Математическая физика, анализ, геометрия
2003, т. 10, № 1, с. 12–28

Принцип максимума для "голоморфных функций" в квантовом шаре

Л. Ваксман

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины пр. Ленина, 47, Харьков, 61103, Украина

E-mail:vaksman@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 29 апреля 2002 г.
Представлена И.В. Островским

В рамках теории квантовых групп изучаются некоммутативные аналоги алгебр функций в шаре. Получено описание границы Шилова алгебры "голоморфных функций". В работе существенно используются методы теории унитарных дилатаций.

В рамках теорії квантових груп вивчаються некомутативні аналоги алгебр функцій в кулі. Одержано опис межі Шилова алгебри "голоморфних функцій". В роботі істотно використовуються методи теорії унітарних дилатацій.

1. Введение

Возможность равномерного приближения непрерывных функций на компакте $K \subset \mathbb{C}$ без внутренних точек многочленами доказана М. Лаврентьевым в 1934 году. Современный подход к этой задаче комплексного анализа, связанный с теорией равномерных алгебр [1], найден значительно позднее.

В работе У. Арвесона [2] начато изучение некоммутативных аналогов равномерных алгебр, т.е. получены первые результаты некоммутативного комплексного анализа. В частности, в этой работе введено понятие границы Шилова замкнутой подалгебры C^*-алгебры.

В середине девяностых годов в рамках построенной В. Дринфельдом и другими авторами теории квантовых групп [3] было начато систематическое изучение квантовых аналогов ограниченных симметрических областей [4, 5].

Mathematics Subject Classification 2000: 20G42, 32M15.
Работа выполнена при финансовой поддержке Шведской академии наук, грант 11293562.

© Л. Ваксман, 2003

В настоящей работе описана граница Шилова квантового аналога (q-аналога) простейшей из них — единичного шара в $\mathbb{C}^N$.

Используемые нами методы являются типичными для теории Б. Секефальви-Надя и Ч. Фояша [6] унитарных дилатаций сжатий в гильбертовом пространстве и для теории открытых систем М. Лившица [7]. С глубоким уважением и признательностью посвящаю эту работу своему учителю М. Лившицу в честь его восьмидесятипятилетия.

Выражаю благодарность Л. Туровской и Д. Шклярову за полезные обсуждения.

2. Границы и дилатации

Всюду в дальнейшем основным полем служит поле комплексных чисел и все рассматриваемые алгебры предполагаются унитальными.

Векторное пространство E называют матрично нормированным, если все векторные пространства $Mat_k(E)$ $k \times k$-матриц со значениями в E наделены нормами $\|\cdot\|_k$. *

Приведем два примера матрично нормированных пространств.

Пример 2.1. *Рассмотрим C^*-алгебру $B(\mathcal{H})$ всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Алгебра $Mat_k(B(\mathcal{H}))$ стандартным образом наделяется структурой C^*-алгебры, и, следовательно, пространство $B(\mathcal{H})$ является матрично нормированным.*

Пример 2.2. *Каждая C^*-алгебра B допускает вложение в C^*-алгебру $B(\mathcal{H})$. Индуцированные нормы в $Mat_k(B)$ не зависят от выбора этого вложения. Таким образом, пространство B является матрично нормированным.*

Рассмотрим матрично нормированные пространства E_1, E_2 и линейный оператор $T : E_1 \to E_2$. Ему отвечают линейные операторы $T_k : Mat_k(E_1) \to Mat_k(E_2)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, действующие поэлементно. Линейный оператор T называют вполне сжимающим, если все операторы T_k, $k \in \mathbb{Z}_+$ — сжатия, т.е. если их нормы не превосходят 1. Оператор T называют вполне изометрическим, если все операторы T_k, $k \in \mathbb{Z}_+$ — изометрии. Рассмотрим C^*-алгебру B, ее двустороннй $*$-идеал J и C^*-алгебру B/J. Канонический эпиморфизм $j : B \to B/J$ является вполне сжимающим.

Определение 2.3. (Арвесон [2]) *Пусть A — векторное подпространство C^*-алгебры B, которое порождает эту C^*-алгебру и содержит ее единицу. Замкнутый двусторонний $*$-идеал $J \subset B$ называется граничным идеалом*

*При условии согласованности этих норм, описанном на с. 20 работы [8], матрично нормированное пространство называют абстрактным операторным пространством.

для A, если сужение $j_{|A}$ канонического гомоморфизма $j : B \to B/J$ на подпространство A является вполне изометрическим линейным оператором.

Приведем пример граничного идеала. Рассмотрим единичный шар

$$\mathbb{U} = \{(z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n \ \mid \ \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 < 1\} ,$$

его замыкание $\overline{\mathbb{U}}$ и границу $\partial\mathbb{U}$. Пусть $C(\overline{\mathbb{U}})$, $C(\partial\mathbb{U})$ — C^*-алгебры всех непрерывных функций на $\overline{\mathbb{U}}$ и на $\partial\mathbb{U}$ соответственно, а $A(\overline{\mathbb{U}}) \subset C(\overline{\mathbb{U}})$ — подалгебра всех голоморфных в $\mathbb{U}$ функций. Рассмотрим гомоморфизм

$$j : C(\overline{\mathbb{U}}) \to C(\partial\mathbb{U}) ,$$

сопоставляющий каждой непрерывной в $\overline{\mathbb{U}}$ функции ее сужение на границу $\partial\mathbb{U}$. В силу принципа максимума для голоморфных функций, сужение $j_{|A(\overline{\mathbb{U}})}$ гомоморфизма j на подалгебру $A(\overline{\mathbb{U}})$ является вполне изометрическим линейным оператором. Значит, $J = \ker j$ является граничным идеалом для алгебры $A(\overline{\mathbb{U}})$.

В следующем разделе мы введем в рассмотрение некоммутативные C^*-алгебры, являющиеся q-аналогами C^*-алгебр $C(\overline{\mathbb{U}})$, $C(\partial\mathbb{U})$. Будет построен q-аналог j_q гомоморфизма j и доказано, что сужение линейного оператора j_q на подалгебру " голоморфных функций в квантовом шаре" вполне изометрично.

