Математическая физика, анализ, геометрия
2003, т. 10, № 1, с. 40–48

О поведении изопериметрической разности при переходе к параллельному телу и одном уточнении обобщенного неравенства Хадвигера

В.И. Дискант

Черкасский государственный технологический университет
бульв. Шевченко, 460, Черкассы, 18006, Украина
E-mail:diskant@chiti.uch.net

Статья поступила в редакцию 17 декабря 2001 г.
Представлена А.А. Борисенко

Доказаны следующие неравенства:

$$V_1^n(A,B) - V(B)V^{n-1}(A) \geq V_1^n(A_{-p}(B),B) - V(B)V^{n-1}(A_{-p}(B)),$$

$$V_1^n(A,B) - V(B_A)V^{n-1}(A) \geq V_1^n(A_{-p}(B),B) - V(B_A)V^{n-1}(A_{-p}(B)),$$

$$S^n(A,B) \geq n^n V(B_A)V^{n-1}(A) + S^n(A_{-q}(B),B),$$

в которых $V(A)$, $V(B)$ — объемы выпуклых тел A и B в R^n ($n \geq 2$), $V_1(A,B)$ — первый смешанный объем тел A и B, $S(A,B) = nV_1(A,B)$, q — коэффициент вместимости B в A, $p \in [0,q]$, $A_{-p}(B)$ — внутреннее тело, параллельное телу A относительно B на расстоянии p, B_A — форм-тело тела A относительно B. Левая часть первого неравенства — изопериметрическая разность для A относительно B. Первое неравенство утверждает, что при переходе от A к $A_{-p}(B)$ изопериметрическая разность относительно B не увеличивается. Второе неравенство уточняет первое с учетом особенностей на границе тела A относительно B. Третье уточняет обобщение неравенства Хадвигера [4] с учетом невырожденности $A_{-q}(B)$.

Доведено наступні нерівності:

$$V_1^n(A,B) - V(B)V^{n-1}(A) \geq V_1^n(A_{-p}(B),B) - V(B)V^{n-1}(A_{-p}(B)),$$

$$V_1^n(A,B) - V(B_A)V^{n-1}(A) \geq V_1^n(A_{-p}(B),B) - V(B_A)V^{n-1}(A_{-p}(B)),$$

$$S^n(A,B) \geq n^n V(B_A)V^{n-1}(A) + S^n(A_{-q}(B),B),$$

Mathematics Subject Classification 2000: 52A38, 52A40.

в яких $V(A)$, $V(B)$ — об'єми опуклих тіл A та B в R^n ($n \geq 2$), $V_1(A,B)$ — перший змішаний об'єм тіл A та B, $S(A,B) = nV_1(A,B)$, q — коефіцієнт місткості B в A, $p \in [0,q]$, $A_{-p}(B)$ — внутрішнє тіло, яке паралельне тілу A відносно B на відстані p, B_A – форм-тіло тіла A відносно B. Ліва частина першої нерівності — ізопериметрична різниця для A відносно B. Перша нерівність стверджує, що при переході від A до $A_{-p}(B)$ ізопериметрична різниця відносно B не збільшується. Друга нерівність уточнює першу з урахуванням особливостей на границі тіла A відносно B. Третя уточнює узагальнення нерівності Хадвігера [4] з урахуванням невиродженості $A_{-q}(B)$.

Пусть A и B — выпуклые тела n-мерного евклидова пространства R^n ($n \geq 2$), E — единичный шар, центр которого совпадает с началом координат в R^n.

Для объема $V(A+\lambda E)$, $\lambda \geq 0$, имеет место формула Штейнера

$$V(A+\lambda E) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k V_{n-k}(A)\lambda^k,$$

в которой $V_{n-k}(A)$ — $(n-k)$-я основная мера тела A, $V_n(A) = V(A)$, $nV_{n-1}(A) = S(A)$ — площадь поверхности тела A [1]. Из формулы Штейнера следует, что

$$S(A) = \lim_{\lambda \to +0} \frac{V(A+\lambda E) - V(A)}{\lambda}.$$

Г. Минковский [2] получил обобщение формулы Штейнера в виде

$$V(A+\lambda B) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k V_k(A,B)\lambda^k,$$

где $V_k(A,B)$ — k-й смешанный объем тел A и B, $V_0(A,B) = V(A)$. Из формулы Минковского следует, что

$$nV_1(A,B) = \lim_{\lambda \to +0} \frac{V(A+\lambda B) - V(A)}{\lambda}.$$

Это дает основание называть величину $nV_1(A,B)$ площадью поверхности тела A относительно тела B и обозначать ее через $S(A,B)$.

