Математическая физика, анализ, геометрия
2002, т. 9, № 4, с. 663–685

Нормальные формы биллиардов

С.В. Найденов, В.В. Яновский

Институт монокристаллов НАН Украины
пр. Ленина, 60, Харьков, 61001, Украина

E-mail:naydenov@isc.kharkov.com
yanovsky@isc.kharkov.com

Статья поступила в редакцию 30 августа 2001 г.;
после переработки 30 августа 2002 г.
Представлена В.Я. Голодцом

Построена теория нормальных форм биллиардов как нового класса обратимых динамических систем с проективной инволюцией. Качественный анализ отображений биллиардного типа выполнен как вблизи их регулярных точек, так и вблизи циклов (периодических траекторий) произвольного порядка.

Побудовано теорію нормальних форм біліардів як нового класу обернених динамічних систем з проективною інволюцією. Якісний аналіз відображень біліардного типу виконано як поблизу їх регулярних точок, так і поблизу циклів (періодичних траєкторій) довільного порядку.

1. Введение

Среди динамических систем, демонстрирующих типичные черты регулярной и хаотической динамики, выделяются биллиарды [1–5]. Они обнаруживают фундаментальные свойства [6], присущие разнообразным классическим и квантовым системам [7–8]. К тому, же биллиард выступает адекватной теоретической моделью многих реальных физических систем [9–12]. Современное понимание многих ключевых вопросов нелинейной и хаотической динамики было заложено в классических работах по эргодической и спектральной теории биллиардов — исследованиях Дж. Биркгофа [13], Н.С. Крылова [14], Я.Г. Синая [15], Л.А. Бунимовича [16], В.Ф. Лазуткина [17], С. Табачникова [18], Е. Гуткина [19] и др.

Унифицирующий подход к биллиардам состоит в выделении их в отдельный класс специальных обратимых отображений с проективной инволюцией.

Mathematics Subject Classification 2000: 37D50; 37G05; 58K50; 70K45.

В работах [20, 21] был предложен именно такой геометро-динамический подход. В нем обратимость динамической системы и симметричность соответствующего фазового пространства играют принципиальную роль. Обратимые системы встречаются повсеместно, т.к. большинство физических законов обратимы во времени. Обратимым системам, ввиду их очевидной важности, посвящено огромное количество работ (см., напр., обзор [22]). Систематическое изучение этих систем было начато еще в работах А. Пуанкаре, Дж. Биркгофа и Дж. Мозера, при исследовании сохраняющих меру отображений, и продолжено В.И. Арнольдом [23], М.Б. Севрюком [24] и др. в общем случае.

В работе исследуются структура и особенности специального класса биллиардных отображений. Построены их нормальные формы вблизи циклов (периодических траекторий) произвольного порядка. Развитие такой теории нормальных форм биллиардов необходимо для исследования возможных бифуркаций в этом важном классе обратимых динамических систем.

2. Обратимые отображения биллиардного типа

Сохранение углов при отражениях — основное свойство физического биллиарда. При использовании его для произвольных планарных биллиардов получено [20] отображение (на торе T^2), которое определяет последовательность точек отражения произвольной биллиардной траектории от геометрической границы биллиарда $\partial\Omega$. Это отображение построено в новом симметричном фазовом пространстве $Z = \partial\Omega \times \partial\Omega$ (см. [20, 21]), поэтому существенно отличается от консервативных систем гамильтонового описания биллиарда, например, в биркгофовых координатах [13, 17]. Его можно взять за основу альтернативного описания биллиарда.

Определение 1. *Биллиардом называется специальная динамическая система*

$$T^2 \overset{B}{\to} T^2;\ B := \begin{cases} \bar{u} = v \\ \bar{v} = f(u,v) \end{cases} ;\ \ f_B(u,v) = z_v^{-1}\left(R_{B,v}\left(z_v(u)\right)\right), \tag{1}$$

где f_B представлена композицией взаимообратных замен z и z^{-1} и дробно-рациональной функции R_B:

$$z_v(u) = \frac{(\vec{r}(u) - \vec{r}(v), \vec{e}_x)}{(\vec{r}(u) - \vec{r}(v), \vec{e}_y)} = z_u(v);\ R_{B,v}(z) = \frac{\alpha(v)z + \beta(v)}{\beta(v)z - \alpha(v)} \tag{2}$$

с коэффициентами

$$\alpha(v) = n_x^2(v) - n_y^2(v);\ \beta(v) = 2n_x(v)n_y(v);\ \alpha^2 + \beta^2 = \vec{n}^2 = 1,$$

где $\vec{r} = \vec{r}(v)$ и $\vec{n} = \vec{n}(v)$ — уравнения в декартовых координатах (u,v) границы $\partial\Omega$ и ее нормали в точке отражения $\vec{r}(v)$; $(.,.)$ обозначает скалярное произведение.

Выделим наиболее важные свойства биллиардов.

Следствие 1. *Отображение (1) относится к классу обратимых, т.е. представимых в виде композиции двух отображений $F = L \circ G$ с инволюцией (симметрией) $G \circ G = Id$ (Id — тождественное отображение).*

В данном случае $G := (u, v) \to (v, u)$ — обычная перестановка координат. Тогда $L := (u, v) \to (f_B(u, v), v)$, так что L также является инволюцией, $L \circ L = Id$, т.к. $f_B \circ f_B = R_B \circ R_B = id$ (id — тождественная функция).

Замечание 1. *Обратимость отображения (1) соответствует обратимости (глобальной) во времени траекторий биллиарда. Появление "биллиардной инволюции" f — следствие локальной обратимости этих траекторий (при замене отдельно выбранного падающего луча на отраженный).*

В дальнейшем термин инволюция для f (или f_B) будем понимать в смысле

Определение 2. *Биллиардной инволюцией f называется однопараметрическое семейство обычных инволюций, удовлетворяющих основному свойству*

$$f_v \circ f_v = id \Leftrightarrow f(f(u, v), v) = u\,. \tag{3}$$

Имеют место (подробности см. в [20]) важные

Утверждение 1. *Каждый биллиард однозначно определяется своей (проективной) инволюцией $f_B = z^{-1} \circ R_B \circ z$.*

Утверждение 2. *Для f_B выполнено условие "диагональности"*

$$f_B(u, u) = u\,. \tag{4}$$

Последнее прямо следует из выражений (2). В общем случае для произвольной инволюции $f(u, v)$, удовлетворяющей свойству (3), можно говорить лишь о монотонности ее ограничения на диагональ отображения $\Delta = (u, u)$, т.е. о монотонности функции $d(u) \equiv f(u, u)$. Монотонность d следует из взаимной однозначности и кусочной монотонности инволюции $f_v(u)$, которые вытекают из определения $f \circ f = id$. Специализация (4) означает своеобразное вырождение для биллиардов. Геометрический смысл этого условия в том, что падающий и отраженный лучи совпадают (в асимптотическом пределе) для касательного луча к границе биллиарда.

Важно выделить ковариантность отображения (1) относительно (симметричных) замен переменных вида $u \to u' = \varphi(u)$; $v \to v' = \varphi(v)$ с одной и той же функцией φ. Геометрически — это замены систем отсчета и репараметризация границы биллиарда. Абстрагируясь от выбора координат и обобщая характер инволюции f, введем более широкий класс обратимых отображений, в который входят и собственно биллиарды (1). Новый класс назовем отображениями биллиардного типа (или просто биллиардными).