Опишем в общих чертах хорошо известный прием, используемый нами при доказательстве последнего результата. Пусть, как и прежде, A — подалгебра C^*-алгебры B, J — замкнутый двусторонний $*$-идеал этой C^*-алгебры, $j : B \to B/J$ — канонический гомоморфизм, и $j_A : A \to B/J$ — его сужение на A. Требуется доказать полную изометричность гомоморфизма j_A. Мы выбираем точное $*$-представление T C^*-алгебры B в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и строим дилатацию его сужения T_A на подалгебру A. Точнее, строим такое $*$-представление $\tilde{T}$ C^*-алгебры B/J в гильбертовом пространстве

$$\tilde{\mathcal{H}} \supset \mathcal{H} , \tag{2.1}$$

что

$$T(a) = P_{\mathcal{H}} \cdot \tilde{T}(j(a))_{|\mathcal{H}} \tag{2.2}$$

при всех $a \in A$, где $P_{\mathcal{H}}$ — ортопроектор на подпространство $\mathcal{H}$. Из неравенств

$$\|a\| \geq \|j(a)\|, \qquad \|a\| = \|T(a)\| \leq \|\tilde{T}(j(a))\| \leq \|j(a)\| , \qquad a \in A ,$$

вытекает изометричность оператора j_A. Заменяя $\mathcal{H}$ и $\tilde{\mathcal{H}}$ на $\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^k$ и $\tilde{\mathcal{H}}\otimes\mathbb{C}^k$, получаем доказательство того, что гомоморфизм j_A не только изометричен, но и вполне изометричен.

Отметим, что вместо банального вложения (2.1) в определение дилатации можно было бы включить изометрию $i:\mathcal{H}\to\tilde{\mathcal{H}}$, заменив $P_{\mathcal{H}}$ оператором i^*, а (2.2) — требованием

$$T(a)=i^*\cdot\tilde{T}(j(a))\cdot i\,,\qquad a\in A\,. \tag{2.3}$$

3. Квантовый шар

Выберем число $q\in(0,1)$. Пусть $\mathbb{C}[z_1,z_2,\dots,z_n]_q$ — алгебра с образующими z_1,z_2, ... , z_n и следующими определяющими коммутационными соотношениями:

$$z_jz_k=qz_kz_j\,,\qquad j<k\,. \tag{3.1}$$

Рассмотрим $*$-алгебру $Pol(\mathbb{C}^n)_q$ с теми же образующими и коммутационными соотношениями (3.1)

$$z_j^*z_k=qz_kz_j^*,\ \ j\neq k,\qquad z_j^*z_j=q^2z_jz_j^*+(1-q^2)(1-\sum_{k>j}z_kz_k^*)\,. \tag{3.2}$$

Эта алгебра является q-аналогом алгебры полиномов в $\mathbb{C}^n$; она введена В. Пушем и С. Вороновичем в [9].*

Представления $*$-алгебры $Pol(\mathbb{C}^n)_q$ хорошо изучены, и мы будем использовать следующие известные результаты.

Предложение 3.1. [9] *1) Существует и единственно*** **точное** *неприводимое $*$-представление T алгебры $Pol(\mathbb{C}^n)_q$ ограниченными операторами в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.*

*2) Существует и единствен*** *вектор $v_0\in\mathcal{H}$, для которого $T(z_j^*)v_0=0$ при всех $j=1,2,\dots,n$ и $\|v_0\|=1$.*

3) Алгебра $\mathbb{C}[z_1,z_2,\dots,z_n]_q$ допускает естественное вложение в $Pol(\mathbb{C}^n)_q$, которому отвечает вложение

$$\mathbb{C}[z_1,z_2,\dots,z_n]_q\hookrightarrow\mathcal{H},\qquad f\mapsto fv_0, \tag{3.3}$$

и

$$\overline{\mathbb{C}[z_1,z_2,\dots,z_n]_qv_0}=\mathcal{H}. \tag{3.4}$$

*В этой работе вместо образующих z_j , z_j^* используются образующие $a_i=(1-q^2)^{-1/2}\cdot z_{n+1-i}^*$, $a_i^+=(1-q^2)^{-1/2}\cdot z_{n+1-i}$, что позволяет считать (3.1), (3.2) q-аналогом канонических коммутационных соотношений, а $Pol(\mathbb{C}^n)_q$ — q-аналогом осцилляторной алгебры.

**С точностью до унитарной эквивалентности.

*** С точностью до числового множителя, по модулю равного 1.

Вектор v_0 называют вакуумным, а представление T — фоковским. Наделим алгебру $Pol(\mathbb{C}^n)_q$ нормой

$$\|f\| = \|T(f)\|, \qquad f \in Pol(\mathbb{C}^n)_q. \tag{3.5}$$

Пополнение $C(\overline{\mathbb{U}})_q$ $*$-алгебры $Pol(\mathbb{C}^n)_q$ по норме (3.5) является q-аналогом C^*-алгебры $C(\overline{\mathbb{U}})$ непрерывных функций в замкнутом шаре $\overline{\mathbb{U}}$, а замыкание $A(\overline{\mathbb{U}})_q$ подалгебры $\mathbb{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]_q \subset Pol(\mathbb{C}^n)_q \subset C(\overline{\mathbb{U}})_q$ является q-аналогом алгебры $A(\overline{\mathbb{U}})$.

Предложение 3.2. [10] *Для любого $*$-представления T' алгебры $Pol(\mathbb{C}^n)_q$*

$$\|T'(f)\| \le \|f\|, \qquad f \in Pol(\mathbb{C}^n)_q.$$

Следствие 3.3. *C^*-алгебра $C(\overline{\mathbb{U}})_q$ является универсальной обертывающей C^*-алгеброй $*$-алгебры $Pol(\mathbb{C}^n)_q$.*

Введем в рассмотрение замкнутый двусторонний идеал C^*-алгебры $C(\overline{\mathbb{U}})_q$, порожденный элементом $1 - \sum_{j=1}^n z_j z_j^*$. Этот идеал J является q-аналогом идеала непрерывных функций в $\overline{\mathbb{U}}$, равных нулю на границе $\partial\mathbb{U}$ единичного шара. C^*-алгебра

$$C(\partial\mathbb{U})_q \stackrel{\text{def}}{=} C(\overline{\mathbb{U}})_q / J$$

является q-аналогом алгебры $C(\partial\mathbb{U})$ непрерывных функций на $\partial\mathbb{U}$, а канонический эпиморфизм

$$j_q : \; C(\overline{\mathbb{U}})_q \to C(\partial\mathbb{U})_q$$

является q-аналогом оператора сужения непрерывной функции на границу шара.

