Математическая физика, анализ, геометрия
2003, т. 10, № 2, с. 135–146

О малых движениях намагничивающейся вязкой жидкости

И.Д. Борисов, Т.Ю. Яценко

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы 4, Харьков, 61077, Украина
E-mail:dream@bi.com.ua

Статья поступила в редакцию 20 марта 2002 г.
Представлена Е.Я. Хрусловым

Приводится общая постановка задачи о малых движениях намагничивающейся вязкой жидкости в частично заполненном сосуде. Задача сводится к операторно-дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве. Доказана корректная разрешимость задачи Коши для этого уравнения. Установлены некоторые свойства спектра частот свободных колебаний такой жидкости.

Наведено загальну постановку задачі про малі рухи в'язкої рідини, яка намагнічується у частково заповненому сосуді. Задачу зведено до операторно-диференціального рівняння у гільбертовому просторі. Доведено коректну розв'язність задачі Коші для цього рівняння. Встановлено деякі властивості спектра частот вільних коливань такої рідини.

Исследованию движений намагничивающейся жидкости со свободной поверхностью посвящено большое число работ (см. [1–5]). Наиболее подробно изучены малые (линейные) колебания жидкости вблизи состояния равновесия. Вместе с тем математические вопросы линейной теории до сих пор остаются практически полностью неисследованными. В данной работе в рамках уравнений феррогидродинамики сред с равновесной намагниченностью приведена общая постановка задачи о малых движениях вязкой жидкости в частично заполненном сосуде с учетом сил поверхностного натяжения. Доказана корректная разрешимость начально-краевой задачи, установлены некоторые общие свойства спектра частот и мод собственных колебаний жидкости.

Mathematics Subject Classification 2000: 76W05, 47B325 (Primary), 76D05, 47A11, 47A56 (Secondary).

1. Постановка задачи

Рассмотрим замкнутый сосуд, заполненный однородной несжимаемой жидкостью и газом, находящимися под действием сил поверхностного натяжения, постоянного магнитного и однородного гравитационного полей. Будем считать, что жидкость и газ неэлектропроводны, а их пондеромоторное взаимодействие с магнитным полем обусловлено намагничиванием сред. Движением газа будем пренебрегать.

Обозначим через Ω_1, Ω_2 области, занятые жидкостью и газом в состоянии покоя, через $\Omega_3 = R^3 \setminus \overline{\Omega}$ — неограниченную область вне полости сосуда Ω. Пусть Γ — свободная поверхность жидкости в состоянии покоя, S — замкнутая поверхность полости сосуда, S_1, S_2 – поверхности контакта жидкости и газа, соответственно, со стенкой сосуда ($S = \overline{S_1 \cup S_2}$).

Предположим, что магнитное поле создается токами, распределенными в некоторой подобласти Ω_3' области Ω_3, причем объемная плотность токов $\vec{j}(\vec{x})$, $\vec{x} \in \Omega_3'$, при движении жидкости остается неизменной. Среду в области Ω_3 для простоты будем считать однородно намагничивающейся. Связь между индукцией $\vec{B}(\vec{x})$ и напряженностью $\vec{H}(\vec{x})$ магнитного поля в каждой из областей Ω_k, $k = \overline{1,3}$, запишем в виде

$$\vec{B}^{(k)} = \overset{0}{\mu}_k \vec{H}^{(k)}, \quad \overset{0}{\mu}_k = \overset{0}{\mu}_k (H^{(k)}), \quad k = \overline{1,3},$$

где $\overset{0}{\mu}_k$ — абсолютная магнитная проницаемость k-й среды, предполагаемая заданной функцией модуля напряженности магнитного поля. Функции $\overset{0}{\mu}_k (H)$, $\vec{H}^{(k)}(\vec{x})$, $k = \overline{1,3}$, в дальнейшем будем считать достаточно гладкими.

Пусть $\vec{v}(t,\vec{x})$ — поле скоростей жидкости, $\psi(t,\vec{x})$ — потенциал возмущения магнитного поля, вызываемого движением жидкости, $\zeta(t,\xi^1,\xi^2)$ — отклонение подвижной свободной поверхности $\Gamma'(t)$ от равновесной поверхности Γ, отсчитываемое вдоль внешней относительно Ω_1 нормали $\vec{n}$ (ξ^1, ξ^2 — криволинейные координаты на Γ).

В линейном приближении движение жидкости вблизи равновесного состояния описывается следующей системой уравнений, граничных и начальных условий:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \triangle \vec{v} + \vec{f}, \quad \mathrm{div}\vec{v} = 0, \qquad (\text{в } \Omega_1), \tag{1}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_n (:= \vec{n} \cdot \vec{v}), \qquad (\text{на } \Gamma), \tag{2}$$

$$v_{\alpha,3} + v_{3,\alpha} = 0, \quad \alpha = 1,2 \qquad (\text{на } \Gamma), \tag{3}$$

$$p - 2\rho\nu v_{3,3} = \sigma\left(-\triangle_\Gamma\zeta + a\zeta\right) + \left\{B_n\frac{\partial\psi}{\partial\hat{n}} - \vec{B}_\tau\cdot\nabla_\Gamma\psi\right\}_\Gamma, \qquad (\text{на } \Gamma), \quad (4)$$