Определение 3. *Обратимое отображение биллиардного типа F_B в фазовом пространстве Z задается семейством инволюций $f(x,y) = f_y(x)$ и имеет вид*

$$Z \xrightarrow{F_B} Z;\ F_B := \left\{ \begin{array}{lcl} \overline{x} & = & y \\ \overline{y} & = & f(x,y) \end{array} \right. ;\ f(f(x,y),y) = x;\ (x,y) \in Z\,. \qquad (5)$$

Обозначения аргументов x и y далее относятся к абстрактным переменным фазового пространства Z, а не к декартовым координатам на плоскости.

Качественное исследование фазового портрета построенных отображений естественно связать с анализом их нормальных форм $N^{(m)}$ в окрестности m-циклов. Напомним, что

Определение 4. *Циклом m-го порядка (периодической траекторией) отображения F называется множество точек $(x^*,y^*) \in Z$, для которых выполнено*

$$F^k(x^*,y^*) \neq (x^*,y^*);\ 1 \leq k < m;\ F^m(x^*,y^*) = (x^*,y^*)\,. \qquad (6)$$

Циклы первого порядка $m=1$ являются неподвижными точками отображения $Fix(F_B) := \{(x,y) \in Z \mid F_B(x,y) = (x,y)\}$. Каждый цикл более высокого ($m \geq 2$) порядка для отображения F_B одновременно является неподвижной точкой для соответствующей степени $F_B^m = F_B \circ \ldots \circ F_B$ (композиция взята m раз). Поэтому в целом анализ нормальных форм можно свести только к исследованию вблизи неподвижных точек F_B^m.

Ясно, что собственно для биллиардов B имеется прямое соответствие между m-циклами в фазовом пространстве Z и их геометрическими образами.

Замечание 2. *Любая m-периодическая биллиардная траектория с m-отражениями от $\partial\Omega$ соответствует некоторому m-циклу в Z.*

Из-за обратимости системы периодическую траекторию, как и любую другую, можно пройти в двух противоположных направлениях. В фазовом пространстве обращенные траектории соответствуют перестановке координат $x \leftrightarrow y$ и располагаются (могут совпадать друг с другом, как, например, циклы четного порядка) симметрично относительно диагонали $\Delta := \{(x, y) \in Z \mid x = y\}$ — линии симметрии отображения (5), $F_B(\Delta) = \Delta$. Таким образом, имеем

Следствие 2. *Все m-циклы $(m \geq 2)$ биллиардных отображений F_B^m появляются в фазовом пространстве симметричными относительно Δ парами.*

Обозначим общую структуру циклов.

Утверждение 3. *Неподвижные точки биллиардного отображения (5) могут располагаться только на его диагонали*

$$Fix(F_B) = \{(x^*, x^*)\} \subseteq \Delta\,. \tag{7}$$

Это следует из определения Fix и вида $x = y$ одного из уравнений, задающих F_B. Соответствующие координаты $x^* = y^*$ определяются из уравнений

$$f(x^*, x^*) = x^*\,. \tag{8}$$

Назовем их неподвижными точками инволюции f. Для инволюций вида $f = z_y^{-1} \circ R_y \circ z_y$, сводящихся к дробно-рациональным $R_y(z) = (\alpha(y)z + \beta(y))/(\gamma(y)z - \alpha(y))$, неподвижные точки вычисляются (неявно) из системы

$$z^* \equiv z_y(x)\big|_{x=y=x^*} = x^*;\ z^* = \frac{\alpha(z^*) \pm \sqrt{\alpha^2(z^*) + \beta(z^*)\gamma(z^*)}}{\gamma(z^*)}\,. \tag{9}$$

Замечание 3. *Аналогичные выражения можно записать для неподвижных точек степеней F_B^m, т.е. m-циклов отображения. Вместо f (или f_B) в них входит специальная m-кратная "композиция" инволюций $f * \ldots * f$, определенная в Приложении.*

Без труда проверяются

Следствие 3.

1. *Вещественные значения x^* имеют только убывающие инволюции, у которых производная $sign\,(f_x') = -sign\left(\alpha^2 + \beta\gamma\right) < 0$.*

2. *У возрастающей инволюции неподвижные точки отсутствуют.*

3. *Для недиагональной инволюции, у которой $f\mid_\Delta = f(x,x) \neq x$, неподвижные точки отсутствуют. (Можно построить отображения, для которых условие $f(x,x) = x$ выполняется только в конечном числе точек.)*

4. *Все неподвижные точки собственно биллиардов B (1) с условием (4) составляют особую линию, целиком лежащую на диагонали Δ:*

$$f(x,x) = x \Leftrightarrow Fix(B) = (x^*, x^*) \subseteq \Delta\,. \tag{10}$$

Кроме того, циклы биллиардов, за исключением, например, таких как биллиард в круге, в случае общего положения на фазовой плоскости располагаются изолированно. Имея в виду пп. 1) и 2) для содержательного исследования следует остановиться на биллиардных отображениях с убывающей инволюцией, т.е. $f'_x(x,y) < 0$.

Ограничимся рассмотрением систем (5) с аналитической инволюцией и будем предполагать существование m-циклов нужного порядка. Для существования циклов произвольно высокого порядка необходимо, чтобы оператор преобразования фазового пространства не был циклическим, т.е. таким, что некоторая его степень сводится к тождественному преобразованию, $F_B^m \neq Id$. Для класса (1) этим условиям соответствуют биллиарды с кусочно-аналитической (не обязательно выпуклой) границей. Отметим, что свойством полноты циклов заведомо обладает выпуклый биллиард (знаменитая теорема Биркгофа).

Для исследования биллиардных отображений методом нормальных форм предварительно необходимо построить нормальные формы входящих в отображения одномерных инволюций, зависящих от параметра.

3. Нормальная форма биллиардных инволюций

Рассмотрим разложение произвольной аналитической ($f \in C^\infty$; $f = f(x,y) = f_y(x)$) инволюции в степенной ряд. В пределах радиуса сходимости ему соответствует обычное тейлоровское разложение. Для качественного исследования динамической системы важен и сам формальный ряд. В него входят мономы вида $x^p y^q$ ($p \geq 0, q \geq 0$ — произвольные целые числа; $r = p + q$ — порядок монома):

$$f(x,y) = \sum_{i,k} a_{ik} x^i y^k \equiv a_{00} + (a_{10}x + a_{01}y) + (a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2) + \dots\,, \tag{11}$$

где мономы одного и того же порядка собраны вместе, а многоточием здесь и далее обозначаются мономы более высокого порядка. Примем

Определение 5. *Нормальной формой (биллиардной) инволюции называется приведенное (содержащее наименьшее число полиномиальных слагаемых каждого порядка) формальное разложение (11).*

Воспользовавшись условием инволютивности $f(f(x,y),y) = x$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x^0 (\equiv y^0)$; x, y; x^2, xy, y^2 и т.д., получим бесконечную систему уравнений, соответственно,

$$\begin{gathered} a_{00}(1 + a_{10} + a_{00}a_{20} + \ldots) = 0\,; \\ a_{00}(2a_{20} + \ldots) + a_{10}^2 = 1\,; \\ a_{00}(2a_{01}a_{20} + a_{11} + \ldots) + a_{01}(1 + a_{10}) = 0\,; \\ a_{00}(a_{20}(3a_{00}a_{10} + 2a_{20} + \ldots) + \ldots) + a_{10}(1 + a_{10})a_{20} = 0\,; \\ a_{00}(a_{11}(2a_{20} + \ldots) + \ldots) + 2a_{10}(a_{11} + a_{01}a_{20}) = 0\,; \\ a_{00}(a_{11}(3a_{00}a_{10} + 2a_{20} + \ldots) + \ldots) + a_{01}(a_{11} + a_{01}a_{20}) + a_{02}(1 + a_{10}) = 0\,; \cdots, \end{gathered} \tag{12}$$

где разложение было ограничено мономами второго порядка и старшие коэффициенты не выписаны.