Пусть $j_{A(\overline{\mathbb{U}})_q}$ и $T_{A(\overline{\mathbb{U}})_q}$ — сужения гомоморфизма j_q и представления T на подалгебру $A(\overline{\mathbb{U}})_q$. Очевидно, оператор $j_{A(\overline{\mathbb{U}})_q}$ является вполне сжимающим. Нам предстоит доказать, что этот оператор является вполне изометрическим, построив дилатацию представления $T_{A(\overline{\mathbb{U}})_q}$.

4. Инвариантный интеграл

Напомним понятия алгебры непрерывных функций на квантовой группе SU_n и инвариантного интеграла на этой квантовой группе. Пусть $\mathbb{C}[\mathrm{Mat_n}]_\mathrm{q}$ — алгебра (голоморфных) полиномов на квантовом пространстве матриц порядка n, введенная в [3]. Это алгебра с образующими $\{t_{i,j}\}_{i,j=1,2,\ldots,n}$ и определяющими соотношениями

$$
\begin{aligned}
t_{i_1,j}\cdot t_{i_2,j} &= q\,t_{i_2,j}\cdot t_{i_1,j}\,, && i_1<i_2\,;\\
t_{i,j_1}\cdot t_{i,j_2} &= q\,t_{i,j_2}\cdot t_{i,j_1}\,, && j_1<j_2\,;\\
t_{i_1,j_1}\cdot t_{i_2,j_2} &= t_{i_2,j_2}\cdot t_{i_1,j_1}\,, && i_1<i_2\ \&\ j_1>j_2\,;\\
t_{i_1,j_1}\cdot t_{i_2,j_2} &= t_{i_2,j_2}\cdot t_{i_1,j_1}+(q-q^{-1})\,t_{i_1,j_2}\cdot t_{i_2,j_1}\,, && i_1<i_2\ \&\ j_1<j_2\,.
\end{aligned}
$$

Введем обозначение $\boldsymbol{t}$ для матрицы $(t_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$. Хорошо известно, что квантовый детерминант

$$\det_q \boldsymbol{t}=\sum_{s\in S_n}(-q)^{l(s)}t_{1,s(1)}\cdot t_{2,s(2)}\dots t_{n,s(n)}$$

принадлежит центру алгебры $\mathbb{C}[\mathrm{Mat_n}]_\mathrm{q}$. (Здесь $l(s)=card\{(i,j)|\,i<j\,\&\,s(i)>s(j)\}$.) Следуя В. Дринфельду [3], назовем алгеброй регулярных функций на квантовой группе SL_n алгебру Хопфа

$$\mathbb{C}[SL_n]_q=\mathbb{C}[\mathrm{Mat_n}]_\mathrm{q}/(\mathrm{det_q}\,\boldsymbol{t}-1)$$

с коумножением, коединицей и антиподом, определяемыми следующим образом:

$$\Delta: t_{i,j}\mapsto\sum_{k=1}^n t_{i,k}\cdot t_{k,j},\quad \varepsilon: t_{i,j}\mapsto\delta_{i,j},\quad S: t_{i,j}\mapsto(-q)^{i-j}\det_q\boldsymbol{t}_{j,i}\,,$$
$$i,j=1,2,\dots,n\,,$$

где $\boldsymbol{t}_{i,j}$ — матрица, получаемая из $\boldsymbol{t}$ удалением строки с номером i и столбца с номером j. Алгебра Хопфа $\mathbb{C}[SL_n]_q$ привлекает неизменное внимание, начиная с работ В. Дринфельда [3], С. Вороновича [11] и Н. Решетихина, Л. Тахтаджяна, Л. Фаддеева [12].

Наделяя алгебру $\mathbb{C}[SL_n]_q$ инволюцией $t_{i,j}^*=S(t_{j,i})$, $i,j=1,2,\dots,n$, получаем $*$-алгебру Хопфа $\mathbb{C}[SU_n]_q$, являющуюся q-аналогом алгебры $\mathbb{C}[SU_n]$ регулярных функций на группе SU_n.* Из определений следует, что при всех $f\in\mathbb{C}[SU_n]_q$ $\|f\|\overset{\mathrm{def}}{=}\sup_{\mathcal{T}}\|\mathcal{T}(f)\|<\infty$, где $\mathcal{T}$ пробегает множество классов унитарной эквивалентности $*$-представлений алгебры $\mathbb{C}[SU_n]_q$. Нетрудно доказать, что $\|f\|$ является нормой. Пополнение алгебры $\mathbb{C}[SU_n]_q$ по этой норме является q-аналогом C^*-алгебры $C(SU_n)$ непрерывных функций на группе SU_n и обозначается $C(SU_n)_q$.

Единичная сфера $\partial\mathbb{U}$ является однородным пространством группы SU_n, что позволяет, выбрав точку $p\in\partial\mathbb{U}$, построить вложение $C(\partial\mathbb{U})\hookrightarrow C(SU_n)$,

*Известно описание неприводимых $*$-представлений алгебры $\mathbb{C}[SU_n]_q$ [13].

$f(p) \mapsto f(g^{-1}p)$, $f \in C(\partial\mathbb{U})$. Аналогичное вложение имеется и в квантовом случае. Непосредственно из определений C^*-алгебр $C(\partial\mathbb{U})_q$, $C(SU_n)_q$ вытекает следующее утверждение.