$$\zeta = 0, \qquad (\text{на } \partial\Gamma), \quad (5)$$

$$\vec{v} = 0, \qquad (\text{на } S), \quad (6)$$

$$\mathrm{div}\mu_k\hat{\nabla}\psi^{(k)} = 0, \qquad k = \overline{1,3} \qquad (\text{в } \Omega_k), \quad (7)$$

$$\{\psi\}_\Gamma = \{H_n\}_\Gamma\,\zeta, \quad \left\{\mu\frac{\partial\psi}{\partial\hat{n}}\right\}_\Gamma = -\left\{\mathrm{div}_\Gamma\zeta\vec{B}_\tau\right\}_\Gamma, \qquad (\text{на } \Gamma), \quad (8)$$

$$\{\psi\}_S = 0, \quad \left\{\mu\frac{\partial\psi}{\partial\hat{n}}\right\}_S = 0, \qquad (\text{на } S), \quad (9)$$

$$\psi(t,\vec{x}) \to 0 \quad \text{при} \quad |\vec{x}| \to \infty, \quad (10)$$

$$\vec{v}(0,\vec{x}) = \vec{v}_0(\vec{x}), \quad \zeta(0,\xi) = \zeta_0(\xi), \quad (11)$$

$$\hat{\nabla}(\cdot) := \left(\nabla + \frac{\mu_H\vec{H}}{\mu H}(\vec{H}\cdot\nabla)\right)(\cdot), \qquad \mu(\vec{x}) := \overset{0}{\mu}(H(\vec{x})),$$

$$\mu_H(\vec{x}) := \frac{d\overset{0}{\mu}(H(\vec{x}))}{dH}, \qquad \frac{\partial(\cdot)}{\partial\hat{n}} := \vec{n}\cdot\hat{\nabla}(\cdot);$$

$$a := \frac{\rho}{\sigma}\vec{g}\cdot\vec{n} - (k_1^2 + k_2^2) + \frac{1}{\sigma}\left\{\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} b^{\alpha\beta}H_\alpha H_\beta - (k_1+k_2)H_nB_n\right\}_\Gamma.$$

Здесь ρ, ν — плотность и коэффициент кинематической вязкости жидкости; σ — коэффициент поверхностного натяжения на Γ; $\vec{f}$ — плотность возмущения внешнего поля массовых сил; H_n, $\vec{H}_\tau$ — проекция на нормаль и касательная составляющая напряженности магнитного поля на Γ; k_1, k_2 — главные кривизны поверхности Γ; $b^{\alpha\beta}$ — контравариантные составляющие второго метрического тензора поверхности Γ; $\nabla_\Gamma(\cdot)$ — градиент скалярных функций, заданных на Γ; $\mathrm{div}_\Gamma(\cdot)$ — поверхностная дивергенция касательного поля векторов на Γ; $\Delta_\Gamma = \mathrm{div}_\Gamma\nabla_\Gamma$ — оператор Лапласа–Бельтрами на Γ. Граничные условия (3),(4) записаны в криволинейной системе координат $O\xi^1\xi^2\xi^3$, координата ξ^3 которой отсчитывается по нормали $\vec{n}$ к Γ. Фигурные скобки в (4)–(9) означают скачок заключенной в них величины на соответствующей поверхности раздела двух сред, $\{A\}_\Gamma = (A^{(2)} - A^{(1)})|_\Gamma$.

Из второго уравнения (1) и условия прилипания (6) следует

$$\int_\Gamma \zeta d\Gamma = 0, \qquad \forall t \geq 0. \quad (12)$$

Начальное отклонение свободной поверхности $\zeta_0(\xi)$ должно удовлетворять условию (12).

Отметим, что (1)–(10) получены линеаризацией уравнений и граничных условий феррогидродинамики [1, 2] с использованием условий равновесия изотропно намагничивающейся капиллярной жидкости [6]. В рассматриваемом случае классическая задача о малых движениях капиллярной вязкой жидкости [7] дополняется уравнениями и граничными условиями (7)–(10), определяющими возмущения магнитного поля по возмущениям свободной поверхности Г. Кроме того, граничное условие (4) для скачка нормального напряжения на Г содержит дополнительное слагаемое, обусловленное поляризационными силами магнитного поля. Отметим также, что функция $p(t,\vec{x})$ в (1), (4) при учете намагниченности имеет несколько отличающийся от классического случая физический смысл, т.к. помимо динамической составляющей давления p' включает в себя также "потенциал" возмущения объемной плотности магнитных сил

$$p = p' + \mu_0 \vec{M} \cdot \nabla\psi,$$

где μ_0 — магнитная постоянная, $\vec{M}$ — намагниченность жидкости в равновесном состоянии.