В структуре полученных выражений отчетливо выделяются два случая: 1) инволюция со свободным членом, $a_{00} \neq 0$ и 2) свободно действующая инволюция без него, т.е. $a_{00} = 0$ или $f(0,0) = 0$. Укажем, что для биллиарда B вблизи диагонали Δ всегда $f(0,0) = 0$ из-за диагонального условия (3). Однако вне Δ это условие нарушается, если разложение (11) рассматривать в окрестности старших циклов (при этом x и y обозначают малые отклонения от точки цикла с фазовыми координатами x_0 и y_0).

В принципе, преобразованием вида $f(x) \to g(x) = c - f(x)$, $f \circ f = g \circ g = id$ любую инволюцию, для которой $f(0) = c$, можно привести к инволюции без свободного члена, $g(0) \equiv 0$. Отметим, что при этом изменяется характер ее монотонности. Аналогичное справедливо и для инволюции $f(x,y)$, зависящей от параметра, для которой $f(0,y) = c(y)$. Кроме того, если разложение проводится в достаточно малой окрестности выделенной точки (x_0, y_0) (тейлоровское разложение), то к случаю $a_{00} \neq 0$ приводит обычная замена

$$x \to \tilde{x} = x - x_0;\ y \to \tilde{y} = y - y_0;\ f(x,y) \to \tilde{f} = \tilde{f}(\tilde{x},\tilde{y}) = f(x,y) - f(x_0,y_0)\,. \tag{13}$$

Учитывая характер выражений (12), непосредственно проверяются

Утверждение 4. *При $a_{00} = 0$ бесконечная система (12) разрешима.*

Это связано с тем, что при $a_{00} = 0$ выражения (12) образуют рекуррентную систему. При этом в уравнения для коэффициентов, соответствующих фиксированной степени мономов ($r \geq 1$), не входят коэффициенты при более старших степенях ($r' > r$). Это позволяет последовательно разрешать систему и определить явный вид формального разложения (11).

В противном случае, $a_{00} \neq 0$, в соответствующие уравнения входят коэффициенты не только при младших ($r' \leq r$), но и при старших ($r' \geq r$) мономах. Это значит, что отсутствует алгоритм последовательного вычисления бесконечного числа указанных коэффициентов (с переходом от младших к старшим), т.е.

Утверждение 5. *При $a_{00} \neq 0$ система (12) в общем случае неразрешима.*

Однако при малых отклонениях x и y (см.(13)) относительно выделенной точки (x_0, y_0), для которой $f_0 = f(x_0, y_0) = a_{00}$, формальное разложение допустимо, т.к. оно совпадает с тейлоровским. В нем последовательно выписываются слагаемые не выше первого, второго и т.д. порядков малости. В результате для определяющих их коэффициентов приходим к соотношениям

$$a_{00} \neq 0;\ a_{10} = -1;\ a_{20} = a_{11} = 0;\ \ \ldots\,, \tag{14}$$

причем коэффициенты a_{01}, a_{02} при мономах второго порядка могут быть произвольными и т.п. Нормальная форма инволюции f принимает вид

$$f(x,y) - f_0 = -x + (Ay + By^2 + \ldots);\ \ |x - x_0| \ll 1,\ |y - y_0| \ll 1\,. \tag{15}$$

Зависимость от x при степенях старше $r \geq 2$ выпадает. Следовательно, доказана

Лемма 1. *Нормальная форма инволюции f с условием $f(0,0) \neq 0$ имеет вид*

$$f(x,y) = c(y) - x\,. \tag{16}$$

В этом выражении $c(y)$ — произвольная функция аргумента y, которая становится определенной для конкретной инволюции. Отметим также, что надлежащим переносом начальной точки отсюда можно выделить тривиальную убывающую инволюцию $f(x) = -x$. Именно так локально выглядит инволюция биллиардных систем в окрестности регулярных точек (не циклов) отображения.

При $a_{00} = 0$ для нетривиальной инволюции f (отличной от тождественной функции $f(x,x) = x$, для которой только $a_{10} = 1$, а остальные коэффициенты равны нулю $a_{00} = a_{01} = \ldots 0$) из рекуррентной системы (12) получим

$$a_{00} = 0;\ a_{10} = -1;\ a_{11} = -a_{01}a_{20};\ldots\ , \tag{17}$$

где a_{01}, a_{20} и a_{02} — произвольные коэффициенты. Вычисления с сохранением степеней до третьего порядка включительно ($r \leq 3$) приводят к

Лемма 2. *Нормальная форма инволюции f с условием $f(0,0) = 0$ имеет вид*

$$f(x,y) = (-x + Ay) + (Bx^2 - ABxy + Cy^2)$$

$$+ \left[(-B^2)x^3 + (A^2B^2 - BC - AD)xy^2 + Dx^2y + Ey^3\right] + \ldots\ . \tag{18}$$

Произвольные постоянные A, (B,C), (D,E) и т.д. сопутствуют мономам первого, второго, третьего порядков и т.д. в исходном разложении (11). Их конкретные значения зависят от явного вида инволюции. Отметим, что рост числа таких неопределенных постоянных в выражении (18) идет медленнее, чем рост числа возможных мономов одного и того же порядка r. В этом проявляется наличие связей между коэффициентами нормальной формы (18), которые вызваны инволютивностью f.

Разложения (16) и (18) соответствуют строго убывающей инволюции, $f'_x < 0$. У возрастающей инволюции формальное степенное разложение отсутствует. Причина этого топологическая. В самом деле, аналитические инволюции, сводящиеся к дробно-рациональным, $f = z^{-1} \circ R \circ z$, могут быть как возрастающими, так и убывающими функциями в областях своей непрерывности. Однако возрастающая инволюция $R(x) = (ax+b)\,/\,(cx-d)$ не имеет вещественных неподвижных точек, $R(x^*) \neq x^*$, т.к. $sgn\, R'_x = -sgn\,(a^2+bc) < 0$ (см. (5)). В отличие от этого у убывающей инволюции f неподвижных точек, как минимум, две. В то же время именно в достаточно малой окрестности неподвижной точки степенное разложение непрерывной функции становится сходящимся. Отсутствие неподвижных точек у возрастающей (уже не обязательно дробно-рациональной) инволюции означает, что радиус сходимости соответствующих им степенных рядов равен нулю. В смысле тейлоровского разложения возрастающая инволюция в соотвествии с (16) однозначно представима только своей линейной частью и нетривиальных нелинейных зависимостей здесь не возникает.

Для физического биллиарда (с дополнительным условием на инволюцию $f_B(x,x) = x$) получим специализацию

Лемма 3. *Нормальная форма биллиардной инволюции f_B имеет вид*

$$f(x,y) = (-x+2y) + c_1(x-y)^2$$

$$+\left[(-c_1^2)x^3 - (c_1^2+2c_2^2)xy^2 + (2c_1^2+c_2)x^2y + c_2^2y^3\right] + \dots . \qquad (19)$$

Новые коэффициенты c_1, c_2 связаны с коэффициентами разложения (18) соотношениями $A = 2$, $B = C = c_1$, $D = 2B^2 + E$, $E = c_2^2$ и т.д. Нормальная форма (19) справедлива, строго говоря, лишь вблизи диагонали Δ, вдали от остальных циклов отображения. В окрестности фазовых точек (x^*, y^*), входящих в состав $m \geq 2$-циклов для инволюции остается справедливой наиболее общая нормальная форма (18). Разложения (16), (18), и (19) для инволюции, зависящей от параметра, будут использоваться нами для анализа нормальных форм биллиардных систем (5).