Предложение 4.1. *Отображение $z_a \mapsto t_{n,a}$, $a = 1, 2, \ldots, n$, единственным образом продолжается до инъективного гомоморфизма C^*-алгебр $i : C(\partial\mathbb{U})_q \hookrightarrow C(SU_n)_q$.*

Напомним, что состояние на C^*-алгебре с единицей — это положительный линейный функционал ν, для которого $\nu(1) = 1$. В классическом случае $(q = 1)$ интеграл по мере Хаара является инвариантным состоянием на $C(SU_n)$ и $\int_{SU_n} \|f\|^2 d\nu > 0$ при $f \neq 0$. С. Воронович [11] доказал существование и единственность инвариантного в смысле теории квантовых групп состояния

$$\nu : C(SU_n)_q \to \mathbb{C}, \qquad \nu : f \mapsto \int\limits_{(SU_n)_q} f\, d\nu$$

на квантовой группе SU_n. Известно, что $\int_{(SU_n)_q} \|f\|^2 d\nu > 0$ при $f \neq 0$. Вложение $i : C(\partial\mathbb{U})_q \hookrightarrow C(SU_n)_q$ позволяет перенести состояние ν с C^*-алгебры $C(SU_n)_q$ на C^*-алгебру $C(\partial\mathbb{U})_q$:

$$\int\limits_{(\partial\mathbb{U})_q} f\, d\nu \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{(SU_n)_q} i(f)\, d\nu\,.$$

Полученное состояние $\nu : C(\partial\mathbb{U})_q \to \mathbb{C}$ является q-аналогом интеграла по ивариантной вероятностной мере на единичной сфере $\partial\mathbb{U}$. Воспользуемся этим состоянием ν и конструкцией Гельфанда–Наймарка–Сигала для получения точного представления C^*-алгебры $C(\partial\mathbb{U})_q$. Скалярное произведение $(f_1, f_2) = \nu(f_2^* f_1)$ наделяет $C(\partial\mathbb{U})_q$ структурой предгильбертова пространства. Его пополнение $L^2(\partial\mathbb{U})_q$ является q-аналогом пространства квадратично суммируемых функций на сфере $\partial\mathbb{U}$. Из определения следует, что $C(\partial\mathbb{U})_q \hookrightarrow L^2(\partial\mathbb{U})_q$. Определим представление R рассматриваемой C^*-алгебры $C(\partial\mathbb{U})_q$ в пространстве $L^2(\partial\mathbb{U})_q$ равенством

$$R(f)\psi = f\psi, \qquad f, \psi \in C(\partial\mathbb{U})_q\,.$$

5. Построение дилатации представления $T_{A(\overline{\mathbb{U}})_q}$

Наделим подалгебру $\mathbb{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]_q \subset Pol(\mathbb{C}^n)_q$ стандартной градуировкой

$$\mathbb{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]_q = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathbb{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]_q^{(j)}, \quad \deg z_1 = \deg z_2 = \ldots = \deg z_n = 1$$

и введем обозначение

$$\mathbb{C}[z_1, z_2, \dots, z_n]_{q,>k} = \bigoplus_{j>k} \mathbb{C}[z_1, z_2, \dots, z_n]_q^{(j)}.$$

Нашей ближайшей целью является построение ограниченных морфизмов

$$i_\infty,\ i_k\ : \mathcal{H} \to L^2(\partial \mathbb{U})_q, \qquad k \in \mathbb{Z}_+,$$

представлений алгебры $A(\overline{\mathbb{U}})_q$, с помощью которых в дальнейшем будет получен изометрический морфизм (2.3) и, следовательно, дилатация представления $T_{A(\overline{\mathbb{U}})_q}$.

Начнем с "предельного случая"* $k = \infty$.

В предыдущих параграфах были введены "регулярное "представление R алгебры $C(\partial\mathbb{U})_q$ в пространстве $L^2(\partial\mathbb{U})_q$ и гомоморфизм $j_{A(\overline{\mathbb{U}})_q} : A(\overline{\mathbb{U}})_q \to C(\partial\mathbb{U})_q$, являющийся q-аналогом оператора сужения функции на границу шара. Рассмотрим представление $R_{A(\overline{\mathbb{U}})_q} = R \cdot j_{A(\overline{\mathbb{U}})_q}$ алгебры $A(\overline{\mathbb{U}})_q$.

Предложение 5.1. *Существует и единствен такой ограниченный морфизм представлений* $i_\infty : T_{A(\overline{\mathbb{U}})_q} \to R_{A(\overline{\mathbb{U}})_q}$, *что* $i_\infty : v_0 \mapsto 1$.

Доказательство. Единственность ограниченного линейного оператора, обладающего свойством

$$i_\infty : f v_0 \mapsto j_{A(\overline{\mathbb{U}})_q}(f), \qquad f \in \mathbb{C}[z_1, z_2, \dots, z_n]_q, \tag{5.1}$$

вытекает из (3.4). Докажем его существование. Из (3.3) следует, что (5.1) корректно определяет линейный оператор i_∞ на линейном многообразии $\mathbb{C}[z_1, z_2, \dots, z_n]_q v_0$. Докажем, что

$$\|i_\infty(f v_0)\| \le const \cdot \|f v_0\|, \qquad f \in \mathbb{C}[z_1, z_2, \dots, z_n]_q. \tag{5.2}$$

Сравним две эрмитовы формы (v, v), $(i_\infty v, i_\infty v)$ в конечномерном векторном пространстве

$$\mathcal{H}^{(k)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{C}[z_1, z_2, \dots, z_n]_q^{(k)} \cdot v_0 \subset \mathcal{H}.$$

В следующем разделе будет доказана

Лемма 5.2. *При всех* $k \in \mathbb{Z}_+$, $v \in \mathcal{H}^{(k)}$

$$(v, v) = (q^{2n}; q^2)_k \cdot (i_\infty v, i_\infty v), \tag{5.3}$$

где

$$(a; q)_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ (1-a)(1-aq)(1-aq^2)\dots(1-aq^{k-1}), & k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

*Этому "предельному случаю" в теории унитарных дилатаций [6] отвечает понятие остаточного подпространства дилатации.