Первое неравенство Минковского для смешанных объемов выпуклых тел имеет следующий вид [3]:

$$V_1^n(A,B) - V(B)V^{n-1}(A) \geq 0. \tag{1}$$

Неравенство (1) равносильно изопериметрическому неравенству Минковского

$$S^n(A,B) - n^n V(B)V^{n-1}(A) \geq 0. \tag{2}$$

Следствием (2) при $B = E$ является классическое изопериметрическое неравенство
$$S^n(A) - n^n V(E) V^{n-1}(A) \geq 0. \tag{3}$$

Обычно левую часть (2) называют изопериметрической разностью для A относительно B. В настоящей работе для упрощения выкладок под изопериметрической разностью будем понимать левую часть (1), т.е. величину $\Delta(A, B) = V_1^n(A, B) - V(B) V^{n-1}(A)$.

Разностью Минковского $D = A/B$ выпуклых тел A и B назовем множество всех точек $\bar{d} \in R^n$, для каждой из которых $\bar{d} + B \subset A$[1]. Известно, что тело D выпукло и подвергается параллельному переносу при изменении начала координат. Коэффициентом вместимости $q = q(A, B)$ тела B в тело A назовем наибольшее из чисел α таких, что тело αB параллельным сдвигом помещается в A [4]. Тело $A_{-p}(B) = A/(pB)$, $0 \leq p \leq q$, назовем внутренним телом, параллельным телу A относительно тела B на расстоянии p.

Теорема 1. *Для выпуклых тел A и B в R^n имеет место неравенство*
$$V_1^n(A, B) - V(B) V^{n-1}(A) \geq V_1^n(A_{-p}(B), B) - V(B) V^{n-1}(A_{-p}(B)), \ 0 \leq p \leq q. \tag{4}$$

Теорема 1 утверждает, что при переходе от данного тела A к внутреннему телу, параллельному телу A относительно тела B, величина $\Delta(A, B)$ не увеличивается.

А.Д. Александров [5] ввел в рассмотрение следующее понятие выпуклого тела с данной областью задания опорной функции. Пусть Ω' — замкнутое, не лежащее в одной замкнутой полусфере множество единичной сферы Ω — границы шара E, $H^*(\bar{u})$ — непрерывная, положительная функция, определенная на Ω'. Рассмотрим в R^n гиперплоскость $T(\bar{u})$, ортогональную вектору $\bar{u}$, $\bar{u} \in \Omega'$, и отстоящую от начала координат на расстоянии $H^*(\bar{u})$ в направлении $\bar{u}$. Обозначим через $\overline{T(\bar{u})}$ замкнутое полупространство, ограниченное $T(\bar{u})$ и содержащее начало координат. Выпуклое тело $N = \cap_{\bar{u} \in \Omega'} \overline{T(\bar{u})}$ А.Д. Александров назвал выпуклым телом с данной областью задания Ω' опорной функции. В дальнейшем будем пользоваться обозначением $N = (\Omega', H^*(\bar{u}))$.

Так как в работе будут рассматриваться функционалы, инвариантные относительно параллельных переносов, то выбор начала координат в R^n не играет роли. Будем считать, что $qB \subset A$ и начало координат $\bar{o}$ — внутренняя точка B. Тогда $A = (\Omega, H_A(\bar{u}))$, т.к. $H_A(\bar{u}))$ — непрерывна и положительна на Ω. В [4] показано, что для A существует минимальная область $\Omega' = \Omega_A$ такая, что $A = (\Omega_A, H_A^*(\bar{u}))$, где $H_A^*(\bar{u})$ — ограничение опорной функции $H_A(\bar{u})$ тела A на Ω_A. Например, в случае, если A — многогранник в R^n,

Ω_A — совокупность единичных внешних нормалей к граням A. Назовем тело $B_A = (\Omega_A, H_B^*(\bar{u}))$ форм-телом тела A относительно тела B [4]. Отметим, что $B \subset B_A$. Тело B_A учитывает особенности на границе тела A относительно тела B.