Наконец, с помощью полученных нормальных форм для однопараметрических $f_y(x)$ легко вывести нормальную форму для произвольной одномерной инволюции $f(x)$. Полагая в любом из указанных выше выражений $y = 0$, получим

Лемма 4. *Нормальная форма одномерной инволюции соответствует дробно-рациональной инволюции вида*

$$f_N(x) = -x + Cx^2 - C^2x^3 + \ldots + C^n(-x)^{n+1} \ldots \equiv \frac{-x}{1+Cx} . \qquad (20)$$

Здесь $C \gtrless 0$ — единственная неопределенная константа, зависящая от явного вида f в окрестности точки $x_0 = 0$, $x \simeq 0$, причем $f(0) = 0$ и $f(\infty) = -1/C$. Ряд в (20) (геометрическая прогрессия) суммируем внутри круга $\mid x \mid< 1$ при любых C и на границе $\mid x \mid= 1$ при $\mid C \mid< 1$. Нормальная форма (20) согласуется с видом дробно-рациональной инволюции. Действительно, $R(x) = (ax+b)/(cx-a)$. Условие $R(0) = 0$ (свободно действующая инволюция) приводит к $b = 0$. В силу предполагаемой унимодулярности проективного преобразования $a^2 + bc = 1$ следует $a = \pm 1$. Тогда $\tilde{R}(x) = (\pm x)/((c/a)x \mp 1)$. Переобозначая каждый раз константу, получаем нормальную форму $R_N(x) = (-x)/(1+Cx)$. Появление дробно-рациональной функции в качестве нормальной формы (20) для одномерной инволюции не случайно. Эти функции, как и полиномы, образуют всюду плотное (остаточное) множество в пространстве аналитических функций.

4. Выпрямление фазовых траекторий вблизи регулярных точек

Прежде чем исследовать нормальные формы в окрестности m-циклов, убедимся, что в окрестности регулярной точки фазового пространства фазовые траектории спрямляемы подходящей заменой переменных (диффеоморфизмом). Под фазовой траекторией отображения здесь, как и прежде, понимается типичная, т.е. непериодическая (не m-цикл) последовательность точек, полученная из некоторой начальной точки в результате повторения итераций.

Как и для произвольных динамических систем (или дифференциальных уравнений), спрямление отображения означает, что в достаточно малой окрестности неособой точки оно локально диффеоморфно своей линейной части и в соответствующих переменных выглядит как простейшее преобразование из своего класса. Для биллиардов подобным каноническим отображением является отображение, описывающее биллиард в круге. Его можно получить непосредственно, вычислив инволюцию этого биллиарда (см. [20]). В данном случае оно возникает при приведении к нормальному виду биллиардного отображения F_B в окрестности регулярной точки, находящейся вблизи фазовой диагонали Δ.

Зафиксируем регулярную точку с координатами (x_0, y_0). О спрямляемости имеет смысл говорить лишь в ее достаточно малой окрестности, не содержащей m-циклов. Сдвигая начало отсчета, получим отображение в приведенных координатах $u = x - x_0$ и $v = y - y_0$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \overline{u} & = & \alpha_0 + v, \\ \overline{v} & = & \beta_0 + (\mu u + \lambda v) + \alpha u^2 + \beta uv + \gamma v^2 + \ldots \equiv \beta_0 + f(u,v)\,, \end{array}\right. \tag{21}$$

где $\alpha_0 = y_0 - x_0$ и $\beta_0 = f(x_0, y_0) - y_0$; инволюция f представлена рядом (11), а члены более высокого порядка малости по u и v обозначены многоточием. В отличие от случая с неподвижной точкой здесь $\alpha_0 \neq 0$ и $\beta_0 \neq 0$. В соответствии с нормальной формой (16) имеем $f(u,v) = -u + \xi(v)$, причем $\xi(0) \neq 0$, т.к. в новых координатах инволюция содержит свободный член $f(0,0) = -\beta_0 \neq 0$. Отображение примет вид

$$\left\{\begin{array}{rcl} \overline{u} & = & \alpha_0 + v, \\ \overline{v} & = & \beta_0 - u + \alpha_1 v + \alpha_2 v^2 + \alpha_3 v^3 + \alpha_4 v^4 + \ldots\,, \end{array}\right. \tag{22}$$

Вначале достаточно ограничиться вторым порядком малости и все старшие слагаемые отбросить. Выполнив линейную замену

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & A_0 + u, \\ y & = & B_0 + v, \end{array}\right. \tag{23}$$

избавляемся от свободных членов. При учете только квадратичных нелинейностей для этого необходимо: $A_0 - B_0 + \alpha_0 = 0$; $A_0 + (1-\alpha_1)B + \alpha_2 B_0^2 + \beta_0 = 0$, откуда $\alpha_2 A_0^2 + (2 - \alpha_1 + 2\alpha_0\alpha_2) + (\alpha_0(1 - \alpha_1 + \alpha_0\alpha_2) + \beta_0) = 0$. В результате приходим к упрощенной системе

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \overline{x} & = & y, \\ \overline{y} & = & -x + \lambda y + Ay^2 + \dots\,, \end{array} \right. \tag{24}$$

для которой нелинейные слагаемые зависят только от переменной y. Учет отброшенных ранее нелинейных членов не изменит характера преобразованной линейной части. Легко проверить, что при таком ее виде (24) все остальные нелинейные слагаемые можно уничтожить формальными нелинейными степенными заменами вида $x \to x + P_1^k(x, y)$ и $y \to y + P_2^k(x, y)$; $k \geq 2$ (о соответствующей этому процедуре решения гомологического уравнения см. в следующем разделе). Тем самым доказана

Теорема 1. *Нормальная форма биллиардного отображения вблизи регулярной точки фазового пространства определяется линейным отображением*

$$N_\lambda^{reg} := \left\{ \begin{array}{lcl} \overline{x} & = & y \\ \overline{y} & = & -x + \lambda y \end{array} \right. . \tag{25}$$

Это отображение переводит фазовые отрезки, не содержащие точки циклов и проходящие через точку (x, y), в такие же линейные множества

$$line(x, y) \stackrel{N_\lambda^{reg}}{\longrightarrow} line(\overline{x}, \overline{y});\; (x, y) \in Z \setminus \bigcup_{m=1}^{+\infty} Fix(F^m)\,. \tag{26}$$

В чем, собственно, и состоит геометрически спрямляемость фазовых траекторий вблизи регулярной точки.

Семейство (25) включает в себя как частный случай отображение для биллиарда в круге. Этому соответствует значение $\lambda = 2$,

$$B_C := \left\{ \begin{array}{lcl} \overline{u} & = & v \\ \overline{v} & = & 2v - u \end{array} \right. . \tag{27}$$

Заменой $x \to x - y$ и $y \to \frac{x+y}{2}$ последнее можно привести к подробно исследованному одномерному отображению поворота ([13] и др.)

$$\overline{y} = y + C + \dots \quad (\overline{x} = x = C = const)\,. \tag{28}$$

К системе (27) приходим и при анализе отображения в окрестности регулярной точки, находящейся вблизи диагонали Δ. В этом случае близость к диагонали означает существование нетривиальной неподвижной точки у отображения (см. разд. 3), что возможно лишь при условии $\lambda = 2$.

Замечание 4. *Здесь и далее λ фактически определяет сумму собственных значений матрицы линеаризованного отображения в окрестности его неподвижной точки. Случай $\lambda > 2$ означает, что регулярная точка находится вблизи гиперболического (неустойчивого) m-цикла, а при $\lambda < 2$ — вблизи эллиптической периодической траектории.*

Этим анализ регулярного поведения фазовых траекторий в области, свободной от циклов биллиардного отображения, исчерпывается. Содержательным остается поведение отображений только вблизи их циклов. Глобальные свойства системы будут определяться особенностями этого локального поведения.