Неравенство (5.2) вытекает из леммы 5.2. Оператор i_∞ допускает продолжение по непрерывности до морфизма представлений алгебры $A(\overline{\mathbb{U}})_q$. ■

Перейдем к построению операторов i_k. Пусть $\tilde{\mathcal{L}}_k$ — замыкание линейного многообразия $j_{A(\overline{\mathbb{U}})_q}\mathbb{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]_{q,>k}$ в $L^2(\partial\mathbb{U})_q$ и $\mathcal{P}_k$ — ортогональный проектор в $L^2(\partial\mathbb{U})_q$ на подпространство $\mathcal{L}_k = L^2(\partial\mathbb{U})_q \ominus \tilde{\mathcal{L}}_k$. Определим ограниченный оператор $i_k : \mathcal{H} \to L^2(\partial\mathbb{U})_q$, $k \in \mathbb{Z}_+$ равенством $i_k = \mathcal{P}_k \cdot i_\infty$. Подпространство $\tilde{\mathcal{L}}_k$ является общим инвариантным подпространством операторов представления $R_{A(\overline{\mathbb{U}})_q}$. Значит, оператор $i_k : \mathcal{H} \to \mathcal{L}_k$ является морфизмом представления $T_{A(\overline{\mathbb{U}})_q}$ в фактор-представление представления $R_{A(\overline{\mathbb{U}})_q}$ в пространстве $\mathcal{L}_k$.

Завершим построение дилатации представления $T_{A(\overline{\mathbb{U}})_q}$ по плану, описанному в разд. 2, т.е. построим изометрию (2.3). Роль точного представления $\tilde{T}$ будет играть сумма счетного числа представлений, канонически изоморфных R. Пусть

$$\tilde{\mathcal{H}} = \left(\bigoplus_{k=0}^{\infty} L^2(\partial\mathbb{U})_q\right) \bigoplus L^2(\partial\mathbb{U})_q \qquad \tilde{T} = \left(\bigoplus_{k=0}^{\infty} R\right) \bigoplus R\,.$$

Предложение 5.3. *Существует такое число c_∞ и такая последовательность чисел $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$, что линейный оператор*

$$i = \left(\bigoplus_{k=0}^{\infty} c_k\ i_k\right) \bigoplus c_\infty\ i_\infty \tag{5.4}$$

из $\mathcal{H}$ в $\tilde{\mathcal{H}}$ корректно определен и изометричен.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из свойств представления T, описанных в предложении 3.1, следует, что подпространства $\mathcal{H}^{(k)}$ попарно ортогональны. Значит, изометричность оператора i равносильна изометричности его сужений на эти подпространства. Из леммы 5.2 следует, что изометричность всех операторов $i_{|\mathcal{H}^{(k)}}$ равносильна системе уравнений

$$\sum_{j=k}^{\infty} |c_j|^2 + |c_\infty|^2 = (q^{2n}, q^2)_k, \qquad k \in \mathbb{Z}_+\,, \tag{5.5}$$

для $|c_\infty|^2$, $|c_k|^2$.

Переходя к пределу $k \to \infty$, находим

$$|c_\infty|^2 = (q^{2n}, q^2)_\infty, \quad \text{где} \quad (a, q^2)_\infty = (1-a)(1-aq^2)(1-aq^4)(1-aq^6)\ldots\,.$$

Сравнивая соседние уравнения системы (5.5), получаем

$$|c_k|^2 = (q^{2n}; q^2)_k - (q^{2n}; q^2)_{k+1} > 0.$$

Остается воспользоваться положительностью и монотонностью числовой последовательности $\{(q^{2n}; q^2)_k\}_{k=0}^{\infty}$. ■

Мы доказали изометричность морфизма i представлений алгебры $A(\overline{\mathbb{U}})_q$ и, следовательно, получили дилатацию представления $T_{A(\overline{\mathbb{U}})_q}$. Тем самым доказана

Теорема 5.5. *Гомоморфизм $j_{A(\overline{\mathbb{U}})_q} : A(\overline{\mathbb{U}})_q \to C(\partial\mathbb{U})_q$ вполне изометричен.*

6. Доказательство лемммы 5.2

Лемма 6.1. *При всех $k \in \mathbb{Z}_+$*

$$(T(z_n)^k v_0, T(z_n)^k v_0) = (q^2; q^2)_k\,. \tag{6.1}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть частный случай $n = 1$, поскольку

$$z_n^* z_n = q^2 z_n z_n^* + 1 - q^2\,. \tag{6.2}$$

В этом частном случае операторы $T(z_1), T(z_1^*)$ представления T в базисе $e_k = T(z_1^k)v_0$ имеют вид

$$T(z_1)e_k = e_{k+1}, \qquad T(z_1^*)e_k = \begin{cases} (1-q^{2k})e_{k-1}, & k \in \mathbb{N}, \\ 0, & k = 0. \end{cases}$$

Значит, $(T(z_1^k)e_0, T(z_1^k)e_0) = (T(z_1^*)^k e_k, e_0) = (q^2, q^2)_k$. ■

В дальнейшем мы не различаем элементы $z_1, z_2, \ldots, z_n$ алгебры $\mathbb{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]_q$ и их образы в $C(\partial\mathbb{U})_q$ при гомоморфизме j_q.

Лемма 6.2. *Для любого полинома $f(t)$*

$$\int\limits_{(\partial\mathbb{U})_q} f(1 - z_n z_n^*) d\nu = \begin{cases} \frac{1-q^{2(n-1)}}{1-q^2} \int_0^1 f(t) t^{n-2} d_{q^2} t, & n \geq 2, \\ f(0), & n = 1, \end{cases} \tag{6.3}$$

где $\int_0^1 \psi(t) d_{q^2} t = (1-q^2) \sum_{k=0}^{\infty} \psi(q^{2k}) q^{2k}$— интеграл Джексона [16].