Теорема 2. *Для выпуклых тел A и B в R^n имеет место неравенство*

$$V_1^n(A,B) - V(B_A)V^{n-1}(A) \geq V_1^n(A_{-p}(B),B) - V(B_A)V^{n-1}(A_{-p}(B)). \qquad (5)$$

Ниже будет показано, что $A_{-p}(B) = A_{-p}(B_A)$. Поэтому на (5) можно смотреть как на уточнение (4) с учетом особенностей на границе A относительно тела B.

Г. Хадвигер [6] получил следующее уточнение классического изопериметрического неравенства (3):

$$S^n(A) \geq n^n V(E_A)V^{n-1}(A), \qquad (6)$$

в котором $E_A = (\Omega_A, H_E^*(\bar{u}))$. В [4] неравенство (6) было обобщено в виде

$$S^n(A,B) \geq n^n V(B_A)V^{n-1}(A). \qquad (7)$$

Теорема 3. *Для выпуклых тел A и B в R^n имеет место следующее уточнение обобщенного неравенства Хадвигера (7):*

$$S^n(A,B) \geq n^n V(B_A)V^{n-1}(A) + S^n(A_{-q}(B),B). \qquad (8)$$

Неравенство (8) уточняет обобщенное неравенство Хадвигера (7) с учетом невырожденности $A_{-q}(B)$. В конце работы будут приведены примеры уточнения неравенств (6) и (7) неравенством (8).

Доказательству теорем предпошлем три леммы.

Пусть $N = (\Omega', H^*(\bar{u}))$, C — выпуклое тело в R^n, $H_C(\bar{u})$, $\bar{u} \in \Omega$, — опорная функция тела C, $\overline{C} = (\Omega', H_C^*(\bar{u}))$, $H_C^*(\bar{u})$ — ограничение $H_C(\bar{u})$ на Ω'.

Лемма 1. *Если для любого $\bar{u} \in \Omega'$ выполняется неравенство*

$$H_C(\bar{u}) \leq H^*(\bar{u}),$$

то $C \subset \overline{C} \subset N$.

Доказательство. Для $\bar{u} \in \Omega'$ опорная гиперплоскость $T_C(\bar{u})$ тела C с внешней нормалью $\bar{u}$ параллельна плоскости $T(\bar{u})$. Если $H_C(\bar{u}) \geq 0$, то $T_C(\bar{u})$ отстоит от $\bar{o}$ на расстоянии $H_C(\bar{u})$ в направлении вектора $\bar{u}$. Так как $H_C(\bar{u}) \leq H^*(\bar{u})$ и опорное полупространство $\overline{T_C(\bar{u})}$ содержит начало $\bar{o}$, то $\overline{T_C(\bar{u})} \subset \overline{T(\bar{u})}$. Если же $H_C(\bar{u}) < 0$, то $T_C(\bar{u})$ отстоит от $\bar{o}$ на расстоянии $|H_C(\bar{u})|$ в направлении вектора $-\bar{u}$ и $\overline{T_C(\bar{u})}$ не содержит $\bar{o}$. И в этом случае $\overline{T_C(\bar{u})} \subset \overline{T(\bar{u})}$. Отсюда $C = \cap_{\bar{u}\in\Omega}\overline{T_C(\bar{u})} \subset \overline{C} = \cap_{\bar{u}\in\Omega'}\overline{T_C(\bar{u})} \subset \cap_{\bar{u}\in\Omega'}\overline{T(\bar{u})} = N$. ∎