5. Нормальная форма в окрестности m-цикла

Нормальная форма дает наиболее детальную информацию о локальном поведении отображения и его фазовых траекторий в окрестности m-цикла. Нормализующее преобразование не всегда будет сходящимся. Поэтому ограничимся рассмотрением формальных замен, выявляющих принципиальную структуру резонансных (нелинейных) слагаемых биллиардного отображения (5) и его степеней. От типа резонансов зависят возможные бифуркации биллиарда, следовательно, и сценарии его хаотизации.

Начнем со случая 2-циклов, когда необходимые преобразования легко выполнить в явном виде. Рассмотрим квадрат отображения F_B^2:

$$F_B^2 := \left\{ \begin{array}{lcl} \overline{x} & = & f(x,y) \\ \overline{y} & = & f(y,f(x,y)) \end{array} \right. . \tag{29}$$

Неподвижные точки $Fix(F_B^2)$, отличные от $Fix(F_B)$, составляют искомый 2-цикл для F_B. Координаты его точек (x^*,y^*) и $(y^*,f(x^*,y^*))$ удовлетворяют системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x^* & = & f(x^*,y^*) \\ y^* & = & f(y^*,f(x^*,y^*)) \equiv f(x^*,y^*) \end{array} \right. ; \; x^* \neq y^* . \tag{30}$$

Видно, что в соответствии со свойством обратимости (следствия 1, 2) каждый 2-цикл составляет пара симметричных (относительно диагонали Δ) фазовых точек (x^*,y^*) и (y^*,x^*).

Предварительно докажем два утверждения.

Утверждение 6. *Существуют 2-циклы биллиардных систем трех типов: 1) вырожденный, 2) эллиптический, 3) гиперболический.*

Утверждение 7. *Вблизи любого 2-цикла все квадратичные нелинейные слагаемые можно исключить из нормальной формы F_B.*

Согласно лемме 2 в достаточно малой окрестности 2-цикла убывающая биллиардная инволюция f в переменных $x - x^*$ и $y - y^*$ (без свободного члена) имеет нормальную форму (18). Отсюда следует представление

$$f(x,y) - x^* = -(x - x^*) + \lambda_1(y - y^*)$$

$$+\alpha_1(x - x^*)^2 + \beta_1(x - x^*)(y - y^*) + \gamma_1(y - y^*)^2 + \dots\,; \tag{31}$$

$$f(y, f(x,y)) - y^* = -(y - y^*) + \lambda_2(x - x^*)$$

$$+\alpha_2(y - y^*)^2 + \beta_2(y - y^*)(x - x^*) + \gamma_2(x - x^*)^2 + \dots\,. \tag{32}$$

Коэффициенты разложения выражены через частные производные инволюции

$$\lambda(x,y) = \partial f(x,y)/\partial y;\ \alpha(x,y) = \partial^2 f(x,y)/\partial x^2;\ \gamma(x,y) = \partial^2 f(x,y)/\partial y^2\,,$$

причем

$$\lambda_1 = \lambda(x^*, y^*);\ \lambda_2 = \lambda(y^*, x^*)\,;$$

$$\alpha_1 = \alpha(x^*, y^*); \alpha_2 = \alpha(y^*, x^*);\ \beta_{1,2} = -\lambda_{1,2}\alpha_{1,2};\ \gamma_1 = \gamma(x^*, y^*); \gamma_2 = \gamma(y^*, x^*). \tag{33}$$

В новых переменных $x \to x - x^*$; $y \to y - y^*$ вблизи точки (x^*, y^*) 2-цикла

$$F_B^{2*} := \left\{ \begin{array}{c} \overline{x} = -x + \lambda_1 y + \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \dots\,, \\ \overline{y} = -\lambda_2 x + (\lambda_1\lambda_2 - 1)y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \kappa y^2 + \dots \end{array} \right. , \tag{34}$$

для которого выписаны только квадратичные слагаемые. Независимыми параметрами выступают $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$, а также другие коэффициенты

$$\delta = \lambda_2\alpha_1 + \gamma_2;\ \varepsilon = -2\lambda_1\gamma_2 + \lambda_2\beta_1 - \beta_2;\ \kappa = \lambda_1^2(\beta_2 + \gamma_2) + \lambda_2\gamma_1 + \alpha_2;\ \dots\,. \tag{35}$$

В окрестности симметричной точки (y^*, x^*) отображение выглядит аналогично (35), но с заменой

$$(x^*, y^*) \leftrightarrow (y^*, x^*) \Leftrightarrow \lambda_1 \leftrightarrow \lambda_2;\ \{\alpha_1, \beta_1\gamma_1; \dots\} \leftrightarrow \{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \dots\}\,. \tag{36}$$

Линейная часть полученного отображения в обоих случаях одинакова

$$L_B^{(2)} := \left\{ \begin{array}{c} \overline{x} = -x + \lambda_1 y \\ \overline{y} = -\lambda_2 x + (\lambda_1\lambda_2 - 1)y \end{array} \right. \equiv \hat{L} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};\ \hat{L} = \begin{pmatrix} -1 & \lambda_1 \\ -\lambda_2 & (\lambda_1\lambda_2 - 1) \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Собственные значения матрицы $\hat{L}$ соответствуют локально консервативному отображению (см. Приложение),

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}\left[(\lambda_1\lambda_2 - 2) \pm \sqrt{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1\lambda_2 - 4)}\right];$$

$$\det \hat{L} = \lambda_+\lambda_- = 1;\ Sp\,\hat{L} = \lambda_+ + \lambda_- = \lambda_1\lambda_2 - 2\ . \qquad (38)$$

Из вида линейной части и соотношений (38) следует классификация 2-циклов в зависимости от характера собственных значений матрицы $\hat{L}$:

$$1)\ \lambda_+ = \lambda_- = 1\ \ (\lambda_1 = \lambda_2 = 4);\ \ \ \lambda_+ = \lambda_- = -1\ \ (\lambda_1\lambda_2 = 0);$$

$$2)\ \lambda_+ = \lambda_-^* = \exp(i\varphi) \in C\ \ (0 < \lambda_1\lambda_2 < 4);$$

$$3)\ |\lambda_-| < 1 < |\lambda_+|\ \ (\lambda_1\lambda_2 > 4)\ . \qquad (39)$$

Перечисленные случаи соответствуют указанным в формулировке утверждения 6. На этом его доказательство закончено.

Для инволюции биллиарда B (1) выполняются соотношения [21]

$$sign\,[\lambda(x,y)] = sign\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right] = sign\,\hat{K}(y)\ . \qquad (40)$$

Поэтому справедливо

Следствие 4.

1. *2-циклы, соответствующие хордам, которые соединяют участки $\partial\Omega$ с противоположным знаком кривизны $\hat{K}$, всегда гиперболические.*

2. *Периодическая траектория, проходящая через точку перегиба $\partial\Omega$ (где $\hat{K} = 0$), соответствует вырожденному циклу типа $\lambda_+ = \lambda_- = -1$.*

Существует другой тип вырождения $\lambda_+ = \lambda_- = 1$, который аналогичен вырождению (нейтральной устойчивости) в круговом биллиарде, все 2-циклы которого суть диаметры круга. Оба типа вырождения 2-циклов всегда можно снять малым шевелением $\partial\Omega$.

