Математическая физика, анализ, геометрия
2003, т. 10, № 1, с. 3–11

О специальных изометрических погружениях областей пространства Лобачевского в евклидово пространство

Ю.А. Аминов[1,2], О.А. Тихонова[1]

[1] *Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины пр. Ленина, 47, Харьков, 61103, Украина*

E-mail:aminov@ilt.kharkov.ua

[2] *Institute of Mathematics, Bialystok University 2 Akademicka Str., 15-267, Bialystok, Poland*

E-mail:aminov@cksr.ac.bialystok.pl

Статья поступила в редакцию 10 апреля 2002 г.

Представлен способ построения изометрических погружений областей $(n+1)$-мерного пространства Лобачевского в $(p+2)$-мерное евклидово пространство в виде надстройки над n-мерным подмногообразием постоянной кривизны, лежащим в p-мерной сфере.

Представлено спосіб побудови ізометричних занурень областей $(n+1)$-вимірного простору Лобачевського в $(p+2)$-вимірний євклідів простір у вигляді надбудови над n-вимірним підмноговидом постійної кривизни, що лежить у p-вимірній сфері.

В теории изометрических погружений пространства Лобачевского L^n в евклидово пространство E^m особое внимание уделяется вопросу о возможности погружения L^n в виде подмногообразия со специальными свойствами. Так, например, Ф. Шуром было предложено погружение области L^n в E^{2n-1} в виде аналога псевдосферы. Д. Блануша построил погружение полной плоскости Лобачевского L^2 в E^6, а Э.Р. Розендорн — погружение полной L^2 в E^5 в виде регулярной поверхности класса C^∞ [1]. К. Тененблат и М. Рабело ввели класс погружений областей пространства Лобачевского в форме тороидальных подмногообразий [2]. Далее этот класс исследовался в работе [3]. Обзор работ по изометрическим погружениям пространства Лобачевского дан в книге Ю.А. Аминова [7] и в статье А.А. Борисенко [8].

Mathematics Subject Classification 2000: 53A07.

В работе [4] нами был построен пример специального погружения области пространства Лобачевского L^3 в E^6 такой, что каждое сечение этого подмногообразия с гиперплоскостью $x^6 = const$ является поверхностью Веронезе.

1. Теперь рассмотрим более общий случай — погружение L^{n+1} в E^{p+2} специального вида. Обозначим через $e_1, \ldots, e_{p+2}$ ортонормированный базис в E^{p+2}.

Теорема 1. *Пусть n-мерное многообразие с постоянной кривизной k_0 изометрически погружено в единичную сферу $S^p \subset E^{p+1}$ в виде подмногообразия F^n с радиус-вектором $\rho = \rho(u_1, \ldots, u_n)$.*

Некоторая область пространства Лобачевского L^{n+1} регулярно и изометрически погружается в евклидово пространство E^{p+2} в виде подмногообразия F^{n+1} с радиус-вектором

$$r(u_1, \ldots, u_n, t) = f_1(t)\rho(u_1, \ldots, u_n) + f_2(t)e_{p+2} \tag{1}$$

тогда и только тогда, когда $k_0 < 1$.

Будем называть F^n базой, а F^{n+1} — надстройкой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем на F^n ортогональные координаты u_i. Тогда

$$(\rho_{u_i}, \rho_{u_j}) = 0, \quad i \neq j. \tag{2}$$

Обозначим ${\rho_{u_i}}^2 = {h_i}^2$. Проверим, что координаты $u_1, \ldots, u_n, t$ — ортогональные на F_{n+1}. Для этого вычислим касательные векторы к F^{n+1}:

$$r_{u_i} = f_1 \rho_{u_i}, \quad i \leq n,$$
$$r_t = f_1' \rho + f_2' e_{p+2}$$

(здесь штрих обозначает дифференцирование по t) и найдем коэффициенты первой квадратичной формы

$$g_{ii} = (r_{u_i}, r_{u_i}) = {f_1}^2 {\rho_{u_i}}^2 = {f_1}^2 {h_i}^2, \quad i \leq n,$$
$$g_{n+1 n+1} = (r_t, r_t) = {f_1'}^2 + {f_2'}^2,$$
$$g_{ij} = f_1 f_1' \rho \rho_{u_i} = 0, \quad i \leq n, j = n+1,$$

т.к. $\rho^2 = 1$.