Далее будем предполагать, что дифференциальный оператор $\mathrm{div}\mu_k \hat{\nabla}(\cdot)$ является равномерно эллиптическим в Ω_k:

$$m_0|\vec{\eta}|^2 \le \mu_k(\vec{x})|\vec{\eta}|^2 + \frac{\mu_H^{(k)}(\vec{x})}{H^{(k)}(\vec{x})}(\vec{\eta}\cdot\vec{H}^{(k)}(\vec{x}))^2 \le m^0|\vec{\eta}|^2, \qquad \forall\vec{x}\in\Omega_k, \quad \forall\vec{\eta}\in R^3 \quad k=\overline{1,3}, \tag{13}$$

где m_0, m^0 — некоторые положительные постоянные. Условие (13) выполняется для достаточно общих законов намагничивания сред, включая закон Ланжевена, линейное намагничивание и другие случаи, часто встречающиеся в прикладных исследованиях.

2. Дифференциально-операторная формулировка задачи

Сформулируем задачу (1)–(11) в виде задачи Коши для операторно-дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве. Ограничимся при этом рассмотрением случая, когда свободная поверхность жидкости не пересекается со стенкой сосуда ($\Gamma \cap S = \emptyset$). Будем считать Γ и S достаточно гладкими поверхностями, гомеоморфными сфере, причем $\partial\Omega_1 = \Gamma \cup S$ (жидкость полностью смачивает стенку сосуда), $\partial\Omega_2 = \Gamma$. Условие (5) в рассматриваемом случае необходимо отбросить.

Обозначим через $\mathcal{L}$ эллиптический дифференциальный оператор, определенный равенством

$$\mathcal{L}\zeta := \sigma(-\triangle_\Gamma + a(\vec{x}))\zeta\,.$$

Определим в $\mathcal{H} := \mathcal{L}_2(\Gamma) \ominus \{1\}$ оператор $\mathcal{B}_0$, полагая

$$\mathcal{B}_0\zeta := \mathcal{P}_{\mathcal{H}}\mathcal{L}\zeta = \mathcal{L}\zeta - (\operatorname{mes}\Gamma)^{-1}\int_\Gamma (\mathcal{L}\zeta)d\Gamma, \qquad D(\mathcal{B}_0) := \mathcal{H}^2(\Gamma) \cap \mathcal{H}, \tag{14}$$

где $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}$ — ортопроектор на подпространство $\mathcal{H}$ в $\mathcal{L}_2(\Gamma)$, $\mathcal{H}^2(\Gamma)$ — пространство С.Л. Соболева скалярных функций, принадлежащих $\mathcal{L}_2(\Gamma)$ вместе со всеми обобщенными производными до второго порядка включительно. Как известно [7], $\mathcal{B}_0$ — самосопряженный полуограниченный снизу оператор в $\mathcal{H}$

$$(\mathcal{B}_0\zeta, \zeta)_{\mathcal{L}_2(\Gamma)} \geq C_0\|\zeta\|^2_{\mathcal{L}_2(\Gamma)}, \qquad \forall\zeta \in \mathcal{H}, \tag{15}$$

где C_0 — постоянная, зависящая от физических параметров рассматриваемой системы. Имеет место следующее неравенство:

$$C_1\left(\|\mathcal{B}_0\zeta\|_{\mathcal{L}_2(\Gamma)} + \|\zeta\|_{\mathcal{L}_2(\Gamma)}\right) \geq \|\zeta\|_{\mathcal{H}^2(\Gamma)}, \qquad \forall\zeta \in D(\mathcal{B}_0), \tag{16}$$

являющееся очевидным следствием хорошо известных априорных оценок решений эллиптических уравнений [8].

В принятых выше предположениях для $\forall\zeta \in \mathcal{H}^{1/2}(\Gamma)$ существует единственное обобщенное решение $\psi = \mathcal{M}\zeta$ краевой задачи (7)–(10) ($\mathcal{M}$ — разрешающий оператор данной задачи), причем

$$\sum_{k=1}^{3} \|\nabla\psi^{(k)}\|_{\vec{\mathcal{L}}_2(\Omega_k)} \leq C_2\|\zeta\|_{\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma)}, \tag{17}$$

если $\zeta \in \mathcal{H}^{3/2}(\Gamma)$, то $\psi^{(k)} \in \vec{\mathcal{H}}^2(\Omega_k)$, $k = 1, 2$, $\psi^{(3)} \in \vec{\mathcal{H}}^2_{loc}(\Omega_3)$

$$\|\psi^{(1)}\|_{\vec{\mathcal{H}}^2(\Omega_1)} + \|\psi^{(2)}\|_{\vec{\mathcal{H}}^2(\Omega_2)} + \|\psi^{(3)}\|_{\vec{\mathcal{H}}^2_{loc}(\Omega_3)} \leq C_3\|\zeta\|_{\mathcal{H}^{3/2}(\Gamma)}, \tag{18}$$

где C_2, C_3 — некоторые положительные постоянные, не зависящие от ζ, $\mathcal{H}^s(\Gamma)$ — пространства Соболева–Слободецкого с вещественным показателем s, $\vec{\mathcal{H}}^2_{loc}(\Omega_3)$ — пространство функций, принадлежащих $\vec{\mathcal{H}}^2(\Omega_3'')$ для любого компакта $\Omega_3'' \subset \Omega_3 \cup S$. Существование и единственность решения краевой задачи (7)–(10), а также оценки (17), (18) легко следуют из общих результатов о разрешимости краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами при старших производных (см. [9, гл. 3, § 16]).