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n=1$ равенство (6.3) очевидно. В случае $n>1$ достаточно воспользоваться предложением 4.1 и доказать существование такого автоморфизма α $*$-алгебры Хопфа $\mathbb{C}[SU_n]_q$, для которого $\alpha \cdot t_{1,1} = t^*_{n,n}$. В самом деле,

$$\alpha : 1 - t_{1,1}t^*_{1,1} \mapsto q^2 \left(1 - t_{n,n}t^*_{n,n}\right),$$

и равенство

$$\int\limits_{(SU_n)_q} f(1 - t_{n,n}t^*_{n,n})d\nu = \frac{1-q^{2(m-1)}}{1-q^2}\int\limits_0^1 f(t)t^{n-2}d_{q^2}\,t$$

вытекает из хорошо известной ([15, с. 113]) формулы

$$\int\limits_{(SU_n)_q} \psi(1 - t_{1,1}t^*_{1,1})d\nu = \frac{1-q^{2(m-1)}}{1-q^2}\int\limits_0^1 \psi(q^2 t)t^{n-2}d_{q^2}\,t\,.$$

Остается доказать существование автоморфизма α. Рассмотрим квантовую универсальную обертывающую алгебру $U_q\mathfrak{sl}_n$. Она является алгеброй Хопфа и определяется своими образующими $E_i, F_i, K_i^{\pm}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, и соотношениями Дринфельда–Джимбо [17]:

$$\begin{gathered}
K_iK_j = K_jK_i\,, \quad K_iK_i^{-1} = K_i^{-1}K_i = 1\,,\\
K_iE_j = q^{a_{ij}}E_jK_i\,, \quad K_iF_j = q^{-a_{ij}}F_jK_i\,,\\
E_iF_j - F_jE_i = \delta_{ij}(K_i - K_i^{-1})/(q-q^{-1}),\\
E_i^2E_j - (q+q^{-1})E_iE_jE_i + E_jE_i^2 = 0, \qquad |i-j| = 1,\\
F_i^2F_j - (q+q^{-1})F_iF_jF_i + F_jF_i^2 = 0, \qquad |i-j| = 1,\\
[E_i, E_j] = [F_i, F_j] = 0, \qquad |i-j| \neq 1\,,
\end{gathered}$$

где $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n-1}$— матрица Картана алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n$, т.е.

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & i-j=0\\ -1, & |i-j|=1\\ 0, & |i-j|>1 \end{cases}.$$

Коумножение Δ, антипод S и коединица ε в $U_q\mathfrak{sl}_n$ определяются равенствами

$$\begin{gathered}
\Delta(E_i) = E_i\otimes 1 + K_i\otimes E_i, \quad \Delta(F_i) = F_i\otimes K_i^{-1} + 1\otimes F_i\,,\\
\Delta(K_i^{\pm 1}) = K_i^{\pm 1}\otimes K_i^{\pm 1}\,,\\
S(E_i) = -K_i^{-1}E_i, \qquad S(F_i) = -F_iK_i, \qquad S(K_i^{\pm 1}) = K_i^{\mp 1}\,,\\
\varepsilon(E_i) = \varepsilon(F_i) = 0, \qquad \varepsilon(K_i^{\pm 1}) = 1.
\end{gathered}$$

Алгебра Хопфа $U_q\mathfrak{sl}_n$ наделяется инволюцией

$$E_i^* = K_i F_i, \quad F_i^* = E_i K_i^{-1}, \quad (K_i^{\pm})^* = K_i^{\mp}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1\ ,$$

и полученная $*$-алгебра Хопфа обозначается $U_q\mathfrak{su}_n$. Согласно подходу В. Дринфельда к построению $*$-алгебры Хопфа $\mathbb{C}[SU_n]_q$,* она допускает каноническое вложение в $*$-алгебру Хопфа $(U_q\mathfrak{su}_n)^*$. Из определений следует, что отображение

$$E_i \mapsto E_{n-i}, \quad F_i \mapsto F_{n-i}, \quad K_i^{\pm} \mapsto K_{n-i}^{\pm}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

допускает единственное продолжение до автоморфизма $*$-алгебры Хопфа $U_q\mathfrak{su}_n$. Сопряженный линейный оператор является автоморфизмом $*$-алгебры Хопфа $(U_q\mathfrak{su}_n)^*$, и α — его сужение на $\mathbb{C}[SU_n]_q \hookrightarrow (U_q\mathfrak{su}_n)^*$. ■

Напомним [16] определение q-гамма функции и q-бета функции

$$\Gamma_q(x) = \frac{(q;q)_\infty}{(q^x;q)_\infty}(1-q)^{1-x}, \quad B_q(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}\frac{(tq;q)_\infty}{(tq^y;q)_\infty} d_q t = \frac{\Gamma_q(x)\Gamma_q(y)}{\Gamma_q(x+y)}\ .$$

Очевидно, при $l \in \mathbb{Z}_+$

$$\Gamma_q(l+1) = \frac{(q;q)_l}{(1-q)^l}\,.$$

Лемма 6.3. *При всех $k \in \mathbb{Z}_+$*

$$(T(z_n)^k v_0, T(z_n)^k v_0) = (q^{2n};q^2)_k \cdot \int\limits_{(\partial\mathbb{U})_q} (z_n^*)^k z_n^k d\nu\,. \tag{6.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (6.2) следует, что

$$z_n^*(1 - z_n z_n^*) = q^2(1 - z_n^* z_n) z_n^*\,,$$

$$(z_n^*)^k z_n^k = \prod_{j=1}^k (1 - q^{2j}(1 - z_n z_n^*)) \qquad k \in \mathbb{Z}_+\,.$$

*См., например, [15].

Значит, интеграл в правой части равенства (6.4) может быть вычислен с помощью леммы 6.2. Он равен

$$\frac{1-q^{2n-2}}{1-q^2}\int_0^1 (tq^2;q^2)_k \cdot t^{n-2} d_{q^2}t = \frac{1-q^{2n-2}}{1-q^2} B_{q^2}(k+1,n-1)$$
$$= \frac{1-q^{2n-2}}{1-q^2} \cdot \frac{\Gamma_{q^2}(k+1)\Gamma_{q^2}(n-1)}{\Gamma_{q^2}(k+n)} = \frac{(q^2;q^2)_k \cdot (q^2;q^2)_{n-1}}{(q^2;q^2)_{k+n-1}}. \qquad (6.5)$$

Остается воспользоваться леммой 6.1 и равенством

$$(q^2;q^2)_k = (q^{2n};q^2)_k \cdot \frac{(q^2;q^2)_k \cdot (q^2;q^2)_{n-1}}{(q^2;q^2)_{k+n-1}}. \qquad \blacksquare$$

