая воспроизводящее свойство ядра $K_a(z, w)$, получим

$$K_a(z, w) = \int_{-\infty}^{\infty} K_a(t, w)\overline{K_a(t, z)}\frac{dt}{|E_a(t)|^2}.$$

И значит, имеет место

$$\pi\int_{-\infty}^{\infty} K_a(t, w)\overline{K_a(t, z)}\frac{dt}{|E_a(t)|^2} = \int_0^a L_t(z)dF_tL_t^*(w).$$

Обозначим через $\mathcal{L}_a(L_t(z))$ следующую линейную оболочку:

$$\mathcal{L}_a(L_t(z)) = \operatorname{span}\{L_t(z_k)\xi_k : \xi_k, z_k \in \mathbb{C}\},$$

где $t \in [0,a]$. Тогда из (28) следует, что преобразование Л. де Бранжа пространства $\mathcal{L}_a(L_t(z))$ содержит воспроизводящее ядро $K_a(z,w)$ как функцию $\bar{w}$ при каждом фиксированном z. Учитывая воспроизводящее свойство ядра $K_a(z,w) \in \mathcal{B}(A_a(z),B_a(z))$ (25), легко установить, что преобразование Л. де Бранжа (26) элементов $[f(t),g(t)] \in \mathcal{L}_a(L_t(z))$ плотно в пространстве Л. де Бранжа $\mathcal{B}(A_a(z),B_a(z))$. Поэтому преобразование (26) устанавливает изоморфизм между пространством $\mathcal{B}(A_a(z);B_a(z))$ и пространством $\overline{\mathcal{L}_a(L_t(z))} \subset L^2_{2,a}(F_t)$ для каждого $a \in [0,l]$ в том смысле, что

$$\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(t)|^2 \frac{dt}{|E_a(t)|^2} = \int\limits_0^a [f(t),g(t)]dF_t \begin{bmatrix} \bar{f}(t) \\ \bar{g}(t) \end{bmatrix}.$$

Завершает доказательство теоремы утверждение о том, что

$$\overline{\mathcal{L}_a(L_t(z))} = L^2_{2,a}(F_t).$$

Вначале устанавливается справедливость включения

$$\overline{\mathcal{L}_a(L_t(z))} \subset \overline{\mathcal{L}_b(L_t(z))} \text{ при } a < b.$$

Пусть $[f(t);g(t)] \in \overline{\mathcal{L}_a(L_t(z))}$, а $[f_1(t),g_1(t)]$ — проекция вектор-строки $[f(t),g(t)]$ из $L^2_{2,l}(F_t)$ на $\overline{\mathcal{L}_b(L_t(z))}$. Покажем, что $[f(t),g(t)] = [f_1(t);\, g_1(t)] \in \overline{\mathcal{L}_b(L_t(z))}$. Ясно, что преобразования Л. де Бранжа (26) элементов из $L^2_{2,l}(F_t)$ совпадают и равны $F(z)$. Тогда из равенства Парсеваля (27) будем иметь

$$\|F(z)\|_{\mathcal{B}(A_a,B_a)} = \|[f(t);g(t)]\|_{L^2_{2,l}(F_t)},$$

$$\|F(z)\|_{\mathcal{B}(A_b,B_b)} = \|[f_1(t);g_1(t)]\|_{L^2_{2,l}(F_t)}.$$

А так как $\mathcal{B}(A_a,B_a)$ изометрически содержится в $\mathcal{B}(A_b,B_b)$ [3], то нормы у элементов $[f(t),g(t)]$ и $[f_1(t),g_1(t)]$ в $L^2_{2,l}(F_t)$ совпадают. Учитывая, что $[f_1(t),g_1(t)]$ является проекцией на $\overline{\mathcal{L}_b(L_t(z))}$ вектора $[f(t),g(t)]$, мы и получим требуемое: $[f(t),g(t)] = [f_1(t),g_1(t)]$ в $L^2_{2,l}(F_t)$.