Обозначим через $\gamma^{(k)}$ — оператор следа, сопоставляющий произвольной функции $\psi^{(k)} \in \mathcal{H}^s(\Omega_k)$ ее значение на поверхности Γ: $\gamma^{(k)}\psi^{(k)} := \psi^{(k)}\big|_\Gamma$. Определим оператор $\hat{\gamma}_n^{(k)}$, полагая

$$\hat{\gamma}_n^{(k)}\psi^{(k)} := \vec{n}\cdot\hat{\nabla}\psi^{(k)}\big|_\Gamma, \qquad k = \overline{1,3}.$$

Как известно [8], операторы $\gamma^{(k)}$, $\hat{\gamma}_n^{(k)}$ ограниченно действуют из $\mathcal{H}^s(\Omega_k)$ в $\mathcal{H}^{s-1/2}(\Gamma)$ и $\mathcal{H}^{s-3/2}(\Gamma)$, соответственно.

Введем оператор $\mathcal{B}_1$:

$$\mathcal{B}_1\zeta := \mathcal{P}_{\mathcal{H}}\left\{B_n(\hat{\gamma}_n\mathcal{M}\zeta) - \vec{B}_\tau\cdot\nabla_\Gamma(\gamma\mathcal{M}\zeta)\right\}_\Gamma = \left\{B_n\frac{\partial\psi}{\partial\hat{n}} - \vec{B}_\tau\cdot\nabla_\Gamma\psi\right\}_\Gamma$$
$$-(\operatorname{mes}\Gamma)^{-1}\int\limits_\Gamma\left\{B_n\frac{\partial\psi}{\partial\hat{n}} - \vec{B}_\tau\cdot\nabla_\Gamma\psi\right\}_\Gamma. \tag{19}$$

Учитывая свойства операторов $\gamma^{(k)}$, $\hat{\gamma}_n^{(k)}$ и оценку (18), нетрудно показать, что $\mathcal{B}_1$ ограниченно действует из $\mathcal{H}^{3/2}(\Gamma)$ в $\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma)$:

$$\|\mathcal{B}_1\zeta\|_{\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma)} \le C_3\|\zeta\|_{\mathcal{H}^{3/2}(\Gamma)}, \qquad \forall\zeta\in\mathcal{H}^{3/2}(\Gamma)\cap\mathcal{H}. \tag{20}$$

Покажем, что $\mathcal{B}_1$ является неограниченным симметрическим оператором в $\mathcal{H}$:

$$(\mathcal{B}_1\zeta,\zeta')_{\mathcal{L}_2(\Gamma)} = (\zeta,\mathcal{B}_1\zeta')_{\mathcal{L}_2(\Gamma)}, \qquad \forall\zeta,\zeta'\in D(\mathcal{B}_1) = \mathcal{H}^{3/2}(\Gamma)\cap\mathcal{H}. \tag{21}$$

Обозначим через $\psi' = \mathcal{M}\zeta'$ потенциал возмущений магнитного поля, отвечающий возмущениям ζ' свободной поверхности жидкости. Из уравнений (7) и аналогичных уравнений для функций $\psi'^{(k)}$, $k=\overline{1,3}$, с учетом легко проверяемого равенства $\hat{\nabla}\psi^{(k)}\cdot\nabla\psi'^{(k)} = \nabla\psi^{(k)}\cdot\hat{\nabla}\psi'^{(k)}$ получим

$$\operatorname{div}\mu_k\overline{\psi}'^{(k)}\cdot\hat{\nabla}\psi^{(k)} = \operatorname{div}\mu_k\psi^{(k)}\hat{\nabla}\overline{\psi}'^{(k)},$$

где через $\overline{(\cdot)}$ обозначено комплексное сопряжение. Отсюда, учитывая (17), (13), (9), будем иметь

$$\int\limits_\Gamma\left\{\overline{\psi}'^{(k)}\mu\frac{\partial\psi}{\partial\hat{n}}\right\}_\Gamma d\Gamma = \int\limits_\Gamma\left\{\psi\mu\frac{\partial\overline{\psi}'}{\partial\hat{n}}\right\}_\Gamma d\Gamma. \tag{22}$$

Принимая во внимание граничные условия (8), преобразуем левую часть равенства (22) к виду

$$\begin{aligned}
\int\limits_\Gamma\left\{\overline{\psi}'\mu\frac{\partial\psi}{\partial\hat{n}}\right\}_\Gamma d\Gamma &= \int\limits_\Gamma\left\{(\overline{\psi}' - H_n\overline{\zeta}')\mu\frac{\partial\psi}{\partial\hat{n}} + H_n\overline{\zeta}'\mu\frac{\partial\psi}{\partial\hat{n}}\right\}_\Gamma d\Gamma\\
&= \int\limits_\Gamma\left\{B_n\frac{\partial\psi}{\partial\hat{n}}\overline{\zeta}' - (\overline{\psi}' - H_n\overline{\zeta}')\operatorname{div}_\Gamma\zeta\vec{B}_\tau\right\}_\Gamma d\Gamma\\
&= \int\limits_\Gamma\left\{B_n\frac{\partial\psi}{\partial\hat{n}}\overline{\zeta}' + (\vec{B}_\tau\cdot\nabla_\Gamma\overline{\psi}')\zeta + (H_n\operatorname{div}_\Gamma\zeta\vec{B}_\tau)\overline{\zeta}'\right\}_\Gamma d\Gamma.
\end{aligned} \tag{23}$$