Обратимся к нелинейной части отображения (34). Выполним нелинейную замену в духе нормальных форм Пуанкаре

$$x = u + au^2 + buv + cv^2 + \dots\ ;\ y = v + du^2 + euv + kv^2 + \dots \qquad (41)$$

с произвольными коэффициентами a, b, c и d, e, k.

Отметим важное обстоятельство. Правые части системы (34) после переноса начала отсчета в точку 2-цикла, содержат новые инволюции без свободного члена, т.е. обращающиеся в нуль при $x = y = 0$. Они отличаются от исходных инволюций $f_y(x)$ и $f_f(y)$, так как преобразование вида $f(z) \to g(z) = C + f(z - C)$ (C – постоянная), для которого $f \circ f = g \circ g = id$, изменяет вид исходной инволюции. Новые инволюции уже не удовлетворяют диагональному условию, $g(x, x) \neq x$. Из-за этого, в частности, невозможна полная линеаризация (34) нелинейными заменами, как это имеет место вблизи диагонали отображения Δ (в данной работе это несложное доказательство опущено). С другой стороны, так как свойство диагональности утеряно и в правую часть (34) входят произвольные инволюции, то в качестве нормализующих допустимо использовать более широкий класс нелинейных замен переменных, лишь бы они сохраняли инволютивную структуру отображения. Как будет видно, условие инволютивности действительно сохраняется при подобных заменах вида (41). Это позволяет оставаться в рамках теории нормальных форм Пуанкаре без каких-либо дополнительных ограничений. Указанная геометрическая "свобода" проявляется в существовании резонансов, соответствующих мономам третьего и более высоких порядков в нормальной форме биллиардного отображения.

В результате замены (41) система (34) примет вид

$$F_B^{(2)*} := \left\{ \begin{array}{lcl} \overline{u} & = & (-u + \lambda_1 v) + Au^2 + Buv + Cv^2 + \dots \\ \overline{v} & = & [-\lambda_2 u + (\lambda_1\lambda_2 - 1)v] + Du^2 + Euv + Kv^2 + \dots \end{array} \right. , \tag{42}$$

где отброшены мономы старших порядков. (По построению, для всех отображений вблизи 2-цикла имеем $u = o(1)$ $v = o(1)$.) Параметры, определяющие нелинейную часть, удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\begin{array}{lcc} A & = & \alpha + (-2a - \lambda_2 b - \lambda_2^2 c + \lambda_1 d) \\ B & = & \beta + (2\lambda_1 a + 2(\lambda_1\lambda_2 - 1)b + 2\lambda_2(\lambda_1\lambda_2 - 1)c + \lambda_1 e) \\ C & = & \gamma + (-\lambda_1^2 a - \lambda_1(\lambda_1\lambda_2 - 1)b - ((\lambda_1\lambda_2 - 1)^2 + 1)c + \lambda_1 k) \\ D & = & \delta + (-\lambda_2 b + (\lambda_1\lambda_2 - 2)d - \lambda_2 e - \lambda_2^2 k) \\ E & = & \varepsilon + (-\lambda_2 b + 2\lambda_1 d + (3\lambda_1\lambda_2 - 2)e + 2\lambda_1(\lambda_1\lambda_2 - 1)k) \\ K & = & \kappa - (\lambda_2 c + \lambda_1^2 d + \lambda_1(\lambda_1\lambda_2 - 1)e + (\lambda_1\lambda_2 - 1)(\lambda_1\lambda_2 - 2)k) \end{array} . \tag{43}$$

Разрешимость системы (43) при наложении условия $A = B = C = D = E = K = 0$ гарантирует уничтожение нелинейных слагаемых второго порядка в уравнениях (42). В базисе собственных векторов

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \overline{x} & = & \lambda_+ x + \dots \\ \overline{y} & = & \lambda_- y + \dots \end{array} \right. \tag{44}$$

решение системы (43) сильно упрощается

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} A & = & -\frac{\tilde{\alpha}\lambda_-}{1-\lambda_+}; & B & = & -\frac{\tilde{\beta}\lambda_-}{1-\lambda_-}; & C & = & -\frac{\tilde{\gamma}\lambda_-}{1-\lambda_-^3}; \\ D & = & -\frac{\tilde{\delta}\lambda_+}{1-\lambda_+^3}; & E & = & -\frac{\tilde{\varepsilon}\lambda_+}{1-\lambda_+}; & K & = & -\frac{\tilde{\kappa}\lambda_+}{1-\lambda_-}, \end{array}\right. \tag{45}$$

где тильдованные величины относятся к отображению (42) после диагонализации его линейной части. Условие нерезонансности (разрешимости) очевидно

$$\lambda_\pm \neq 1 \Leftrightarrow \{\lambda_1 \neq 2;\ \lambda_2 \neq 2\}. \tag{46}$$

Вырожденный случай $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ соответствует двум возможностям. Во-первых, выходу на диагональ Δ, где происходит скопление и слияние 2-циклов и циклов старших порядков в особую линию из неподвижных точек биллиардного отображения. Или, во-вторых, поведение, близкое к динамике траекторий кругового биллиарда, любая степень B_C^m $(m \geq 1)$ которого имеет вид (вблизи соответствующего m-цикла):

$$B_C^{(m)*} := \left\{\begin{array}{lll} \overline{x} & = & -(m-1)x + my \\ \overline{y} & = & -mx + (m+1)y \end{array}\right. . \tag{47}$$

В обоих указанных случаях $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, но определитель системы (43), по-прежнему, отличен от нуля и равен $\det = -2^{11}$. Это позволяет разрешить данную систему. Следовательно, при любых параметрах (λ_1, λ_2) исследуемые нелинейности уничтожаются. Таким образом, доказано утверждение 7 о том, что подходящей заменой из нормальной формы можно исключить все квадратичные слагаемые (резонансы).

Дальнейшие упрощения при сокращении нерезонансных слагаемых удобнее проводить методом гомологического уравнения (см., напр., [23]). Условия на резонансы отображения (42) примут вид

$$\left[\begin{array}{lll} \lambda_+ & = & \lambda_+^{p_1}\lambda_-^{p_2} \\ \lambda_- & = & \lambda_+^{q_1}\lambda_-^{q_2} \end{array}\right. ;\ \left[\begin{array}{lll} p_1 + p_2 & \geq & 2 \\ q_1 + q_2 & \geq & 2 \end{array}\right. ;\ \{p_{1,2}; q_{1,2}\} \in Z_+. \tag{48}$$

Используя требование $\lambda_+\lambda_- = 1$ из (38), приведем условия (48) к следующему виду:

$$1)\ \lambda_+ = \lambda_- \equiv 1 \quad \Longrightarrow \quad \{p_{1,2}, q_{1,2}\} \text{ произвольные;}$$

$$2)\ \lambda_+ \neq \lambda_-;\ \{\lambda_+, \lambda_-\} \text{ произвольные} \quad \Longrightarrow \quad p_1 = p_2 + 1;\ q_2 = q_1 + 1\,. \tag{49}$$

Первый случай опять вырожденный $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, но, как легко показать, при этом нелинейность может быть отодвинута в сколь угодно высокий порядок разложения по степеням отклонения от 2-цикла. Такая же ситуация имеет место вблизи диагонали отображения. Второй случай описывает возможные резонанасные соотношения. Отсюда для квадрата отображения F_B^2 (вблизи неподвижных $Fix(F_B^2)$) или для F_B (вблизи 2-циклов) получим

Теорема 2. *Нормальная форма биллиарда вблизи 2-циклов имеет вид*

$$N_B^{(2)} := \left\{ \begin{array}{lcr} \overline{x} & = & -x + \lambda_1 y + xP_1(xy) \\ \overline{y} & = & -\lambda_2 x + (\lambda_1\lambda_2 - 1)y + yP_2(xy) \end{array} \right. , \tag{50}$$

где $P_1(z)$ и $P_2(z)$ – произвольные полиномы без свободного члена и линейной части, т.е. $P_{1,2}(0) = P_1'(0) = 0$ (штрих обозначает дифференцирование).