Если же теперь предположить противное, т.е., что $\mathcal{L}_a(L_t(z)) \neq L^2_{2,a}(F_t)$, то тогда найдется такой вектор $[f(t);g\ (t)]$ из $L^2_{2,a}(F_t)$, что

$$\int\limits_0^b [f(t),g(t)]dF_t L_t^*(\bar{z}) = 0$$

при всех $z \in \mathbb{C}$ и любых $b \in [0,a]$. Поэтому

$$[f(t);g(t)]a_t L_t^*(\bar{z}) = 0 \text{ при } t \in [0,a].$$

Используя линейную независимость компонент вектор-функций $L_t(z)$ и $L_t(\bar{z})$, получим, что $[f(t),g(t)]a_t = 0$, т.е. $[f(t),g(t)] = 0$ как элемент пространства $L^2_{2,a}(F_t)$, что и завершает доказательство теоремы.

Следует отметить очень интересные и важные построения теории целых функций Л. де Бранжа, которые позволяют по паре целых функций $A(z)$, $B(z)$, задающих пространство Л. де Бранжа $\mathcal{B}(A(z),B(z))$, восстановить матричную меру F_t ("гамильтониан"), такую что вектор-строка $[A(z),B(z)]$ продолжается на отрезках $[0,l]$ как решение интегрального уравнения (14), ассоциированного с мерой F_t, причем $L_l(z) = [A(z),B(z)]$.

VI. Используем приведенную выше конструкцию Л. де Бранжа для построения функциональной модели узла $\mathring{\Delta}_c$ (6), когда $\alpha_x \equiv 0$. Вычислим, во что переходит действие оператора $\mathring{A}_C$ (8) при преобразовании Л. де Бранжа (26),

$$\pi F_1(z) = \int\limits_0^l \left\{ i\int\limits_x^l [f(t),g(t)]dF_t J \right\} dF_x L^*_x(z)$$

$$= \int\limits_0^l [f(t),g(t)]dF_t \left\{ \frac{L^*_t(\bar{z}) - L^*_t(0)}{z} \right\} = \pi \frac{F(z)-F(0)}{z}$$

в силу интегрального уравнения (14), где $F(z)$ — преобразование Л. де Бранжа (26) функции $[f(t),g(t)]$. Таким образом, действие оператора $\mathring{A}_C$ (8) преобразуется в традиционный для функциональных моделей оператор трансляции:

$$\widehat{A}F(z) = \frac{F(z)-F(0)}{z}, \quad F(z) \in \mathcal{B}(A_l(z),B_l(z)). \tag{29}$$

Найдем образы каналовых элементов $\{e_\alpha\}_1^2$ узла (6) при преобразовании (26). Из (14) следует, что

$$\int\limits_0^l L_t(z)dF_t = \frac{1}{z}[B_l(z);1-A_l(z)],$$

и значит,

$$\hat{e}_1(z) = \frac{B^*_l(\bar{z})}{z}, \quad \hat{e}_2(z) = \frac{1-A^*_l(\bar{z})}{z}. \tag{30}$$

Комплекс

$$\widehat{\Delta} = (\widehat{A}, \mathcal{B}(A_l(z),B_l(z)), \{\hat{e}_1(z),\hat{e}_2(z)\}, J_N) \tag{31}$$

назовем функциональной моделью, где $\widehat{A}$ в $\mathcal{B}(A_l(z),B_l(z))$ действует по формуле (29), а функции $\hat{e}_\alpha(z)$ имеют вид (30).

Теорема 3. *Пусть спектр $\sigma(A)$ оператора A локального комплекса Δ (3) сосредоточен в нуле, $\sigma(A) = \{0\}$. Тогда в случае простоты комплекс Δ унитарно-эквивалентен функциональной модели $\widehat{\Delta}$ (31).*

Нуждается в пояснении только тот факт, что при преобразовании Л. де Бранжа (26) дополнительная компонента [1] модели $\overset{\circ}{\Delta}_c$ (6) аннулируется. Последнее очевидно вытекает из того, что $L_x(z) = (I - z \overset{\circ}{A}{}_c^*)^{-1} e_1$ в силу (14).