Аналогичные выкладки приводят к соотношению

$$\int\limits_{\Gamma} \left\{ \psi\mu \frac{\partial \overline{\psi}'}{\partial \hat{n}} \right\}_{\Gamma} d\Gamma = \int\limits_{\Gamma} \left\{ B_n \frac{\partial \overline{\psi}'}{\partial \hat{n}} \zeta + (\vec{B}_\tau \cdot \nabla_\Gamma \psi)\overline{\zeta}' + (H_n \mathrm{div}\overline{\zeta}' \vec{B}_\tau)\zeta \right\}_{\Gamma} d\Gamma. \quad (24)$$

Учитывая, что в состоянии равновесия $\{\vec{H}_\tau\}_\Gamma = 0$, $\{B_n\}_\Gamma = 0$, и подставляя (23), (24) в (22), получим

$$\int\limits_{\Gamma} \left\{ B_n \frac{\partial \psi}{\partial \hat{n}} - \vec{B}_\tau \cdot \nabla_\Gamma \psi \right\}_{\Gamma} \overline{\zeta}' d\Gamma = \int\limits_{\Gamma} \left\{ B_n \frac{\partial \overline{\psi}'}{\partial \hat{n}} - \vec{B}_\tau \cdot \nabla_\Gamma \overline{\psi}' \right\}_{\Gamma} \zeta d\Gamma. \quad (25)$$

Равенство (25) для $\forall \zeta, \zeta' \in \mathcal{H}^{3/2}(\Gamma) \cap \mathcal{H}$ эквивалентно доказываемому равенству (21).

Определим оператор $\mathcal{B}$, полагая

$$\mathcal{B} := \mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_1, \qquad D(\mathcal{B}) := D(\mathcal{B}_0) = \mathcal{H}^2(\Gamma) \cap \mathcal{H}. \quad (26)$$

Покажем, что $\mathcal{B}$ — самосопряженный полуограниченный снизу оператор в $\mathcal{H}$. С этой целью воспользуемся известным неравенством [8]:

$$\|\zeta\|_{\mathcal{H}^{s_2}(\Gamma)} \le \eta \|\zeta\|_{\mathcal{H}^{s_3}(\Gamma)} + C_\eta \|\zeta\|_{\mathcal{H}^{s_1}(\Gamma)}, \qquad s_1 < s_2 < s_3, \quad (27)$$

где η — произвольное положительное число, C_η — постоянная, зависящая от η. Учитывая (27),(20),(16), получим

$$\|\mathcal{B}_1 \zeta\|_{\mathcal{L}_2(\Gamma)} \le \varepsilon \|\mathcal{B}_0 \zeta\|_{\mathcal{L}_2(\Gamma)} + C_\varepsilon \|\zeta\|_{\mathcal{L}_2(\Gamma)}, \qquad \forall \zeta \in D(\mathcal{B}), \quad (28)$$

где $\varepsilon = \eta C_1^{-1} C_3$ — произвольная положительная постоянная, $C_\varepsilon = C_3(\eta C_1^{-1} + C_\eta)$. Из теоремы Като–Реллиха следует [11], что $\mathcal{B}$ является самосопряженным оператором. В силу полуограниченности снизу оператора $\mathcal{B}_0$ и оценки (28), оператор $\mathcal{B}$ является полуограниченным снизу оператором в $\mathcal{H}$:

$$(\mathcal{B}\zeta, \zeta)_{\mathcal{L}_2(\Gamma)} \ge C_4 \|\zeta\|^2_{\mathcal{H}^2(\Gamma)}, \qquad \forall \zeta \in D(\mathcal{B}),$$

где $C_4 = C_0 - \varepsilon C_0 - C_\varepsilon$ — постоянная, зависящая от физических параметров системы. Если $C_4 > 0$, то $\mathcal{B}$ — положительно определенный оператор в $\mathcal{H}$. Можно показать, что в этом случае энергетическое пространство $\mathcal{H}_\mathcal{B}$ оператора $\mathcal{B}$ совпадает с $\mathcal{H}^1(\Gamma)$. Отсюда следует, что $\mathcal{B}^{-1}$ является компактным оператором в $\mathcal{H}$ [10]. Как известно [6], квадратичная форма $(\mathcal{B}\zeta, \zeta)_{\mathcal{L}_2(\Gamma)}$ представляет собой удвоенную потенциальную энергию рассматриваемой системы. Согласно принципу минимума потенциальной энергии в случае $C_4 > 0$ равновесное состояние системы устойчиво [6]. Ограничиваясь в дальнейшем рассмотрением малых движений жидкости вблизи устойчивого состояния равновесия, будем считать оператор потенциальной энергии $\mathcal{B}$ положительно определенным.