Исследование отображения вблизи произвольных m-циклов старшего порядка ($m \geq 3$) проводится совершенно аналогично. Общий вид полученной нормальной формы (50) сохранится. Сохраняется и классификация циклов (утверждение 6). Характер устойчивости определяется коэффициентами линейной части нормальной формы отображения. В результате получаем основную в данной работе

Теорема 3. *Нормальная форма биллиарда вблизи m-циклов имеет вид*

$$N^{(m)} := \left\{ \begin{array}{lcr} \overline{x} & = & -\mu_{m-1}x + \nu_{m-1}y + xP(xy) \\ \overline{y} & = & -\mu_m x + \mu_m y + yQ(xy) \end{array} \right. . \tag{51}$$

Здесь μ_p и ν_p (с индексом $p = \{m-1, m\}$) выражаются через коэффициенты линейной части разложения инволюции f в окрестности k-ой точки ($1 \leq k \leq p \leq m$) m-цикла с выделенной начальной точкой ($x_1 = x^*, x_2 = y^*$) (см. Приложение). При этом $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 1$; $\nu_0 = 1$, $\nu_1 = \lambda_1$. Вид формы (51), по-прежнему, связан с (локальной, вблизи точек цикла) консервативностью отображения F_B, для которого $\det(L_B^{(m)}) = \mu_m\nu_{m-1} - \nu_m\mu_{m-1} = 1$.

Универсальная нормальная форма (51) позволяет исследовать сценарии возможных бифуркаций в окрестности произвольной периодической траектории любого периода для биллиарда с гладкой границей (или близкой системы) при деформациях последней. В заключение отметим, что из нормальной формы (51) можно было бы получить нормальную форму Биркгофа [13], если наложить дополнительное условие консервативности отображения и затем перейти к комплексно-сопряженным координатам. Консервативности можно также добиться нормализующим преобразованием, переходя от отображения, сохраняющего меру, к отображению, сохраняющему площадь. Локально такое преобразование всегда существует. Преимущество полученной нормальной формы в ее общности, универсальности и симметричности. Она пригодна вблизи цикла произвольного порядка и произвольного типа. Эти особенности связаны с тем, что использовались принципиальные свойства биллиардов — обратимость (инволютивность) и проективность (сводимость инволюций к убывающим дробно-рациональным функциям).

6. Заключение

Среди результатов работы наиболее принципиальными являются теорема 3 и полученная нормальная форма биллиардного отображения вблизи циклов произвольного порядка (51). В областях фазового пространства, не содержащих указанных особенностей, отображение приводится к стандартной форме отображения поворота. В окрестности циклов возможны два типа движения — эллиптическое, с сохранением первоначальной близости к точкам цикла (захват траекторий биллиарда между их каустиками или каустиками и границей), и гиперболическое – с удалением от точек цикла (дефокусировка или рассеивание узких пучков лучей биллиарда). В зависимости от деформации формы границы и смены типа циклов (периодических траекторий) может происходить перестройка от регулярного поведения к хаотическому. Полученные нормальные формы смогут обьяснить возможные сценарии этого, включая перестройки с нарушением топологии фазового пространства, в частности, при появлении лакун и разрушении траекторий "шепчущих галерей". Они же пригодны для анализа динамики и фазового портрета других динамических систем, близких к биллиардам и описываемых обратимыми отображениями вида (5).

Приложение

Динамические системы биллиардного типа, описываемые отображениями вида (1) или (5), относятся к сохраняющим меру преобразованиям. Действительно, для инвариантной меры μ отображения B имеем $\mu = F_B\mu$. Ее плотность ρ, $d\mu = \rho\, dxdy$, подчиняется уравнению типа Фробениуса–Перрона [26]. С учетом явного вида F_B получим

$$\rho\,(x,y) = \int\, \rho(x',y')\;\delta(x-y')\;\delta(y-f(x',y'))\;dx'dy'\,. \tag{52}$$

Инволюция $f = f_y(x)$ является монотонной и кусочно-непрерывной (и дифференцируемой) функцией (доказательство использует лишь основное свойство $f \circ f = id$). Для биллиардов она будет строго убывающей, $\partial f(x,y)/\partial x < 0$. Используя свойства δ-функции Дирака и взаимно-однозначность инволюции, приведем уравнение (52) к виду

$$\rho(x,y) = \rho(f(y,x),\; x)\;\;\left|\frac{\partial f(y,x)}{\partial y}\right|\,. \tag{53}$$

Фазовый каскад в целом симметричен относительно диагонали отображения $\Delta(x=y)$. Поэтому симметричной будет и инвариантная плотность ρ в фазовом пространстве

$$\rho(x,y)=\rho(y,x)\,. \tag{54}$$

Отсюда после замены переменных в выражении (53) приходим к условию

$$\rho(x,y)=\rho(y,f(x,y))J(x,y)\,, \tag{55}$$

где $J(x,y)=\partial(\bar{x},\bar{y})/\partial(x,y)=-\partial f(x,y)/\partial x>0$ – якобиан исходного отображения. Переписанное в виде

$$J(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{\rho(\bar{x},\bar{y})};\ \Leftrightarrow J(z)=\frac{\rho(z)}{\rho(F_B z)};\ z\in Z;\ Z\overset{F_B}{\to}Z\,, \tag{56}$$

оно и означает определение сохраняющего меру отображения.

Биллиардное отображение не является строго консервативным, $J(z)\neq 1$, за исключением вырожденного случая для биллиарда на окружности. Вместе с тем линейная часть любой степени отображения F_B^m в окрестности неподвижной точки (или линейная часть F_B вблизи своего m-цикла) оказывается консервативным отображением.

Рассмотрим разложение инволюции f и ее специальных композиций

$$f^{(k)}=\underbrace{f*\ldots*f}_{k};\ f^{(1)}\equiv f;\ f^{(2)}=(f*f)(x,y)\equiv f(y,f(x,y)) \tag{57}$$

вблизи m-цикла с выделенной начальной точкой (x^*,y^*), т.е. вблизи m-периодической траектории $(x_1=x^*,\ x_2=y^*,\ x_3=f(x^*,y^*),\ \ldots,\ x_m=f^{(m-2)}(x^*,y^*))$. В приведенных координатах $u=x-x^*$ и $v=y-y^*$ для соответствующих степеней F_B получим

$$F_B^* := \left\{ \begin{array}{c} \overline{u}=v \\ \overline{v}=-u+\lambda_1 v+\ldots \end{array} \right.;\ \ \lambda_1=\frac{\partial f(x^*,y^\star)}{\partial y^\star}\,; \tag{58}$$

$$F_B^{(2)*} = \left\{ \begin{array}{c} \overline{u}=-u+\lambda_1 v+\ldots \\ \overline{v}=-\lambda_2 u+(\lambda_1\lambda_2-1)v+\ldots \end{array} \right.;\ \ \lambda_2=\left.\frac{\partial f(y^*,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=f(x^*,y^*)}; \tag{59}$$

$$F_B^{(3)*} = \left\{ \begin{array}{c} \overline{u}=-\lambda_2 u+(\lambda_1\lambda_2-1)v+\ldots \\ \overline{v}=-(\lambda_1\lambda_2-1)u+(\lambda_3(\lambda_1\lambda_2-1)-\lambda_1)v+\ldots \end{array} \right.;$$

$$\lambda_3=\left.\frac{\partial f(f(x^*,y^*),\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=f(y^*,f(x^*,y^*))}\,. \tag{60}$$