Обозначим $g_{ii} = {f_1}^2 {h_i}^2 = {H_i}^2, \quad i \leq n$.

Пусть t — параметр длины дуги кривой $f_1(t), f_2(t)$ на плоскости f_1, f_2, тогда

$${f_1}'^2 + {f_2}'^2 = 1 \tag{3}$$

и $g_{n+1n+1} = 1 = H^2_{n+1}$. Для ортогональных координат существуют формулы для компонент тензора Римана [5]:

$$R_{ijij} = -H_iH_j\left[\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\partial H_j}{H_i\partial u_i}\right) + \frac{\partial}{\partial u_j}\left(\frac{\partial H_i}{H_j\partial u_j}\right) + \sum_{l=1}^{n+1}\frac{1}{H_l^2}\frac{\partial H_i}{\partial u_l}\frac{\partial H_j}{\partial u_l}\right],$$
$$i \neq j, \quad l \neq i, j, \tag{4}$$

$$R_{ijkj} = -H_j\left[\frac{\partial^2 H_j}{\partial u_i\partial u_k} - \frac{\partial H_j}{\partial u_k}\frac{\partial H_k}{H_k\partial u_i} - \frac{\partial H_j}{\partial u_i}\frac{\partial H_i}{H_i\partial u_k}\right], i \neq k \neq j. \tag{5}$$

Запишем уравнения Гаусса для F^{n+1}, кривизна которого равна -1:

$$R_{ijkl} = -1(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \tag{6}$$

Рассмотрим уравнения группы (4) (случай $i, j \leq n$):

$$R_{ijij} = -f_1^2h_ih_j\left[\frac{\partial}{\partial u_i}\frac{\partial h_j}{h_i\partial u_i} + \frac{\partial}{\partial u_j}\frac{\partial h_i}{h_i\partial u_j} + \sum_{l=1}^{n}\frac{1}{{h_l}^2}\frac{\partial h_i}{\partial u_l}\frac{\partial h_j}{\partial u_l} + \frac{\partial(f_1h_i)}{\partial t}\frac{\partial(f_1h_j)}{\partial t}\right],$$
$$l \neq i, j.$$

С другой стороны, можно записать

$$-h_ih_j\left[\frac{\partial}{\partial u_i}\frac{\partial h_j}{h_i\partial u_i} + \frac{\partial}{\partial u_j}\frac{\partial h_i}{h_i\partial u_j} + \sum_{l=1}^{n}\frac{1}{{h_l}^2}\frac{\partial h_i}{\partial u_l}\frac{\partial h_j}{\partial u_l}\right] = k_0h_i^2h_j^2, \quad l \neq i, j.$$

Тогда можем переписать R_{ijij} в виде

$$R_{ijij} = f_1^2k_0h_i^2h_j^2 - f_1^2h_i^2h_j^2{f_1'}^2, \quad i, j \leq n.$$

Используя (6), имеем

$${f_1'}^2 = k_0 + f_1^2. \tag{7}$$

Рассмотрим случай $i \leq n$, $j = n+1$:

$$R_{in+1in+1} = -f_1h_i^2f_1''.$$

Используя (6), получаем

$$f_1'' = f_1. \tag{8}$$

Уравнения группы (5) выполнены тождественно.

Найдем явные выражения для наших функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Решая уравнение (8), получим

$$f_1(t) = Ae^t + Be^{-t},$$

где A и B — постоянные. Далее находим $f_2(t)$:

$$f_2(t) = \int\limits_0^t \sqrt{1 - {f_1'}^2(\tau)}d\tau + const.$$

Подставляя $f_1(t)$ в (7), получим

$$AB = -\frac{k_0}{4}.$$

Рассмотрим ограничения на k_0: из (3) и (7) имеем

$$k_0 = 1 - {f_2'}^2 - f_1^2.$$

Отсюда следует $k_0 \leq 1$.