Следуя [7], рассмотрим две вспомогательные краевые задачи.

Первая вспомогательная краевая задача. По функции $\varphi \in \vec{\mathcal{J}}_{0,S}(\Omega_1) = \{\vec{u} \in \vec{\mathcal{L}}_2(\Omega_1) : \mathrm{div}\vec{u} = 0\,(\text{в } \Omega_1),\ u_n = 0\,(\text{на } S)\}$ найти функцию $\vec{u}$, удовлетворяющую следующей системе уравнений и краевых условий:

$$
\begin{aligned}
&-\nu\triangle\vec{u} + \nabla p_1 = \vec{\varphi}, \qquad \mathrm{div}\vec{u} = 0, \qquad (\text{в } \Omega_1),\\
&\vec{u} = 0, \qquad (\text{на } S_1), \qquad u_{i,3} + u_{3,i} = 0, \qquad i = 1,2, \qquad (\text{на } \Gamma),\\
&-p_1 + 2\nu u_{3,3} = 0, \qquad (\text{на } \Gamma).
\end{aligned} \tag{29}
$$

Как известно [7], для $\forall\vec{\varphi} \in \vec{\mathcal{J}}_{0,S}(\Omega_1)$ обобщенное решение краевой задачи (29) можно представить в виде $\vec{u} = \nu^{-1}A^{-1}\vec{\varphi}$, где оператор A является неограниченным самосопряженным положительно определенным в гильбертовом пространстве $\vec{\mathcal{J}}_{0,S}(\Omega_1)$. Оператор $A^{1/2}$ определен на всем пространстве $\vec{\mathcal{J}}^1_{0,S}(\Omega_1) = \{\vec{u} \in \vec{\mathcal{H}}^1(\Omega_1) : \mathrm{div}\,\vec{u} = 0\,(\text{в } \Omega_1), \vec{u} = \vec{0}\,(\text{на } S)\}$. Оператор A^{-1} является компактным оператором в пространстве $\vec{\mathcal{J}}_{0,S}(\Omega_1)$ [7].

Вторая вспомогательная краевая задача. По функции $\phi \in (\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma))^* = \mathcal{H}^{-1/2}(\Gamma)$ найти функцию $\vec{w}$, удовлетворяющую следующей системе уравнений и краевых условий:

$$
\begin{aligned}
&-\nu\triangle\vec{w} + \nabla p_2 = 0, \qquad \mathrm{div}\vec{w} = 0, \qquad (\text{в } \Omega_1),\\
&\vec{w} = 0, \qquad (\text{на } S_1), \qquad w_{i,3} + w_{3,i} = 0, \qquad i = 1,2, \qquad (\text{на } \Gamma),\\
&-p_2 + 2\nu w_{3,3} = \phi, \qquad \int_\Gamma \phi\, d\Gamma = 0, \qquad (\text{на } \Gamma).
\end{aligned} \tag{30}
$$

Оператор T, сопоставляющий функции $\varphi \in \mathcal{H}^{-1/2}(\Gamma)$ слабое решение $\vec{w} = \nu^{-1}T\varphi$ краевой задачи (30), изометрично действует из $\mathcal{H}^{-1/2}(\Gamma)$ в $\vec{\mathcal{J}}^1_{0,S}(\Omega_1)$. Для пространств $\vec{\mathcal{J}}^1_{0,S}(\Omega_1)$, $\vec{\mathcal{J}}_{0,S}(\Omega_1)$ имеют место ортогональные разложения [7]:

$$
\begin{aligned}
&\vec{\mathcal{J}}^1_{0,S}(\Omega_1) = \vec{\mathcal{M}}_1(\Omega_1) \oplus \vec{\mathcal{N}}_1(\Omega_1), \qquad \vec{\mathcal{J}}_{0,S}(\Omega_1) = \vec{\mathcal{M}}_0(\Omega_1) \oplus \vec{\mathcal{N}}_0(\Omega_1),\\
&\vec{\mathcal{M}}_0(\Omega_1) := A^{1/2}\vec{\mathcal{M}}_1(\Omega_1), \qquad \vec{\mathcal{N}}_0(\Omega_1) := A^{1/2}\vec{\mathcal{N}}_1(\Omega_1),
\end{aligned}
$$

где $\vec{\mathcal{M}}_1(\Omega_1)$ — совокупность слабых решений задачи (30), $\vec{\mathcal{N}}_1(\Omega_1)$ — ядро оператора нормального следа на поверхности Γ.