VII. В качестве примера рассмотрим квадрат (с точностью до знака) оператора интегрирования A_l:

$$(Af)(x) = \int\limits_x^l f(t)(t-x)dt, \tag{32}$$

где $f(x) \in L^2(0,l)$. Очевидно, что

$$(Af)(x) = i \int\limits_x^l f(t)[1,t] \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} dt. \tag{33}$$

Таким образом, оператор A (32) может быть включен в локальный операторный комплекс

$$\Delta = \left(A, L^2_{(0,l)}, \{g_1 = 1; g_2 = x\}, J = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \right). \tag{34}$$

Рассмотрим следующее пространство функций на $[0,l]$:

$$L^2_{2,l}(a_x) = \left\{ g(x) = [g_1(x), g_2(x)] : \int\limits_0^l g(x) a_x g^*(x) dx < \infty \right\},$$

где матрица a_x имеет вид

$$a_x = \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} [1, x] = \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{bmatrix}.$$

После факторизации по ядру метрики

$$\operatorname{Ker} a_x = \{ g(x) \in L^2_{2,l}(a_x) : \|g\|_{L^2_{2,l}(a_x)} = 0, g_1(x) + x g_2(x) = 0 \text{ п. в. } \},$$

получим гильбертово пространство, которое также обозначим через $L^2_{2,l}(a_x)$. Элементарная проверка показывает, что отображение

$$Vg = [g_1(x), g_2(x)] \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = g_1(x) + xg_2(x); \quad (L^2_{2,l}(a_x) \to L^2_{(0,l)})$$

является унитарным оператором из $L^2_{2,l}(a_x)$ в $L^2_{(0,l)}$, причем

$$V^* f = [f(x); 0]; \quad (L^2_{(0,l)} \to L^2_{2,l}(a_x)),$$

где $f(x) \in L^2_{(0,l)}$. Унитарное отображение V преобразует комплекс (34) в Δ_{a_x}:

$$\Delta_{a_x} = \left(B, L^2_{2,l}(a_x), \{e_1 = [1;0], e_2 = [0;1]\}, J_N = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \right), \qquad (35)$$

где $Bg(x) = i\int_x^l g(t)a_t dt$, $g(x) \in L^2_{2,l}(a_x)$. Отметим, что матрица a_x вырождена при каждом $x \in [0,l]$ и $\operatorname{tr} a_x = x^2 + 1 \neq 1$. Вычислим далее функции $A_x(z)$ и $B_x(z)$, которые определяются из интегрального уравнения

$$[A_x(z), B_x(z)] + z\int_0^x [A_t(z), B_t(z)] \begin{bmatrix} t & -1 \\ t^2 & -t \end{bmatrix} dt = [1;0],$$

эквивалентного системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dx}A_x(z) + zx(A_x(z) + xB_x(z)) = 0, \quad A_0(z) = 1;$$

$$\frac{d}{dx}B_x(z) - z(A_x(z) + xB_x(z)) = 0, \quad B_0(z) = 0,$$

решением которой являются

$$A_x(z) = \operatorname{ch} x\sqrt{z} - x\sqrt{z}\operatorname{sh} x\sqrt{z}, \quad B_x(z) = \sqrt{z}\operatorname{sh} x\sqrt{z}.$$

Функции $E_x(z)$ и $\widetilde{E}_x(z)$ в силу вещественности a_x сопряжены в обычном смысле

$$\widetilde{E}_x(z) = \overline{E_x(\bar{z})}; \quad E_x(z) = \operatorname{ch} x\sqrt{z} - (x+i)\sqrt{z}\operatorname{sh} x\sqrt{z}.$$

Наконец, отметим что пространству Л. де Бранжа

$$\mathcal{B}(\operatorname{ch} l\sqrt{z} - l\sqrt{z}\operatorname{sh} l\sqrt{z}, \sqrt{z}\operatorname{sh} l\sqrt{z}) \quad (0 < l < \infty)$$

принадлежат целые функции, порядок роста которых равен $1/2$, а тип, соответственно, не более l.