Может ли достигаться равенство? Равенство будет в том и только в том случае, если одновременно и $f_1 = 0$, и $f_2' = 0$, что противоречит (3). Поэтому равенство не может достигаться.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Так как функции f_1 и f_2 удовлетворяют тем же уравнениям, что и в предыдущей работе [4], то подобным методом получаем оценку размеров области нашего регулярного погружения. А именно, длина интервала изменения параметра t, при котором поверхность будет регулярной, равна

$$l = \frac{1}{2} ln \frac{2 - k_0 + 2\sqrt{1 - k_0}}{2 - k_0 - 2\sqrt{1 - k_0}}.$$

Напомним, что параметр t является длиной дуги вдоль $n + 1$ координатной линии.

Если $k_0 > 0$, то построенное подмногообразие имеет вид катушки с одной конической сингулярной точкой между двумя границами.

Если $k_0 < 0$, то наше подмногообразие имеет вид обычной катушки.

Если $k_0 = 0$, то одна из границ уходит на бесконечность, и получаем поверхность, "подобную" псевдосфере (т.е. интервал изменения t — полупрямая).

В предположении теоремы говорится о случае, когда n-мерное многообразие постоянной кривизны k_0 изометрически погружается в единичную сферу S^p, причем по условию теоремы требуется, чтобы $k_0 < 1$. Нас сейчас интересует вопрос: а существуют ли такие изометрические погружения, кроме случая тора $T^2 \subset S^3$ и поверхности Веронезе в S^4 ?

В работе М. до Кармо и Н. Валлаха [6] было доказано, что при любом натуральном q сфера S^n постоянной кривизны $k_0 = \frac{n}{(q+n-1)q}$ изометрически погружается в единичную сферу S^N, где $N(n,q) = (2q+n-1)\frac{(q+n-2)!}{q!(n-1)!} - 1$ в виде минимального подмногообразия.

Рассмотрим случай $n = 3$. Чтобы случай был нетривиальным, выберем $q = 2$, $N(n,q) = 8$, тогда к$_0 = \frac{3}{8} \leq 1$.

Можем сформулировать

Утверждение 1. *Существует изометрическое погружение области пространства Лобачевского L^4 в евклидово пространство E^{10} в виде подмногообразия с радиус-вектором*

$$r(u_1,u_2,u_3,t) = f_1(t)\rho(u_1,u_2,u_3) + f_2(t)e_{10},$$

где $\rho(u_1,u_2,u_3)$ — радиус-вектор погружения $S^3_{\frac{3}{8}}$ в S^8_1.

Рассмотрим случай $n = 4$. Чтобы случай был нетривиальным, выберем $q = 2$, $N(n,q) = 13$, тогда $k_0 = \frac{2}{5} \leq 1$.

Утверждение 2. *Существует изометрическое погружение области пространства Лобачевского L^5 в евклидово пространство E^{15} в виде подмногообразия с радиус-вектором*

$$r(u_1,u_2,u_3,u_4,t) = \rho(u_1,u_2,u_3,u_4)f_1(t) + f_2(t)e_{15},$$

где $\rho(u_1,u_2,u_3,u_4)$ — радиус-вектор погружения $S^4_{\frac{2}{5}}$ в S^{13}_1.

В общем случае с помощью теоремы 1 и результатов из [7] доказывается

Теорема 2. *Существует изометрическое погружение области пространства Лобачевского L^{n+1} в евклидово пространство $E^{N(n,q)+2}$ виде подмногообразия с радиус-вектором*

$$r(u_1,\ldots,u_n,t) = f_1(t)\rho(u_1,\ldots,u_n) + f_2(t)e_{N(n,q)+2},$$

где $\rho(u_1,\ldots,u_n)$ — радиус-вектор погружения $S^n_{k_0}$ в $S^{N(n,q)}_1$ при $k_0 = \dfrac{n}{(n+q-1)q}$, $N(n,q) = (2q+n-1)\dfrac{(q+n-2)!}{q!(n-1)!} - 1$.

2. В случае изометрических погружений областей n-мерного пространства Лобачевского L^n в $(2n-1)$-мерное евклидово пространство E^{2n-1} нормальная связность автоматически является плоской. Это условие эквивалентно существованию на погруженной области в каждой точке n главных направлений. С их помощью на погруженной области можно ввести ортогональные координаты $u_1,\ldots,u_n$.