Предположим, что $A = (\Omega', H_A^*(\bar{u}))$. Рассмотрим тело $\bar{B} = (\Omega', H_B^*(\bar{u}))$ и функцию $H_\sigma^*(\bar{u})) = H_A^*(\bar{u})) - \sigma H_B^*(\bar{u}))$, $\bar{u} \in \Omega'$, $\sigma \in [0, q]$. Из непрерывности опорной функции выпуклого тела на Ω следует, что $H_\sigma^*(\bar{u})$ непрерывна на Ω'. Из включения $qB \subset A$ и выбора начала $\bar{o}$ следует $0 \le H_{qB}(\bar{u}) \le H_A(\bar{u})$ при $\bar{u} \in \Omega$. Отсюда имеем, что $H_\sigma^*(\bar{u}) = H_A^*(\bar{u}) - \sigma H_B^*(\bar{u}) > 0$ при $\bar{u} \in \Omega'$ и $\sigma \in [0, q)$. Тем самым функция $H_\sigma^*(\bar{u})$ задает выпуклое собственное тело $N_\sigma = (\Omega', H_\sigma^*(\bar{u}))$.

Лемма 2. *Для выпуклого тела* $A = (\Omega', H_A^*(\bar{u}))$ *и тела* B

$$N_\sigma = A_{-\sigma}(\bar{B}) = A_{-\sigma}(B), \quad 0 \le \sigma \le q.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что $N_\sigma \subset A_{-\sigma}(\bar{B}) = A/(\sigma\bar{B})$. Пусть точка $\bar{a} \in N_\sigma$. Тогда $H_{\bar{a}}(\bar{u}) \le H_\sigma^*(\bar{u})$ при $\bar{u} \in \Omega'$. Опорная функция $H_{\bar{a}+\sigma\bar{B}}(\bar{u})$ тела $\bar{a}+\sigma\bar{B}$ удовлетворяет неравенству $H_{\bar{a}+\sigma\bar{B}}(\bar{u}) = H_{\bar{a}}(\bar{u}) + \sigma H_{\bar{B}}(\bar{u}) \le H_\sigma^*(\bar{u}) + \sigma H_B^*(\bar{u}) = H_A^*(\bar{u})$ при $\bar{u} \in \Omega'$. Из леммы 1 вытекает, что $\bar{a} + \sigma\bar{B} \subset A$. Отсюда следует, что $\bar{a} \in A/(\sigma\bar{B})$. Покажем теперь, что $A_{-\sigma}(B) \subset N_\sigma$. Для этого покажем, что если точка $\bar{b} \overline{\in} N_\sigma$, то $\bar{b} \overline{\in} A_{-\sigma}(B) = A/(\sigma B)$. Действительно, если $\bar{b} \overline{\in} N_\sigma$, то найдется такое $\bar{u}_0 \in \Omega'$, для которого $H_{\bar{b}}(\bar{u}_0) > H_\sigma^*(\bar{u}_0)$. Следовательно, $H_{\bar{b}}(\bar{u}_0) + \sigma H_B(\bar{u}_0) = H_{\bar{b}}(\bar{u}_0) + \sigma H_B^*(u_0) > H_A^*(\bar{u}_0)$. Это означает, что тело $\bar{b} + \sigma B$ не лежит в A, и таким образом, $\bar{b} \overline{\in} A_{-\sigma}(B) = A/(\sigma B)$. Заметим, что $B \subset \bar{B}$. Отсюда имеем включение $A_{-\sigma}(B) \supset A_{-\sigma}(\bar{B})$. Из включений $N_\sigma \subset A_{-\sigma}(\bar{B}) \subset A_{-\sigma}(B) \subset N_\sigma$ следует утверждение леммы. ■

Объем $V(A_{-\sigma}(B))$ является функцией от σ.

Лемма 3.

$$\frac{dV(A_{-\sigma}(B))}{d\sigma} = -nV_1(A_{-\sigma}(B), B), \quad \sigma \in (0, q). \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство этого утверждения, если в нем $A_{-\sigma}(B)$ заменить на N_σ, разбитое на два случая, приведено в [4]. Здесь представлена основная идея доказательства леммы. Наряду с телом $N = (\Omega', H^*(\bar{u}))$ рассмотрим семейство тел $N_t = (\Omega', H^*(\bar{u}) + t\delta H^*(\bar{u}))$, где $\delta H^*(\bar{u})$ — непрерывная функция, заданная на Ω'. А.Д. Александров [5] показал, что первая вариация объема $V(N)$, т.е. величина

$$\delta V(N) = \lim_{t \to 0} \frac{V(N_t) - V(N)}{t}$$

равна

$$\delta V(N) = \int\limits_{\Omega'} \delta H^*(\bar{u}) F(N, d\omega),$$

где $F(N, d\omega)$ — поверхностная функция тела N [7], для которой в условиях леммы $F(N, \Omega - \Omega') = 0$ [5].