VIII. Предположим, что спектр основного оператора A веществен, тогда простой комплекс Δ (3) унитарно эквивалентен простой части модельного комплекса Δ (6), а оператор A_C в $L^2_{2,l}(F_x)$ задается формулой (7), где $f(x) = [f_1(x); f_2(x)] \in L^2_{2,l}(F_x)$, α_x — вещественная ограниченная неубывающая функция на $[0,l]$, а F_x — неубывающая на $[0,l]$ матричнозначная (2×2) функция, $F_x = \begin{bmatrix} \alpha_x & \beta_x \\ \bar\beta_x & \gamma_x \end{bmatrix}$, такая что $\operatorname{tr} F_x = x$. Аналогично рассмотрениям п. II, введем $M_x(z)$ как решение интегрального уравнения:

$$(1 - z\alpha_x)M_x(z) + iz\int_0^x M_t(z)dF_tJ = I, \tag{36}$$

которое при $\alpha_x = 0$ совпадает с (9). Если F_t абсолютно непрерывна $dF_t = a_dt$, то матрица $N_x(z) = (1 - z\alpha_x)M_x(z)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}N_x(z) + \dfrac{iz}{1 - z\alpha_x}N_x(z)a_xJ = 0; \quad x \in [0,l] \\ N_0(z) = I. \end{cases} \tag{37}$$

Из задачи Коши (37) следует, что

$$\frac{d}{dx}N_x(z)JN^*_x(w) = \frac{z-\bar w}{i}\frac{N_x(z)a_xN^*_x(w)}{(1-\alpha_xz)(1-\alpha_x\bar w)},$$

поэтому

$$\begin{aligned}(1 - \alpha_xz)M_x(z)JM^*_x(w)(1-\alpha_x\bar w) - J \\ = \frac{z-\bar w}{i}\int_0^x M_t(z)dF_tM^*_t(w).\end{aligned} \tag{38}$$

Таким образом, ядро

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_x(z,w) &= i\frac{(1 - \alpha_xz)M_x(z)JM^*_x(w)(1-\alpha_x\bar w) - J}{z-\bar w} \\ &= i\frac{N_x(z)JN^*_x(w) - J}{z-\bar w}\end{aligned} \tag{39}$$

является эрмитово-положительным ядром (при $x \in [0,l]$) переменных z, $\bar w$, когда z, $w \in \mathbb{C}_\alpha$, где множество $\mathbb{C}_\alpha$ имеет вид $\mathbb{C}_\alpha = \mathbb{C}\backslash I_\alpha$;

$$I_\alpha = \{y \in \mathbb{R} : y\alpha_x = 1; x \in [0,l]\}. \tag{40}$$

Рассмотрим теперь вектор-строку $L_x(z) = [1;0]M_x(z) = [A_x(z),\ B_x(z)]$, которая, очевидно (в силу (36)), является решением уравнения

$$(1-\alpha_xz)L_x(z) + iz\int_0^x L_t(z)dF_tJ = [1;0] \tag{41}$$

при $z \in \mathbb{C}_\alpha$. Из (38) следует, что

$$(1-\alpha_x z)L_x(z)JL_x^*(w)(1-\alpha_x\bar{w}) = \frac{z-\bar{w}}{i}\int\limits_0^x L_t(z)dF_tL_t^*(w); \tag{42}$$

поэтому очевидно, что при $z \in \mathbb{C}_\alpha$ вектор-функция $L_t(z)$ принадлежит пространству $L^2_{2,a}(F_t)$ для каждого $a \in (0,l)$. Ядро

$$\begin{aligned} K_x(z,w) &= \frac{i(1-\alpha_x z)(1-\alpha_x\bar{w})}{\pi(z-\bar{w})}L_x(z)JL_x^*(w) \\ &= \frac{(1-\alpha_x z)(1-\alpha_x\bar{w})}{\pi(z-\bar{w})}\{B(z)\overline{A_x(w)} - A_x(z)\overline{B_x(w)}\}, \end{aligned} \tag{43}$$

в силу (42), является эрмитово-положительным при z, $w \in \mathbb{C}_\alpha$. Как и в п. II, представляя J в виде

$$J = P_+ - P_-, \quad P_+ = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}, \quad P_- = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

и учитывая то, что

$$L_x(z)P_+ = E_xL_0^+, \quad L_x(z)P_- = \widetilde{E}_xL_0^-,$$

где $L_0^\pm = L_0P_\pm = \dfrac{1}{2}[1;\pm i]$, а функции $E_x(z)$, $\widetilde{E}_x(z)$ равны (18), в силу эрмитовой неотрицательности ядра $K_x(z,w)$ (43), получим

$$L_x(z)JL_x^*(z) = \frac{1}{2}\{|E_x(z)|^2 - |\widetilde{E}_x(z)|^2\} = \begin{cases} \geq 0, & z \in \mathbb{C}_+, \\ = 0, & z \in \mathbb{R}\backslash I_\alpha, \\ \leq 0, & z \in \mathbb{C}_-. \end{cases} \tag{44}$$

Следовательно, для $L_x(z)$ в этом случае справедлива теорема 1 при условии, что $z \in \mathbb{C}_\alpha$.