Для погружений L^n в E^{n+m} при $m > n-1$ нормальная связность в общем случае неплоская. Изучим вопрос, будет ли построенное подмногообразие иметь плоскую нормальную связность. Для этого найдем тензор кривизны нормальной связности

$$T_{\sigma\tau|ij} = g^{lh}(L^{\sigma}_{li}L^{\tau}_{hj} - L^{\sigma}_{lj}L^{\tau}_{hi}), \quad i,j = 1,\dots,n+1; \quad \sigma,\tau = 1,\dots,p-n+1.$$

Чтобы найти коэффициенты второй квадратичной формы, надо вычислить вторые производные и найти $p-n+1$ нормалей:

$$r_{u_iu_i} = f_1\rho_{u_iu_i}, \quad i \le n,$$
$$r_{u_it} = f_1'\rho_{u_i}, \quad i \le n,$$
$$r_{tt} = f_1''\rho + f_2''e_{p+2}.$$

Заметим, что каждое сечение F^{n+1}, задаваемое уравнением $t = const$, лежит в сфере с центром на оси x_{p+1} на расстоянии $f_2(t)$ от начала координат и радиуса $f_1(t)$. Обозначим эту сферу $S^p(t)$.

На подмногообразии $F^{n+1} \subset E^{p+1}$ построим поле единичных взаимно ортогональных нормалей к подмногообразию $N_1,\dots,N_{p-n}, N_{p-n+1} = \rho f_2' - e_{p+2}f_1'$, причем так, что первые $p-n$ векторов являются нормалями к сечению $t = const$, не зависят от t и касаются сфер S^p, т.е. $(N_k,\rho) = (N_k, e_{p+2}) = 0$. Имеем

$$(r_{u_i}, N_j) = f_1(\rho_{u_i}, N_j) = 0,$$
$$(r_t, N_j) = 0, \quad i = 1,\dots,n, \quad j = 1,\dots,p-n+1.$$
$$(r_t, N_{p-n+1}) = f_1'f_2' - f_1'f_2' = 0.$$

Следовательно, выбранные векторы действительно являются нормалями к подмногообразию F^{n+1}. Заметим, что при $n = 0$ векторы $N_1,\dots,N_{p-n}$ составляют базис нормалей $F^n \subset S^p$.

Пусть l^k_{ij} — соответствующие коэффициенты второй квадратичной формы подмногообразия F^n. Вычислим коэффициенты вторых квадратичных форм F^{n+1}:

$$L^k_{ij} = (r_{u_iu_j}, N_k) = (f_1\rho_{u_iu_i}, N_k) = f_1 l^k_{ij}, \quad i,j = 1,\dots,n, \quad k = 1,\dots,p-n.$$

Пусть координате t соответствует индекс $n+1$, тогда имеем

$$L^k_{in+1} = (r_{u_it}, N_k) = (f_1'\rho_{u_i}, N_k) = 0,$$
$$L^k_{n+1n+1} = (r_{tt}, N_k) = (f_1''\rho + f_2''e_{p+2}, N_k) = 0.$$

Далее вычислим вторую квадратичную форму для последней нормали

$$L^{p-n+1}_{ij} = (r_{u_iu_j}, N_{p-n+1}) = (f_1\rho_{u_iu_j}, \rho f_2' - e_{p+2}f_1') = f_1f_2'(\rho, \rho_{u_iu_j}).$$

Если $i \neq j$, то, в силу выбора координат и (2), $L_{ij}^{p-n+1} = 0$. Обозначим $\rho_{u_i}^2 = a_{ii}$, $b = -f_1 f_2'$. Тогда $L_{ii}^{p-n+1} = ba_{ii}$,

$$\begin{aligned} L_{in+1}^{p-n+1} &= (r_{u_i t}, N_{p-n+1}) = (f_1'\rho_{u_i}, \rho f_2' - e_{p+2} f_1') = 0, \\ L_{n+1n+1}^{p-n+1} &= (r_{tt}, N_{p-n+1}) = (f_1''\rho + f_2'' e_{p+2}, \rho f_2' - e_{p+2} f_1') \\ &= f_1'' f_2' - f_2'' f_1' = \frac{f_1'}{\sqrt{1 - {f_1'}^2}}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Можем выписать матрицы коэфициентов вторых квадратичных форм