Перейдем к доказательству леммы 5.2. Наделим $\mathbb{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]_q$ структурой $U_q\mathfrak{sl}_n$-модульной алгебры, задав действие образующих $U_q\mathfrak{sl}_n$ на образующие $\mathbb{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]_q$ стандартным образом (см. [5]):

$$E_j = \begin{cases} q^{-\frac{1}{2}} \cdot z_{j-1}, & i=j-1 \\ 0, & i \neq j-1. \end{cases} \qquad F_j = \begin{cases} q^{\frac{1}{2}} \cdot z^{j+1}, & i=j \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \qquad (6.6)$$

$$K_i^{\pm} z_j = \begin{cases} q^{\pm 1} \cdot z_j, & i=j \\ q^{\mp 1} \cdot z_j, & i=j-1 \\ 0, & i \neq j \ \& \ i \neq j-1. \end{cases} \qquad (6.7)$$

Нетрудно показать, что однородные компоненты $\mathbb{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]_q^{(k)}$ являются **простыми** $U_q\mathfrak{sl}_n$-модулями.*

Полуторалинейную форму $\langle f_1, f_2 \rangle$ в пространстве $\mathbb{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]_q^{(k)}$ называют $U_q\mathfrak{su}_n$-инвариантной, если при всех $\xi \in U_q\mathfrak{su}_n$

$$\langle \xi f_1, f_2 \rangle = \langle f_1, \xi^* f_2 \rangle, \qquad f_1, f_2 \in \mathbb{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]_q^{(k)}.$$

Из простоты $U_q\mathfrak{sl}_n$-модуля $\mathbb{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]_q^{(k)}$ следует, что любые две $U_q\mathfrak{su}_n$-инвариантные полуторалинейные формы отличаются лишь числовым множителем. Значит, лемма 5.2 вытекает из доказанной выше леммы 6.3 и следующего утверждения

*Вектор $z_1^k \in \mathbb{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]_q^{(k)}$ является примитивным ($E_j\,(z_1^k) = 0, \ \ j = 1, \ldots, n-1$) и весовым. Простой $U_q\mathfrak{sl}_n$-модуль со старшим весом, равным весу этого вектора, имеет такую же размерность, как в случае $q = 1$ [17]. Его размерность равна $\binom{k+n-1}{n-1}$ и, следовательно, равна $\dim \mathbb{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]_q^{(k)}$.

Лемма 6.4. *Полуторалинейные формы*

$$\langle f_1, f_2\rangle_1 = (f_1 v_0, f_2 v_0), \qquad \langle f_1, f_2\rangle_2 = \int\limits_{(\partial\mathbb{U})_q} f_2^* f_1 \, d\nu$$

в векторных пространствах $\mathbb{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]_q^{(k)}$ *являются* $U_q\mathfrak{su}_n$*-инвариантными.*

Доказательство. $*$-алгебра $Pol(\mathbb{C}^n)_q$ стандартным образом (см. (6.6),(6.7)) наделяется структурой $U_q\mathfrak{su}_n$-модульной алгебры. Лемма 6.4 вытекает из того, что линейные функционалы

$$l_1(f) = (f v_0, v_0), \qquad l_2(f) = \int\limits_{(\partial\mathbb{U})_q} f \, d\nu$$

на $*$-алгебре $Pol(\mathbb{C}^n)_q$ являются $U_q\mathfrak{sl}_n$-инвариантными, т.е. из того, что

$$l_j(E_i f) = l_j(F_i f) = l_j((K_i^{\pm} - 1)f) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1; \; j = 1, 2,$$

при всех $f \in Pol(\mathbb{C}^n)_q$.

$U_q\mathfrak{sl}_n$-инвариантность l_2 следует из $U_q\mathfrak{sl}_n$-инвариантности интеграла по границе квантового шара. Для доказательства $U_q\mathfrak{sl}_n$-инвариантности линейного функционала l_1 достаточно доказать, что его ядро

$$\operatorname{Ker} l_1 = \sum_{(i,j)\neq(0,0)} \mathbb{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]_q^{(i)} \cdot (\mathbb{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]_q^{(j)})^*$$

является подмодулем $U_q\mathfrak{sl}_n$-модуля $Pol(\mathbb{C}^n)_q$. Остается воспользоваться тем, что $Pol(\mathbb{C}^n)_q$ является $U_q\mathfrak{sl}_n$-модульной алгеброй, а подпространства $\mathbb{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]_q^{(i)}$, $(\mathbb{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]_q^{(j)})^*$— ее $U_q\mathfrak{sl}_n$-подмодулями. ∎

7. Граница Шилова квантового шара

Из теоремы 5.4 следует, что двусторонний идеал $J \subset C(\overline{\mathbb{U}})_q$, порожденный элементом $1 - \sum_{j=1}^{n} z_j z_j^*$, является граничным идеалом для подалгебры $A(\overline{\mathbb{U}})_q$. Согласно известному результату М. Хамана [14], среди граничных идеалов для $A(\overline{\mathbb{U}})_q$ есть наибольший. Следуя У. Арвесону [2], его называют шиловским граничным идеалом для $A(\overline{\mathbb{U}})_q$. Отвечающая этому идеалу фактор-алгебра является некоммутативным аналогом алгебры функций на границе Шилова квантового шара.

Теорема 7.1. *Идеал J является шиловским граничным идеалом для подалгебры $A(\overline{\mathbb{U}})_q$.*

Доказательство. Рассмотрим C^*-алгебру $C(\partial\mathbb{U})_q$ и ее унитальную подалгебру $A = j_q \cdot A(\overline{\mathbb{U}})_q$. Доказываемое утверждение вытекает из упоминавшейся теоремы М. Хамана и из следующего результата.

Предложение 7.2. *Единственным граничным идеалом C^*-алгебры $C(\partial\mathbb{U})_q$ для A является нулевой идеал.*

Доказательство. Как и в разд. 6, сохраним обозначение z_i для образа элемента z_i алгебры $C(\overline{\mathbb{U}})_q$ при каноническом гомоморфизме $j_q : C(\overline{\mathbb{U}})_q \to C(\partial\mathbb{U})_q$. Введем в рассмотрение замкнутый двусторонний идеал J_0 $*$-алгебры $Pol(\mathbb{C}^n)_q$, порожденный элементом $1 - \sum_{j=1}^n z_j z_j^*$, и фактор-алгебру

$$Pol(\partial\mathbb{U})_q \stackrel{\mathrm{def}}{=} Pol(\mathbb{C}^n)_q / J_0 \,.$$

$*$-алгебра $Pol(\partial\mathbb{U})_q$ изучалась в работе [15]*. Следующие результаты вытекают из результатов [15].