Обозначим через $R_x(z) = [C_x(z); S_x(z)]$ вектор-строку

$$R_x(z) = (1-\alpha_x z)L_x(z) = [1;0]N_x(z), \tag{45}$$

тогда уравнение (41) запишем для $R_x(z)$ в виде

$$R_x(z) + i\int\limits_0^x \frac{z}{1-\alpha_t z}R_t(z)dF_tJ = [1;0]. \tag{46}$$

Предположим, что мера dF_t эквивалентна скалярной мере Лебега, $dF_t = \beta_t dt \cdot I_{E^2}$. Легко видеть, что компоненты вектора $R_x(z)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}C_x(z) + \dfrac{z\beta_t}{1-\alpha_x z}S_x(z) = 0, \quad C_0(z) = 1; \\ \dfrac{d}{dx}S_x(z) - \dfrac{z\beta_t}{1-\alpha_x z}C_x(z) = 0, \quad S_0(z) = 0, \end{cases}$$

решение которой имеет вид

$$C_x(z) = \cos\left(\int\limits_0^x \frac{z\beta_t dt}{1-\alpha_t z}\right), \quad S_x(z) = \sin\left(\int\limits_0^x \frac{z\beta_t dt}{1-\alpha_t z}\right). \tag{47}$$

Таким образом,

$$A_x(z) = \frac{\cos\left(\int\limits_0^x \frac{z\beta_t dt}{1-\alpha_t z}\right)}{1-\alpha_x z}, \quad B_x(z) = \frac{\sin\left(\int\limits_0^x \frac{z\beta_t dt}{1-\alpha_t z}\right)}{1-\alpha_x z}, \tag{48}$$

а функции $E_x(z)$ и $\widetilde{E}_x(z)$ (18) соответственно равны

$$E_x(z) = \frac{\exp\left\{-i\int\limits_0^x \frac{z\beta_t dt}{1-\alpha_t z}\right\}}{1-\alpha_x z}; \quad \widetilde{E}_x(z) = \frac{\exp\left\{i\int\limits_0^x \frac{z\beta_t dt}{1-\alpha_t z}\right\}}{1-\alpha_x z}. \tag{49}$$

Утверждение 8.1. *Решение уравнения (41) $L_x(z) = = [A_x(z); B_x(z)]$ и функции $E_x(z)$, $\widetilde{E}_x(z)$ (18), когда dF_t эквивалентна мере Лебега $dF_t = \beta_t dt I_{E^2}$, имеют вид (48) и (49), соответственно.*

Отметим, что если $\alpha_x = x$, а $\beta_x = 1$ при $x \in [0, l]$, то $E_x(z)$ и $\widetilde{E}_x(z)$ (18) могут быть вычислены явно и равны

$$E_x(z) = (1 - xz)^{i-1}; \quad E_x(z) = (1 - xz)^{-i-1}, \tag{50}$$

которые голоморфны в $\mathbb{C}$ за исключением полуоси $I_\alpha = \left(\frac{1}{l}, \infty\right)$.

IX. Каждой функции $f(t) \in L^2_{2,l}(F_t)$, аналогично (26), сопоставим функцию $F(z)$ по формуле

$$F(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^l f(t) dF_t L_t^*(\bar{z}), \tag{51}$$

где $L_t(z)$ — решение уравнения (41). Через $\mathcal{B}_\alpha(A,B)$ обозначим гильбертово пространство голоморфных в $\mathbb{C}_\alpha$ функций $F(z)$, задаваемых формулой (51), где $f(t) \in L^2_{2,l}(F_t)$, при этом по определению будем считать, что $\|F(z)\|^2_{\mathcal{B}_\alpha} = \frac{1}{\pi}\|f(t)\|^2_{L^2(F_t)}$.