Применяя этот результат к телу $N_\sigma = A_{-\sigma}(B) = (\Omega', H^*_\sigma(\bar{u}))$ и семейству тел $(N_\sigma)_t = (\Omega', H^*_{\sigma+t}(\bar{u})) = (\Omega', H^*_\sigma(\bar{u}) - tH^*_B(\bar{u}))$, получим

$$\frac{dV(A_{-\sigma}(B))}{d\sigma} = -\int\limits_{\Omega'} H_B(\bar{u}) F(A_{-\sigma}(B), d\omega) = -nV_1(A_{-\sigma}(B), B),$$

т.к. $F(A_{-\sigma}(B), \Omega - \Omega') = 0$. ■

Доказательство теоремы 1. Проинтегрируем (9) по σ на промежутке $[0, p]$, $p \in [0, q]$. Учитывая, что $V(A_{-0}(B)) = V(A)$, получим

$$V(A) - V(A_{-p}(B)) = n \int\limits_0^p V_1(A_{-\sigma}(B), B) d\sigma. \tag{10}$$

Для оценки сверху подынтегральной функции в (10) линейной функцией от σ воспользуемся неравенством

$$V_1^{1/(n-1)}(A_{-\sigma}(B) + \sigma B, B) \geq V_1^{1/(n-1)}(A_{-\sigma}(B), B) + \sigma V^{1/(n-1)}(B), \tag{11}$$

которое является следствием обобщенной теоремы Брунна, утверждающей, что функция $f(t) = V_1^{1/(n-1)}(H_t, B)$, где $H_t = (1-t)H_0 + tH_1$, H_0, H_1 — выпуклые тела в R^n, при $t \in [0, 1]$ выпукла вверх [8]. Из включения $A_{-\sigma}(B) + \sigma B \subset A$ и монотонности смешанного объема по каждому из своих аргументов имеем $V_1(A_{-\sigma}(B) + \sigma B, B) \leq V_1(A, B)$. Из (11) и последнего неравенства получаем

$$V_1^{1/(n-1)}(A_{-\sigma}(B), B) \leq V_1^{1/(n-1)}(A, B) - \sigma V^{1/(n-1)}(B). \tag{12}$$

Подставляя (12) в (10), приходим к неравенству

$$V(A) - V(A_{-p}(B)) \leq n \int\limits_0^p \left(V_1^{1/(n-1)}(A, B) - \sigma V^{1/(n-1)}(B) \right)^{n-1} d\sigma,$$

которое, после интегрирования правой части, запишем в виде

$$\begin{gathered} V_1^{n/(n-1)}(A, B) - V^{1/(n-1)}(B) V(A) \\ \geq \left(V_1^{1/(n-1)}(A, B) - pV^{1/(n-1)}(B) \right)^n - V^{1/(n-1)}(B) V(A_{-\sigma}(B)). \end{gathered}$$

Оценив снизу выражение, стоящее в скобках последнего неравенства, с помощью (12) при $\sigma = p$, придем к неравенству

$$V_1^{n/(n-1)}(A,B) - V^{1/(n-1)}(B)V(A)$$
$$\geq V_1^{n/(n-1)}(A_{-p}(B),B) - V^{1/(n-1)}(B)V(A_{-p}(B)). \qquad (13)$$

Положим $V_1^{n/(n-1)}(A,B) = a$, $V^{1/(n-1)}(B)V(A) = b$, $V_1^{n/(n-1)}(A_{-p}(B),B) = c$, $V^{1/(n-1)}(B)V(A_{-p}(B)) = d$. Так как $A_{-p}(B) \subset A$, то $a \geq c$, $b \geq d$. Тогда $a^{n-2} + a^{n-3}b + \ldots + ab^{n-3} + b^{n-2} \geq c^{n-2} + c^{n-3}d + \ldots + cd^{n-3} + d^{n-2}$. Умножая при $n \geq 3$ правую часть (13) на правую часть последнего неравенства, левую часть (13) — на левую, придем к утверждению теоремы 1. ■

Доказательство теоремы 2. Доказательство аналогично доказательству теоремы 1, если в нем оценку (12) для подынтегральной функции в (10) заменить на более точную оценку, полученную ниже. Из утверждения леммы 2 следует, что $A_{-\sigma}(B_A) = A_{-\sigma}(B)$. Это дает возможность уточнить оценку сверху (12) подынтегральной функции в (10) линейной функцией от σ.

