Математическая физика, анализ, геометрия
2003, т. 10, № 2, с. 147–155

Уточнения изопериметрического неравенства геометрии Минковского

В.И. Дискант

Черкасский государственный технологический университет
бульв. Шевченко, 460, Черкассы, 18006, Украина
E-mail:diskant@chiti.uch.net

Статья поступила в редакцию 17 мая 2002 г.
Представлена А.А. Борисенко

Доказаны следующие уточнения изопериметрического неравенства n-мерного пространства Минковского M^n ($n \geq 2$) с нормирующим телом B [3]:

$$S_B^{\frac{n}{n-1}}(A) - (n^n V_B(I))^{\frac{1}{n-1}} V_B(A) \geq (S_B^{\frac{1}{n-1}}(A) - \rho(nV_B(I))^{\frac{1}{n-1}})^n - (n^n V_B(I))^{\frac{1}{n-1}} V_B(A_{-\rho}(I)),$$

$$S_B^{\frac{n}{n-1}}(A) - (n^n V_B(I_A))^{\frac{1}{n-1}} V_B(A) \geq (S_B^{\frac{1}{n-1}}(A) - \rho(nV_B(I_A))^{\frac{1}{n-1}})^n - (n^n V_B(I_A))^{\frac{1}{n-1}} V_B(A_{-\rho}(I))$$

и ряд их следствий, среди которых уточнение (11) изопериметрического неравенства в M^n, учитывающее как особенности на границе тела A, так и отклонение тел A и I_A от гомотетичности, уточнение (13) неравенства Хадвигера из [5] в M^n с учетом невырожденности $A_{-q}(I)$, обобщение (15) неравенства Вилльса из [7] на M^n. В приведенных неравенствах A — выпуклое тело, I — изопериметрикс, I_A — форм-тело тела A относительно I, q — коэффициент вместимости I в A, $\rho \in [0, q]$, $A_{-\rho}(I)$ — внутреннее тело, параллельное телу A относительно I на расстоянии ρ, $V_B(A)$ — объем тела A, $S_B(A)$ — площадь поверхности тела A в M^n [3].

Доведено наступні уточнення ізопериметричної нерівності n-вимірного простору Мінковського M^n ($n \geq 2$) з нормуючим тілом B [3]:

$$S_B^{\frac{n}{n-1}}(A) - (n^n V_B(I))^{\frac{1}{n-1}} V_B(A) \geq (S_B^{\frac{1}{n-1}}(A) - \rho(nV_B(I))^{\frac{1}{n-1}})^n - (n^n V_B(I))^{\frac{1}{n-1}} V_B(A_{-\rho}(I)),$$

$$S_B^{\frac{n}{n-1}}(A) - (n^n V_B(I_A))^{\frac{1}{n-1}} V_B(A) \geq (S_B^{\frac{1}{n-1}}(A) - \rho(nV_B(I_A))^{\frac{1}{n-1}})^n - (n^n V_B(I_A))^{\frac{1}{n-1}} V_B(A_{-\rho}(I))$$

Mathematics Subject Classification 2000: 52A38, 52A40.

і ряд їх наслідків, серед яких уточнення (11) ізопериметричної нерівності в M^n, що враховує як особливості на межі тіла A, так і відхилення тіл A і I_A від гомотетичності, уточнення (13) нерівності Хадвігера із [5] в M^n з врахуванням невиродженості $A_{-q}(I)$, узагальнення (15) нерівності Віллься із [7] на M^n. В наведених нерівностях A — опукле тіло, I — ізопериметрикс, I_A — форм-тіло тіла A відносно I, q — коефіцієнт місткості I в A, $\rho \in [0, q]$, $A_{-\rho}(I)$ — внутрішнє тіло, яке паралельне тілу A відносно I на відстані ρ, $V_B(A)$ — об'єм тіла A, $S_B(A)$ — площа поверхні тіла A в M^n [3].

Пусть B — центрально симметричное выпуклое тело в n-мерном евклидовом пространстве R^n $(n \geq 2)$, точка $\bar{o}$ — центр симметрии B, E — единичный шар R^n с центром в точке $\bar{o}$, Ω — единичная сфера — граница шара E. В настоящей работе точки будем отождествлять с их радиус-векторами относительно точки $\bar{o}$, под выпуклым телом будем понимать замкнутое ограниченное выпуклое множество, имеющее внутренние точки.

Следуя Г. Минковскому [1], введем в R^n с помощью тела B новую метрику — метрику Минковского, положив

$$\rho_B(\bar{x}, \bar{y}) = F(\bar{y} - \bar{x}),$$

где $\rho_B(\bar{x}, \bar{y})$ — новое расстояние между $\bar{x}$ и $\bar{y}$ в R^n, $F(\bar{x})$ — дистанционная функция, определяемая заданием тела B [2].