Из (42) следует, что ядро $K_l(\bar\lambda,\bar z)$ (43) как функция от z принадлежит пространству $\mathcal{B}_\alpha(A,B)$ при любом $\lambda \in \mathbb{C}_\alpha$. Отображение (51) сопоставляет функции $f(t) \in L^2_{2,l}(F_t)$ функцию $F(z) \in \mathcal{B}_\alpha(A,B)$, а в силу (42), очевидно, что вектор-строке $L_t(\bar\lambda)$ из $L^2_{2,l}(F_t)$ соответствует, как функция от z, ядро $K_l(\bar\lambda,\bar z) \in \mathcal{B}_\alpha(A,B)$. Поэтому, в силу определения пространства $\mathcal{B}_\alpha(A,B)$, будем иметь

$$\langle F(z), K_l(\bar\lambda,\bar z)\rangle_{\mathcal{B}_\alpha} = \frac{1}{\pi}\langle f(t), L_t(\bar\lambda)\rangle_{L^2(F_t)} = F(\lambda) \tag{52}$$

при $\lambda \in \mathbb{C}_\alpha$, и значит, $K_l(\bar\lambda,\bar z)$ является воспроизводящим ядром в $\mathcal{B}_\alpha(A,B)$. Таким образом, в пространстве голоморфных в $\mathbb{C}_\alpha$ функций $F(z)$ (51) всегда существует гильбертова метрика, относительно которой ядро $K_l(\bar\lambda,\bar z)$ является воспроизводящим, при этом справедливо равенство Парсеваля.

Из неравенства Коши–Буняковского следует, что

$$|F(z)|^2 \le \|f(t)\|^2_{L^2(F_t)} \cdot \frac{1}{\pi^2}\|L_t(\bar z)\|_{L^2(F_t)} = \frac{1}{\pi}\|f(t)\|^2_{L^2(F_t)} \cdot K_l(\bar z,\bar z),$$

в силу (42) и (43). Значит, функция $F(z)$ (51) растет в $\mathbb{C}_+$ не быстрее, чем $E_l(z)(1-\alpha_l z)$, а в полуплоскости $\mathbb{C}_-$ — не выше, чем $\widetilde{E}_l(z)(1-\alpha_l z)$. Поэтому функции $F(z)$ из пространства $\mathcal{B}(A,B)$ наследуют не только особенности $A_l(z)$ и $B_l(z)$ (а значит, $E_l(z)$ и $\widetilde{E}_l(z)$) на множестве I_α (40), но и характер роста в $\mathbb{C}_+$ и в $\mathbb{C}_-$, который оценивается поведением на бесконечности $E_l(z)(1-\alpha_l z)$ и $\widetilde{E}_l(z)(1-\alpha_l z)$ соответственно.

В отличие от формального определения пространства $\mathcal{B}_\alpha(A,B)$, дадим внутреннее описание этого пространства голоморфных в $\mathbb{C}_\alpha$ функций, как это было сделано для $\mathcal{B}(A,B)$ (24).

Пусть $E_l(z)$ и $\widetilde{E}_l(z)$ — значения в точке $x=l$ функций $E_x(z)$ и $\widetilde{E}_x(z)$ (18), где $L_x(z) = [A_x(z); B_x(z)]$ — решение уравнения (41). Предположим, что α_x является кусочно-монотонной функцией, а это означает, что множество I_α (40) состоит из не более чем счетного множества попарно непересекающихся ограниченных снизу отрезков. Таким образом, можно считать, что в $\mathbb{C}_\alpha = \mathbb{C}\backslash I_\alpha$ заданы голоморфные функции $E(z)$ и $\widetilde{E}(z)$ (18), для которых имеют место соотношения (44). И пусть α_l — точная нижняя грань множества I_α.