Действительно, вместо (11) имеем

$$V_1^{1/(n-1)}(A_{-\sigma}(B) + \sigma B_A, B) \geq V_1^{1/(n-1)}(A_{-\sigma}(B), B) + \sigma V_1^{1/(n-1)}(B_A, B).$$

При этом $A_{-\sigma}(B) + \sigma B_A = A_{-\sigma}(B_A) + \sigma B_A \subset A$ и

$$V_1(B_A,B) = \frac{1}{n}\int\limits_{\Omega} H_B(\bar{u})F(B_A,d\omega) = \frac{1}{n}\int\limits_{\Omega_A} H_B(\bar{u})F(B_A,d\omega)$$

$$= \frac{1}{n}\int\limits_{\Omega_A} H_{B_A}(\bar{u})F(B_A,d\omega) = \frac{1}{n}\int\limits_{\Omega} H_{B_A}(\bar{u})F(B_A,d\omega) = V(B_A),$$

т.к. $H_B(\bar{u}) = H_{B_A}(\bar{u})$ при $\bar{u} \in \Omega_A$ и $F(B_A, \Omega - \Omega_A) = 0$ [5]. Это приводит к следующей оценке для $V_1(A_{-\sigma}(B), B)$:

$$V_1^{1/(n-1)}(A_{-\sigma}(B),B) \leq V_1^{1/(n-1)}(A,B) - \sigma V^{1/(n-1)}(B_A),$$

применение которой вместо (12) дает возможность получить утверждение теоремы 2. ■

Доказательство теоремы 3. Отметим, что тело $A_{-q}(B)$ не содержит внутренних точек, т.к. в противном случае в A можно было бы вложить тело $q'B$, где $q' > q$, а это противоречит определению коэффициента вместимости тела B в тело A. Следовательно, $V(A_{-q}(B)) = 0$. Полагая в (5) $p = q$ и умножая обе части полученного неравенства на n^n, придем к утверждению теоремы 3. ■

В заключение приведем примеры, из которых следует, что (8) действительно является уточнением (6) и (7).

Приведем пример, в котором (8) уточняет (6). Возьмем в R^2 выпуклую фигуру A — прямоугольник, вершины которого в декартовой прямоугольной системе координат xoy имеют координаты $(-3,-1)$, $(-3,1)$, $(3,1)$, $(3,-1)$. Пусть B — единичный круг R^2 с центром в начале координат. Заметим, что на уточнение изопериметрического неравенства можно смотреть как на уточнение оценки снизу для относительной площади $S(A,B)$, которую дает изопериметрическое неравенство. При этом уточнения являются следствием геометрических особенностей тела A по отношению к телу B. В приведенном примере $B = E$, $S(A,E) = l(A) = 16$ — периметр A, $V(A) = S(A) = 12$ — площадь A. Классическое изопериметрическое неравенство (3) $l^2 \geq 4\pi S(A)$ для $l^2 = 256$ дает оценку снизу, равную 48π, неравенство Хадвигера (6) $l^2(A) \geq 4S(E_A)S(A)$ для $l^2(A)$ дает оценку снизу, равную 192, большую, чем 48π (E_A — квадрат, описанный около E, со сторонами, параллельными осям координат), неравенство (8) $l^2(A) \geq 4S(E_A)S(A) + l^2(A_{-1}(E))$ для $l^2(A)$ дает оценку снизу, равную $192 + 8^2 = 256$. В этом примере $q = 1$ и $A_{-1}(E)$ — отрезок O_1O_2 на оси x, где $O_1(-2,0), O_2(2,0)$. Отрезок O_1O_2 как выпуклая фигура R^2 имеет периметр, равный 8. Оценка снизу для $l^2(A)$, полученная с помощью (8), в этом примере является не только самой точной из приведенных трех оценок, но и точной, т.к. не может быть улучшена.