Лемма 7.3. *Пусть $\phi \in [0, 2\pi)$. 1) Существует и единственно (с точностью до унитарной эквивалентности) такое неприводимое $*$-представление $\mathcal{T}_\phi$ $*$-алгебры $Pol(\partial\mathbb{U})_q$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\phi$, что для некоторого ненулевого вектора $v_\phi \in \mathcal{H}_\phi$*

$$\mathcal{T}_\phi(z_1)v_\phi = \exp(i\phi)v_\phi, \qquad \mathcal{T}_\phi(z_j)v_\phi = 0, \quad j = 2, \dots, n\,.$$

2) При $n > 1$ спектр нормального оператора $\mathcal{T}_\phi(z_1)$ является замыканием геометрической прогрессии $\bigcup_{j=1}^\infty \{(1 - q^{2j})^{1/2} \cdot \exp(i\phi)\}$.

3) Если $\mathcal{T}$ — неприводимое $*$-представление и $\mathcal{T}(z_1) \neq 0$, то $\mathcal{T}$ унитарно эквивалентно одному из представлений $\mathcal{T}_\phi$.

4) Если $\mathcal{T}$ — неприводимое $*$-представление и $\mathcal{T}(z_1) = 0$, то при всех $\phi \in [0, 2\pi)$

$$\|f\| \leq \|\mathcal{T}_\phi(f)\| \qquad f \in Pol(\partial\mathbb{U})_q\,.$$

Замечание. В [15] описан способ получения всех неприводимых $*$-представлений алгебры $Pol(\partial\mathbb{U})_q$ с помощью тензорного произведения простейших бесконечномерных $*$-представлений алгебры $\mathbb{C}[SU_n]_q$. Этот прием позволяет свести доказательство последнего утверждения леммы 7.3 к его простому частному случаю $n = 2$.

*В [15] использовались другие образующие $z_j^{'} = q^{-(n-j)} \cdot z_{n-j}^*$ и параметр деформации h, связанный с нашим параметром деформации q равенством $q = \exp(-h/2)$.

Завершим доказательство предложения 7.2. Продолжим по непрерывности представления $\mathcal{T}_\phi$ на $C(\partial\mathbb{U})_q$. Пусть $\mathcal{J}$ — граничный идеал для A. Сужение гомоморфизма $C(\partial\mathbb{U})_q \to C(\partial\mathbb{U})_q/\mathcal{J}$ на замкнутую подалгебру, порожденную элементом z_1, является изометрией. В силу леммы 7.3, для плотного множества значений параметра ϕ представление $\mathcal{T}_\phi$ поднимается до представления алгебры $C(\partial\mathbb{U})_q/\mathcal{J} : \mathcal{J} \subset Ker(\mathcal{T}_\phi)$. Значит, $\mathcal{J} \subset \bigcap_\phi Ker\mathcal{T}_\phi = 0$. ∎

Список литературы

[1] *Т. Гамелин*, Равномерные алгебры. Мир, Москва (1973).

[2] *W.B. Arveson*, Subalgebras of C^*-algebras. — *Acta Math.* (1969), v. 123, p. 141–222.

[3] *V. Drinfeld*, Quantum groups. — In: *Proc. Intern. Congress Math.*, Berkeley (A.M. Gleason, ed.) Amer. Math. Soc., Providence, RI (1987), p. 798–820.

[4] *S. Sinel'shchikov and L. Vaksman*, On q-analogues of bounded symmetric domains and Dolbeault complexes. — *Math. Phys., Analysis, and Geometry* (1998), v. 1, No. 1, p. 75–100.

[5] *L. Vaksman (Ed)*, Lectures on q-analogues of Cartan domains and associated Harish–Chandra modules. *arXiv: math.QA/0109198* (2001).

[6] *Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш*, Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. Мир, Москва (1970).

[7] *М.С. Лившиц*, Операторы, колебания, волны. Наука, Москва (1966).

[8] *E.G. Effros and Z.-J. Ruan*, Operator Spaces. Clarendon Press, Oxford (2000).

[9] *W. Pusz and S. Woronowicz*, Twisted second quantization. — *Reports Math. Phys.* (1989), v. 27, p. 231–257.

[10] *D. Proskurin and Yu. Samoilenko*, Stability of a C^*-algebra associated with the twisted CCR. *arXiv: math.QA/0112284* (2001).

[11] *S. Woronowicz*, Compact matrix pseudogroups. — *Comm. Math. Phys.* (1987), v. 111, p. 613–665.

[12] *Н.Ю. Решетихин, Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев*, Квантование групп Ли и алгебр Ли. — *Алгебра и анализ* (1989), v. 1(1), p. 231–257.

[13] *L.I. Korogodski and Ya.S. Soibelman*, Algebra of functions on quantum groups: Part 1. Amer. Math. Soc., Providence, RI (1998).

[14] *M. Hamana*, Injective envelopes of operator systems. — *Publ. RIMS Kyoto Univ.* (1979), v. 15, p. 773–785.

[15] *Л.Л. Ваксман, Я.С. Сойбельман*, Алгебра функций на квантовой группе $SU(n + 1)$ и нечетномерные квантовые сферы. — *Алгебра и анализ* (1990), v. 2(5), p. 101–120.

[16] *Г. Гаспер, М. Рахман,* Базисные гипергеометрические ряды. Мир, Москва (1993).

[17] *J.C. Jantzen,* Lectures on Quantum Groups. Amer. Math. Soc., Providence, RI (1996).

Maximum principle for "holomorphic functions" in the quantum ball

L. Vaksman

In the framework of quantum group theory non-commutative analogues of function algebras in the ball are studied. A description of the Shilov boundary for an algebra of "holomorphic functions". In the paper methods of the theory of unitary dilations are used essentially.