$$||\, L_{ij}^k \,|| = \begin{pmatrix} f_1 l_{11}^k & & f_1 l_{1n}^k & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_1 l_{n1}^k & & f_1 l_{nn}^k & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$||\, L_{ij}^{p-n+1} \,|| = \begin{pmatrix} ba_{11} & & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & ba_{nn} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{f_1'}{\sqrt{1-{f_1'}^2}} \end{pmatrix},$$

$$i, j = 1, \dots, n+1, \quad k = 1, \dots, p-n. \tag{9}$$

Найдем коэффициенты тензора кривизны нормальной связности. Рассмотрим случай а): $\sigma, \tau = 1, \dots, p-n$; $i, j = 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned} T_{\sigma\tau|ij} &= \sum_{s=1}^{n} g^{ss}(L_{si}^{\sigma} L_{sj}^{\tau} - L_{sj}^{\sigma} L_{si}^{\tau}) + g^{n+1n+1}(L_{n+1i}^{\sigma} L_{n+1j}^{\tau} - L_{n+1j}^{\sigma} L_{n+1i}^{\tau}) \\ &= \sum_{s=1}^{n} g^{ss}(f_1 l_{si}^{\sigma} f_1 l_{sj}^{\tau} - f_1 l_{sj}^{\sigma} f_1 l_{si}^{\tau}) = f_1^2 \sum_{s=1}^{n} g^{ss}(l_{si}^{\sigma} l_{sj}^{\tau} - l_{sj}^{\sigma} l_{si}^{\tau}). \end{aligned} \tag{10}$$

Вспомним, что $g_{ii} = f_1^2(\rho_{u_i}, \rho_{u_i}) = f_1^2 a_{ii}$, $\quad {\scriptstyle i=1,\dots,n}$. Так как $u_1, \dots, u_n$ — ортогональные координаты, то выполняются $a_{ii} = \frac{1}{a^{ii}}$, $g_{ii} = \frac{a^{ii}}{f_1^2}$.

$$T_{\sigma\tau|ij} = \sum_{s=1}^{n} a^{ii}(l_{si}^{\sigma} l_{sj}^{\tau} - l_{sj}^{\sigma} l_{si}^{\tau}), \quad \sigma = 1, \dots, p-n; \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Пусть $t_{\sigma\tau|ij}$ — тензор кривизны нормальной связности подмногообразия F^n, тогда из (10) получим

$$T_{\sigma\tau|ij} = \sum_{s=1}^{n} a^{ii}(l_{si}^{\sigma} l_{sj}^{\tau} - l_{sj}^{\sigma} l_{si}^{\tau}), \quad \text{т.е.} \quad T_{\sigma\tau|ij} = t_{\sigma\tau|ij}.$$

Рассмотрим случай b): $\tau = p - n + 1; \quad i, j = 1, \dots, n.$

$$T_{\sigma p-n+1|ij} = \sum_{s=1}^{n} g^{ss}(L^{\sigma}_{si}L^{p-n+1}_{sj} - L^{\sigma}_{sj}L^{p-n+1}_{si})$$

$$+g^{n+1n+1}(L^{\sigma}_{n+1i}L^{p-n+1}_{n+1j} - L^{\sigma}_{n+1j}L^{p-n+1}_{n+1i}) = \sum_{s=1}^{n} g^{ss}(f_1 l^{\sigma}_{si} f_1 f'_2 l^0_{sj} - f_1 l^{\sigma}_{sj} f_1 f'_2 l^0_{si})$$

$$= f_1^2 f'_2 \sum_{s=1}^{n} g^{ss}(l^{\sigma}_{si}l^0_{sj} - l^{\sigma}_{sj}l^0_{si}) = 0.$$

Рассмотрим случай c): $\sigma, \tau = 1, \dots, p-n.$

$$T_{\sigma\tau|in+1} = \sum_{s=1}^{n} g^{ss}(L^{\sigma}_{si}L^{\tau}_{sn+1} - L^{\sigma}_{sn+1}L^{\tau}_{si})$$

$$+g^{n+1n+1}(L^{\sigma}_{n+1i}L^{\tau}_{n+1n+1} - L^{\sigma}_{n+1n+1}L^{\tau}_{n+1i}) = 0.$$

Здесь мы использовали вид матриц (9).