Следуя [7], начально-краевую задачу (1)–(11) представим в виде задачи Коши в гильбертовом пространстве $\mathcal{E} = \vec{\mathcal{J}}_{0,S}(\Omega_1) \oplus \vec{\mathcal{M}}_0(\Omega_1)$:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \mathcal{A}y(t) = F(t), \tag{31}$$

$$y(0) = y_0, \qquad y_0 \in \mathcal{E}, \tag{32}$$

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} \nu A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\nu^{-1}\mathcal{C} & -\nu^{-1}\mathcal{C} \\ \nu^{-1}\mathcal{C} & \nu^{-1}\mathcal{C} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{C} := Q^*\mathcal{B}Q, \quad Q := \gamma_n A^{-1/2}, \quad Q^* := A^{1/2}T,$$

$$F(t) := (A^{1/2}\vec{f}(t); 0)^t.$$

Здесь $y(t) = (\vec{\xi}(t), \vec{\eta}(t))^t \in \mathcal{E}$, $\vec{u} = A^{-1/2}\vec{\xi}$, $\vec{w} = A^{-1/2}\vec{\eta}$, $\vec{u}(t,x)$ — решение краевой задачи (29) при $\vec{\varphi} = \vec{f} - d\vec{v}/dt$, $\vec{w}(t,x)$ — решение краевой задачи (30) при $\phi = \sigma(-\Delta_\Gamma\zeta + a\zeta) + \left\{B_n\partial\psi/\partial\hat{n} - \vec{B}_\tau\cdot\nabla_\Gamma\psi\right\}_\Gamma$, а поле скоростей жидкости представлено в виде $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$. Начальное условие y_0 выражается через начальные условия (11) следующим образом:

$$y_0 = (\vec{\xi}_0, \vec{\eta}_0)^t, \quad \vec{\eta}_0 = -\sigma A^{1/2}T\mathcal{B}\zeta_0, \quad \vec{\xi}_0 = A^{1/2}\vec{v}_0 - \vec{\eta}_0.$$

Аналогично [7] можно показать, что оператор $\mathcal{C}^{-1}$ является компактным в $\vec{\mathcal{M}}_0(\Omega_1)$.

3. Разрешимость задачи Коши. Свойства спектра

Покажем, что при достаточно большой вязкости ν оператор $\mathcal{A}$ допускает оценку

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}y, y)_\mathcal{E} \ge c\|y\|^2_\mathcal{E}, \qquad (y \in D(\mathcal{A})), \tag{33}$$

с некоторой положительной константой c, зависящей от ν и области Ω_1.

Действительно, в силу очевидных оценок будем иметь

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(\mathcal{A}y, y)_\mathcal{E} &= \mathrm{Re}(\nu(A\vec{\xi},\vec{\xi}) + \nu^{-1}(\mathcal{C}\vec{\eta},\vec{\eta}) - \nu^{-1}(\mathcal{C}\vec{\xi},\vec{\xi}) - \nu^{-1}(\mathcal{C}\vec{\eta},\vec{\xi}) \\ &+ \nu^{-1}(\mathcal{C}\vec{\xi},\vec{\eta})) \ge \nu\|A^{1/2}\vec{\xi}\|^2 - \nu^{-1}\|\mathcal{C}^{1/2}\vec{\xi}\|^2 + \nu^{-1}\lambda_1(\mathcal{C})\|\vec{\eta}\|^2, \end{aligned} \tag{34}$$

где $\lambda_1(\mathcal{C})$ — минимальное собственное значение оператора $\mathcal{C}$. Представим оператор $\mathcal{C}^{1/2}$ в виде $\mathcal{C}^{1/2} = \mathcal{R}A^{1/2}$, где $\mathcal{R} = \mathcal{C}^{1/2}A^{-1/2}$ — компактный оператор [7]. Таким образом, из (34) получим

$$\mathrm{Re}\,(\mathcal{A}y, y)_\mathcal{E} \ge (\nu - \nu^{-1}\|\mathcal{R}\|^2)\|A^{1/2}\vec{\xi}\|^2 + \nu^{-1}\lambda_1(\mathcal{C})\|\vec{\eta}\|^2.$$

При достаточно большой вязкости ν будет выполнено условие $\nu - \nu^{-1}\|\mathcal{R}\|^2 > 0$, следовательно,

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}y, y)_{\mathcal{E}} \geq (\nu - \nu^{-1}\|\mathcal{R}\|^2)\lambda_1(A)\|\vec{\xi}\|_+^2 \nu^{-1}\lambda_1(\mathcal{C})\|\vec{\eta}\|^2 \geq c\|y\|_{\mathcal{E}}^2,$$

где $c = \min\{(\nu - \nu^{-1}\|\mathcal{R}\|^2)\lambda_1(A), \nu^{-1}\lambda_1(\mathcal{C})\}$.

Аналогично можно показать, что

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}^* y, y)_{\mathcal{E}} \geq c^*\|y\|_{\mathcal{E}}^2, \qquad (y \in D(\mathcal{A}^*)). \tag{35}$$

Отсюда следует, что оператор $-\mathcal{A} + cI$ является максимальным диссипативным. Для полугруппы $\mathcal{U}(t)$, порождаемой оператором $-\mathcal{A}$, выполнена оценка [12]:

$$\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{E}} \leq \exp(-c_m t), \qquad c_m = \max\{c, c^*\}. \tag{36}$$

Однородная задача Коши (31),(32) для всех $y_0 \in \mathcal{E}$ имеет единственное ослабленное решение $y(t) = \mathcal{U}(t)y_0$ [12]. Для данного решения выполнена экспоненциальная оценка

$$\|y(t)\|_{\mathcal{E}} \leq \exp(-c_m t)\|y_0\|_{\mathcal{E}}.$$

Следовательно, задача Коши (31),(32) является равномерно корректной, а ее решение экспоненциально устойчиво на бесконечности [12].