Приведем пример, в котором (8) уточняет (7). Пусть A — тот же прямоугольник в R^2, что и в предыдущем примере, B — квадрат с вершинами $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,-1)$. В этом примере $S(A,B) = 2V_1(A,B) = 2\left(\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{4} a_i h_B(\bar{u}_i)\right) = 2\cdot 1 + 6\cdot 1 + 2\cdot 1 + 6\cdot 1 = 16$ (a_i — длины сторон A, $h_B(\bar{u}_i)$ — соответствующие a_i опорные числа B). Изопериметрическое неравенство (2) $S^2(A,B) \geq 4S(B)S(A)$ дает для $S^2(A,B) = 256$ оценку снизу, равную 96, т.к. $S(B) = 2$, обобщенное неравенство Хадвигера (7) $S^2(A,B) \geq 4S(B_A)S(A)$ — оценку 192, т.к. $B_A = E_A$, уточнение (8) $S^2(A,B) \geq 4S(B_A)S(A) + S^2(A_{-1}(B),B)$ — оценку 256, т.к. и в этом примере $q = 1, A_{-1}(B)$ — отрезок O_1O_2. И в этом примере оценка снизу для $S^2(A,B)$, полученная с помощью (8), является точной.

Список литературы

[1] *К. Лейхтвейс*, Выпуклые множества. Наука, Москва (1985).

[2] *T. Bonnesen und W. Fenchel*, Theorie der konvexen Körper. Springer, Berlin (1934).

[3] *H. Minkowski*, Volumen und Oberfläche. — *Ges. Abhandlungen.* Leipzig, Berlin (1911), Bd. 2, S. 230–276.

[4] *В.И. Дискант*, Уточнения изопериметрического неравенства и теоремы устойчивости в теории выпуклых тел. — В кн.: Современные проблемы геометрии и анализа. Наука, Новосибирск (1989), т. 14, с. 98–132.

[5] *А.Д. Александров*, К теории смешанных объемов выпуклых тел. III. Распространение двух теорем Минковского о выпуклых многогранниках на произвольные выпуклые тела. — *Мат. сб.* (1938), т. 3 (45), № 1, с. 27–44.

[6] *Г. Хадвигер*, Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. Наука, Москва (1966).

[7] *А.Д. Александров*, К теории смешанных объемов выпуклых тел. I. Расширение некоторых понятий теории выпуклых тел. — *Мат. сб.* (1937), т. 2 (44), № 5, с. 947–970.

[8] *Г. Буземан*, Выпуклые поверхности. Наука, Москва (1964).

About the behavior of isoperimetric difference when turning to parallel body and proving the generalized inequality of Hadwiger

V.I. Diskant

The following inequalities are proved:

$$V_1^n(A,B) - V(B)V^{n-1}(A) \geq V_1^n(A_{-p}(B),B) - V(B)V^{n-1}(A_{-p}(B)),$$

$$V_1^n(A,B) - V(B_A)V^{n-1}(A) \geq V_1^n(A_{-p}(B),B) - V(B_A)V^{n-1}(A_{-p}(B)),$$

$$S^n(A,B) \geq n^n V(B_A)V^{n-1}(A) + S^n(A_{-q}(B),B),$$

in which $V(A)$, $V(B)$ — the volumes of convex bodies A and B in R^n $(n \geq 2)$, $V_1(A,B)$ — first mixed volume bodies A and B, $S(A,B) = nV_1(A,B)$, q — coefficient of capacity B in A, $p \in [0,q]$, $A_{-p}(B)$ — internal body which is to parallel to body A relatively to B on the distance p, B_A — form-body of body A relatively to B. The left part of the first inequality is the isoperimetric difference of A relatively to B. The first inequality confirms that when turning from A to $A_{-p}(B)$ the isoperimetric difference relatively to B does not increase. The second inequality proves the first one taking into account the peculiarities on the border of body A relatively to B. The third inequality proves the generalization of the inequality of Hadwiger [4] taking into account the degeneracy of $A_{-q}(B)$.