Рассмотрим случай d): $\tau = p - n + 1.$

$$T_{\sigma p-n+1|in+1} = \sum_{s=1}^{n} g^{ss}(L^{\sigma}_{si}L^{p-n+1}_{sn+1} - L^{\sigma}_{sn+1}L^{p-n+1}_{si})$$

$$+g^{n+1n+1}(L^{\sigma}_{n+1i}L^{p-n+1}_{n+1n+1} - (L^{\sigma}_{n+1n+1}L^{p-n+1}_{n+1i}) = 0.$$

Таким образом, имеем

$$\| T_{\sigma\tau|ij} \| = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & t_{\sigma\tau|ij} & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \| T_{\sigma p-n+1|ij} \| = 0, \quad \sigma, \tau = 1, \dots, p-n.$$

Теорема 3. *Тензор кривизны нормальной связности надстройки F^{n+1} равен нулю тогда и только тогда, когда равен нулю тензор кривизны нормальной связности базы F^n.*

Например, что в качестве базы F^n можно выбрать поверхность Веронезе, нормальная связность которой неплоская.

З а м е ч а н и е 2. Построенные в теореме 2 явные погружения пространства Лобачевского L^{n+1} в евклидово пространство обладают определенной однородностью, т.к. допускают движения по себе и являются прямым обобщением тороидальных подмногообразий из работы [2].

С другой стороны, построение погружений L^n в евклидовы пространства с размерностью больше $2n-1$ может представить интерес при построении моделей физических полей. В работе [9] для погружения L^4 в E^7 такая модель построена, но оказалось, что плотность топологического заряда равна нулю. Возможно, это связано с тем, что в этом случае нормальная связность плоская. В данной работе строятся погружения и с неплоской нормальной связностью.

Список литературы

[1] *Э.Р. Розендорн*, Реализация метрики $ds^2 = du^2 + f(u)dv^2$ в пятимерном евклидовом пространстве. — *Докл. АН АрмССР* (1960), т. 30, No. 4, p. 85–87.

[2] *M.L.Rabelo and K. Tenenblat*, Toroidal submanifolds of constant non-positive curvature. — *Proc. Bicentennial Conf. N.I. Lobachevsky*, Kazan (1995), v. III, No. 1, p. 135–159. (Russian)

[3] *Yu.A. Aminov and M.L. Rabelo*, On toroidal submanifolds of constant negative curvature. — *Mat. fiz., analiz, geom.* (1995), v. 2, No. 3/4, p. 275–283.

[4] *Yu.A. Aminov and O. Gontcharova*, An example of isometric immersion of a domain of 3-dimensional Lobachevsky space into E^6 with a section as the Veroneze surface. — *Mat. fiz., analiz, geom.* (1999), v. 6, No. 1/2, p. 3–9.

[5] *Л.П. Эйзенхарт*, Риманова геометрия, Изд-во иностр. лит., Москва (1948).

[6] *M.P. do Carmo and N.R. Wallach*, Minimal immersions of spheres into spheres. — *Ann. Math.* (1971), v. 93, No. 2, p. 45–62.

[7] *Yu.A. Aminov*, New ideas in differential geometry of submanifolds. ACTA, Kharkiv (2000).

[8] *А.А. Борисенко*, Изометрические погружения пространственных форм в римановы и псевдоримановы пространства постоянной кривизны. — Успехи мат. наук (2001), т. 56, № 3, с. 3–78.

[9] *Ю.А. Аминов*, Изометрические погружения областей n-мерного пространства Лобачевского в евклидовы пространства с плоской нормальной связностью. Модель калибровочного поля. — *Мат. сб.* (1988), т. 137, № 3, с. 275–299.

On special isometric immersions of regions of Lobachevsky space into Euclidean space

Yu.A. Aminov and O. Tikhonova

In the article a method is given to construct isometric immersions of regions of $(n+1)$-dimensional Lobachevsky space into the $(p+2)$-dimensional Euclidean space in the form of a suspension over n-dimensional submanifold of constant curvature in p-dimensional sphere.