Пространством Л. де Бранжа $\mathcal{B}_\alpha(A,B)$ называется такое линейное многообразие голоморфных в $\mathbb{C}_\alpha$ функций $F(z)$, таких что:

а) $\dfrac{F(z)}{(1-\alpha_l z)E(z)}$ $\left(\dfrac{F(z)}{(1-\alpha_l z)\widetilde{E}(z)}\right)$ *является функцией ограниченного вида и неположительного среднего типа в верхней* $\mathbb{C}_+$ *(нижней* $\mathbb{C}_-$*) полуплоскости;*

б)
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{F(t)}{(1-\alpha_l t)E(t)}\right|^2 dt=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{F(t)}{(1-\alpha_l t)\widetilde{E}(t)}\right|^2 dt<\infty. \tag{53}$$

Отметим, что условия (53) означают, что характер особенностей на I_α у $F(t)$ и $(1-\alpha_l t)E(t)$ должен быть таким, чтобы отношение $\dfrac{F(t)}{(1-\alpha_l t)E(t)}$ было квадратично суммируемо на $\mathbb{R}$. Именно это обстоятельство, в силу формулы (22), позволяет утверждать, что ядро

$$K(z,w)=\frac{i(1-\alpha_l z)(1-\alpha_l\bar{w})}{2\pi(z-\bar{w})}\{E(z)\overline{E(w)}-\widetilde{E}(z)\overline{\widetilde{E}(w)}\}$$

является воспроизводящим. Поэтому для пространства $\mathcal{B}_\alpha\,(A,B)$ справедлива теорема 2 с естественными оговорками ($z\in\mathbb{C}_\alpha$ и др.).

Отметим наконец, что преобразование Л. де Бранжа (51) переводит оператор $\mathring{A}_C$ (7) в традиционный для функциональных моделей сдвиг

$$\pi F_1(z)=\int\limits_0^l\left(\alpha_t f(t)+i\int\limits_t^l f(s)dF_sJ\right)dF_tL_t^*(\bar{z})$$

$$=\int\limits_0^l f(t)dF_t\frac{L_t^*(\bar{z})-L_t^*(0)}{z}=\pi\frac{F(z)-F(0)}{z}$$

в силу интегрального уравнения (41). Таким образом, оператор $\mathring{A}_C$ (7) в $\mathcal{B}_\alpha(A,B)$ действует по формуле

$$\widehat{A}F(z)=\frac{F(z)-F(0)}{z},\quad F(z)\in\mathcal{B}_\alpha(A,B). \tag{54}$$

Определим теперь комплекс

$$\widetilde{\Delta}=(\widehat{A},\mathcal{B}_\alpha(A_l(z),B_l(z)),\{\hat{e}_1(z),\hat{e}_2(z)\},J), \tag{55}$$

где $\widehat{A}$ задан формулой (7), $\hat{e}_k(z)$ имеют вид

$$\hat{e}_1(z)=\frac{1-\alpha_l z}{z}B_l^*(\bar{z}),\quad \hat{e}_2(z)=\frac{1-\alpha_l z}{z}(I-A_l^*(\bar{z})),$$

в силу уравнения (41).

Теорема 4. *Предположим, что спектр $\sigma(A)$ оператора A локального комплекса Δ (3) веществен. Тогда, в случае простоты, комплекс Δ унитарно эквивалентен функциональной модели $\widehat{\Delta}$ (55).*

Список литературы

[1] *М.С. Лившиц, А.А. Янцевич*, Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. Изд-во. Харьк. ун-та, Харьков (1971).

[2] *В.А. Золотарев*, Временные конусы и функциональная модель на римановой поверхности. — *Мат. сб.* (1990), т. 181, № 7, с. 965–995.

[3] *L. de Branges*, Hilbert spaces of entire functions. Prentice–Hall, London (1968).

[4] *Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш*, Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. Мир, Москва (1970).

The L. de Branges spaces and functional models of non-dissipative operators

V.A. Zolotarev

The functional model for any bounded non-dissipative operator A in Hilbert space H with rank $\left(\dfrac{A-A^*}{i}\right) = 2$ has been constructed. This model is realized by the operator of multiplication on independent variable in the L. de Branges space of holomorphic functions. In difference with the L. de Branges space of entire functions the spaces of holomorphic in $\mathbb{C}$ functions with predefined singularities on the real axis have been studied. This allowed to construct the functional models for non-dissipative operators with real spectrum when rank $\left(\dfrac{A-A^*}{i}\right) = 2$.