Если $F(t)$ — непрерывная функция со значениями в $\mathcal{E}$, а $y_0 \in \mathcal{E}$, то неоднородная задача (31),(32) имеет обобщенное решение

$$y(t) = \mathcal{U}(t)y_0 + \int_0^t \mathcal{U}(t-\tau)F(\tau)d\tau. \tag{37}$$

Если $F(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция со значениями в $\mathcal{E}$ и $y_0 \in \mathcal{E}$, то неоднородная задача (31),(32) имеет единственное ослабленное решение $y(t)$, а если $y_0 \in D(\mathcal{A})$, то ослабленное решение является решением неоднородной задачи (31),(32). Ослабленное решение определяется формулой (37).

Таким образом, если для начально-краевой задачи (1)–(11) выполнены условия $\vec{v}_0 \in \vec{\mathcal{J}}^1_{0,S}(\Omega_1)$, $\zeta_0 \in \mathcal{H}^{3/2}(\Gamma)$, а $\vec{f}(t,\vec{x})$ — непрерывная функция t со значениями в $\vec{\mathcal{J}}^1_{0,S}(\Omega_1)$, то эта задача имеет единственное обобщенное решение

$$\vec{v}(t,\vec{x}) = A^{-1/2}(\vec{\xi}(t,\vec{x}) + \vec{\eta}(t,\vec{x})), \tag{38}$$

являющееся непрерывной функцией t со значениями в $\vec{\mathcal{J}}^1_{0,S}(\Omega_1)$.

Если $\vec{f}(t, \vec{x})$ — непрерывно дифференцируемая функция t со значениями в $\vec{\mathcal{J}}^1_{0,S}(\Omega_1)$ и $\vec{v}_0 \in \vec{\mathcal{J}}^1_{0,S}(\Omega_1)$, то $\vec{v}(t, \vec{x})$ является сильным решением, т.е. непрерывно дифференцируемой функцией для всех $t > 0$ со значениями в $\vec{\mathcal{J}}^1_{0,S}(\Omega_1)$.

В случае $F \equiv 0$ уравнение (31), описывающее так называемые свободные нормальные колебания жидкости, допускает решения вида $y = u \exp(-\lambda t)$. Подставляя эти решения в (31), приходим к следующей задаче на собственные значения:

$$\mathcal{A}u = \lambda u. \tag{39}$$

При высказанных предположениях основные свойства спектра задачи (39) совпадают со свойствами спектра задачи о колебаниях капиллярной вязкой жидкости [7]. Укажем некоторые из них:

1. Задача (39) имеет дискретный спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, расположенный в правой полуплоскости, с единственной предельной точкой $\lambda = \infty$.

2. При любом $\varepsilon > 0$ все собственные значения λ_k, за исключением, быть может, конечного их числа, расположены в секторе $|\arg \lambda| < \varepsilon$.

3. Система собственных и присоединенных векторов задачи (39) полна в гильбертовом пространстве $\mathcal{E}$.

Список литературы

[1] *Р.Е. Розенцвейг*, Феррогидродинамика. Мир, Москва (1989).

[2] *Э.Я. Блум, М.М. Майоров, А.О. Цеберс*, Магнитные жидкости. Зинанте, Рига (1989).

[3] *В.М. Коровин*, Неустойчивость и распад тонкого слоя вязкой магнитной жидкости. — *Журн. теорет. физики* (1999), т. 69, вып. 10, с. 14–22.

[4] *В.М. Коровин*, Капиллярная неустойчивость цилиндрической поверхности раздела феррожидкости в магнитном поле с круговыми силовыми линиями. — *Журн. теорет. физики* (2001), т. 71, вып. 10, с. 16–25.

[5] *A. Langer, H. Langer, and A. Engel*, Dynamics of a single peak of the Rosensweig instability in a magneticfluid. — *Physica D* (2000), v. 140, p. 294–305.

[6] *И.Д. Борисов*, Устойчивость равновесия намагничивающейся капиллярной жидкости. — *Магн. гидродинамика* (1983), № 22, с. 45–54.

[7] *Н.Д. Копачевский, С.Г. Крейн, Нго Зуй Кан*, Операторные методы в линейной гидродинамике. Наука, Москва (1989).

[8] *Ж.Л. Лионс, Э. Мадженес*, Неоднородные граничные задачи и их приложения. Мир, Москва (1971).

[9] *О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева*, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. Наука, Москва (1964).

[10] *С.Л. Михлин*, Вариационные методы в математической физике. Наука, Москва (1970).

[11] *Т. Като*, Теория возмущений линейных операторов. Мир, Москва (1972).

[12] *С.Г. Крейн*, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Наука, Москва (1967).

On small motions of a magnetizable viscous liquid

I.D. Borisov and T.Yu. Yatsenko

A generic problem of small motions of a magnetizable fluid in a partially filled vessel is given. The problem under consideration is reduced to operator-differential equation in the Hilbert space. The correctness of solvability of the Cauchy problem for this equation is proven. Some properties of frequency spectrum for free oscillations of the liquid are established.