Общая структура этих выражений такова, что, если $F_B^{(k)}$ $(k \geq 1)$ имеет линейную часть вида

$$L_B^{(k)} = \begin{cases} \overline{u} = -\alpha u + \beta v + \dots \\ \overline{v} = -\gamma u + \delta v + \dots \end{cases}, \qquad (61)$$

то следующая итерация $B^{(k+1)}$ вблизи точки цикла приводит к отображению вида

$$F_B^{(k+1)*} = \begin{cases} \overline{u} = -\tilde{\alpha} u + \tilde{\beta} v + \dots \\ \overline{v} = -\tilde{\gamma} u + \tilde{\delta} v + \dots \end{cases} ; \left[\begin{array}{c} \tilde{\alpha} = \gamma, \ \tilde{\beta} = \delta \, ; \\ \tilde{\gamma} = (-\alpha + \gamma \tilde{\lambda}) \, ; \\ \tilde{\delta} = (-\beta + \delta \tilde{\lambda}) \, , \end{array} \right. \qquad (62)$$

где $\lambda = \lambda_k$ и $\tilde{\lambda} = \lambda_{k+1}$ определяют коэффициенты тейлоровского разложения инволюции в окрестности точек m-цикла (x_{k-1}, x_k) и (x_k, x_{k+1}), соответственно,

$$\lambda_k = \left. \frac{\partial f^{(k)}(x,y)}{\partial \varepsilon} \right|_{x=x^*, y=y^*} ; \ \varepsilon = f^{(k-1)}(x,y) \, ; \qquad (63)$$

$$f^{(k)}(x,y) = (f * \dots * f)(x,y) = f^{(k)}(x^*, y^*) -$$

$$- \left[f^{(k-2)}(x,y) - f^{(k-2)}(x^*, y^*) \right] + \lambda_k \left[f^{(k-1)}(x,y) - f^{(k-1)}(x^*, y^*) \right] + \dots \, . \qquad (64)$$

Якобиан линеаризованного преобразования $L_B^{(k+1)}$ в окрестности точки цикла (x^*, y^*) равен

$$J[L_B^{(k+1)}](x,y) = \begin{vmatrix} -\tilde{\alpha} & \tilde{\beta} \\ -\tilde{\gamma} & \tilde{\delta} \end{vmatrix} = \gamma\beta - \alpha\delta = J[L_B^{(k)}](x,y) \equiv J_k \, . \qquad (65)$$

Отсюда по индукции следует, что все такие отображения являются консервативными, так как $J_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda_1 \end{vmatrix} = 1$. Значения якобианов $J_{k \leq m}$ не зависят от выбора начальной точки (x^*, y^*) для m-цикла, поэтому

$$J_m = J_1^m = 1; \ m \geq 1 \, . \qquad (66)$$

Список литературы

[1] *G. Benettin and J.-M. Strelcyn*, Numerical experiments on the free motion of a point mass moving in a plane convex region: stochastic transition and entropy. — *Phys. Rev. A* (1978), v. 17, No. 2, p. 773–785.

[2] *M. Robnik and M.V. Berry*, Classical billiards in magnetic fields. — *J. Phys. A* (1985), v. 18, p. 1361.

[3] Proc. of Symp. on classical and quantum billiards. — *J. Stat. Phys.* (1996), v. 83, No. 1–2, p. 1–400.

[4] *L. Bunimovich, G. Casati and I. Guarneri*, Chaotic focusing billiards in higher dimensions. — *Phys. Rev. Lett.* (1996), v. 77, p. 2941–2945.

[5] *Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев*, Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности. Наука, Москва (1988).

[6] Современные проблемы математики. Фундаментальные направления (науч. ред. серии Р.В. Гамкрелидзе). Динамические системы. Т. 2 (ред.-конс. Я.Г. Синай). Изд-во ВИНИТИ, Москва (1985).

[7] *M.G. Gutzwiller*, Chaos in classical and quantum mechanics. Springer–Verlag, New York (1990).

[8] *T. Guhr, A. Muller-Groeling and H.A. Weidenmuller*, Random-matrix theories in quantum physics: common concepts. — *Phys. Rep.* (1998), v. 299, p. 189–428.

[9] *C.M. Marcus, A.J. Rimberg et al.*, Conductance fluctuations and chaotic scattering in ballistic microstructures. — *Phys. Rev. Lett.* (1998), v. 69, p. 506–510.

[10] *C. Ellegaard, T. Ghur, K. Lindemann et al.*, Spectral statistics of acoustic resonances in aluminum blocs. — *Phys. Rev. Lett.* (1995), v. 75, p. 1546–1550.

[11] *H. Alt, H.D. Graf, R. Hofferbert et al.*, Chaotic dynamics in a three-dimensional superconductiving microwave billiard. — *Phys. Rev. E* (1996), v. 54, p. 2303–2312.

[12] *J.U. Nocel, A.D. Stone*, Ray and wave chaos in assymmetric resonant optical cavities. — *Nature* (1997), v. 385, p. 45–50.

[13] *Дж. Биркгоф*, Динамические системы. Удмуртск. университет, Ижевск (1999).

[14] *Н.С. Крылов*, Работы по обоснованию статистической физики. Изд-во АН СССР, Москва (1950).

[15] *Я.Г. Синай*, Динамические системы с упругими отражениями. — *Успехи мат. наук* (1970), т. 25, № 2, с. 141–192.

[16] *Л.А. Бунимович*, О бильярдах, близких к рассеивающим. — *Мат. сб.* (1974), т. 95, № 1, с. 49–73.

[17] *В.Ф. Лазуткин*, Выпуклый биллиард и собственные функции оператора Лапласа. — Изд-во ЛГУ, Ленинград (1981), 196 с.

[18] *С. Табачников*, Внешние биллиарды. — *Успехи мат. наук* (1993), т. 48, № 6, с. 75–102.

[19] *E. Gutkin*, Billiards in poligons: survey of recent results. — *J. Stat. Phys.* (1996), т. 83, № 1–2, p. 7–26.

[20] *С.В. Найденов, В.В. Яновский*, Геометро-динамический подход к биллиардным системам. I. Проективная инволюция биллиарда. Прямая и обратная задачи. — *Теор. мат. физика* (2001), т. 126, № 1, с. 110–124.

[21] *С.В. Найденов, В.В. Яновский*, Геометро-динамический подход к биллиардным системам. II. Геометрические особенности инволюций. — *Теор. мат. физика* (2001), т. 129, № 1, с. 116–130.

[22] *J.A.G. Roberts, G.R.W. Qwispel*, Chaos and time-reversal symmetry. Order and chaos in reversible dynamical systems. — *Phys. Rep.* (1992), v. 216, p. 1–177.

[23] *V.I. Arnol'd*, Reversible systems. — In: Nonliner and turbulent processes in physics (1984) (Ed. R.Z. Sagdeev, Harwood, Chur), vol. 3, p. 1161.

[24] *M.B. Sevryuk*, Reversible systems. Lecture notes in mathematics. Vol. 1211. Springer, Berlin (1986).

[25] *В.И. Арнольд*, Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Наука, Москва (1978).

[26] *Г. Шустер*, Детерминированный хаос. Введение. Мир, Москва (1988).

Normal forms of billiards

S.V. Naydenov and V.V. Yanovsky

The theory for normal billiard forms as a new class of reversible dynamic systems with projective involution is created. The qualitative analysis is carried out for regular points of billiard mapping that are close to the cycles of arbitrary order and about the diagonal of symmetric phase space.