Пусть теперь B — центрально симметричное выпуклое тело в n-мерном аффинном пространстве A^n $(n \geq 2)$, имеющее точку $\bar{o} \in A^n$ своим центром симметрии. Введем в A^n систему координат с началом в точке $\bar{o}$. Обозначим через R^n присоединенное к A^n евклидово пространство — пространство, которое получается из A^n введением в A^n скалярного произведения с помощью некоторой положительно определенной симметричной билинейной формы. С помощью тела B введем в R^n, а следовательно, и в A^n метрику Минковского ρ_B. Эта метрика не зависит от выбора вспомогательной евклидовой метрики, введенной в A^n, и полностью определяется заданием тела B в A^n.

Аффинное пространство A^n, в котором с помощью тела B введена метрика Минковского ρ_B, называется пространством Минковского M^n. Тело B называется нормирующим телом M^n [3].

Для выпуклого тела A в M^n его объем $V_B(A)$ в M^n определяется по формуле

$$V_B(A) = \frac{V(A)}{V(B)} \nu_n, \tag{1}$$

где $V(A)$ — n-мерный евклидов объем A в присоединенном к M^n пространстве R^n, $\nu_n = V(E)$. Заметим, что значение $V_B(A)$ не зависит от выбора R^n, присоединенного к M^n. Обозначим через R_1^n присоединенное к M^n евклидово пространство, в котором $V(B) = \nu_n$. Из (1) следует, что в R_1^n будет

$$V_B(A) = V(A). \tag{2}$$

Введение в M^n понятия $(n-1)$-мерного объема приводит к рассмотрению в M^n изопериметрикса I — выпуклого тела M^n, опорное число $h_I(\bar{u})$ которого в R_1^n имеет вид

$$h_I(\bar{u}) = \frac{\nu_{n-1}}{V_{n-1}(B \cap T_{\bar{o}}(\bar{u}))},$$

где $\bar{u} \in \Omega$, $T_{\bar{o}}(\bar{u}))$ — гиперплоскость R_1^n, ортогональная $\bar{u}$ и проходящая через $\bar{o}$, V_{n-1} — $(n-1)$-мерный объем в R_1^n [3].

Площадь поверхности $S_B(A)$ выпуклого тела A в M^n определяется формулой

$$S_B(A) = nV_1(A, I), \tag{3}$$

в которой $V_1(A, I)$ — первый смешанный объем тел A и I в R_1^n [3].

Изопериметрическое неравенство в M^n имеет вид

$$S_B^n(A) - n^n V_B(I) V_B^{n-1}(A) \geq 0. \tag{4}$$

Перепишем (4) в виде

$$S_B^{\frac{n}{n-1}}(A) - (n^n V_B(I))^{\frac{1}{n-1}} V_B(A) \geq 0. \tag{5}$$

В дальнейшем (5) будем называть изопериметрическим неравенством для A в M^n, а левую часть (5) — изопериметрической разностью для тела A в M^n.

В [4] были получены следующее уточнение изопериметрического неравенства (5):

$$S_B^{\frac{n}{n-1}}(A) - (n^n V_B(I))^{\frac{1}{n-1}} V_B(A) \geq (S_B^{\frac{1}{n-1}}(A) - (nV_B(I))^{\frac{1}{n-1}} q)^n \tag{6}$$

и его следствие

$$qS_B(A) \geq V_B(A) + (n-1)V_B(qI),$$

в которых $q = q(A, I)$ — коэффициент вместимости тела I в тело A, т.е. наибольшее из чисел α, для которых тело αI параллельным сдвигом помещается в A.

Для формулировки результатов работы введем в рассмотрение следующие два понятия.

Обозначим через $A_{-\rho}(C) = A/(\rho C)$, $0 \leq \rho \leq q = q(A, C)$, разность выпуклых тел A и ρC в M^n [5]. Тело $A_{-\rho}(C)$ называется внутренним телом, параллельным телу A относительно C на расстоянии ρ.

Пусть $\bar{p}$ — регулярная точка границы ∂A тела A в M^n, т.е. точка, через которую проходит ровно одна опорная гиперплоскость тела A. Обозначим через $\overline{T_A(\bar{p})}$ замкнутое опорное полупространство тела A, ограниченное опорной гиперплоскостью, проходящей через $\bar{p}$, через $(\partial A)'$ — множество регулярных точек ∂A. Для выпуклого тела C в M^n обозначим через $\overline{T_C(\bar{p})}$, $\bar{p} \in (\partial A)'$, опорное полупространство тела C, параллельное опорному полупространству $\overline{T_A(\bar{p})}$. Заметим, что $\overline{T_C(\bar{p})}$ параллельно $\overline{T_A(\bar{p})}$, если либо $\overline{T_C(\bar{p})} \subset \overline{T_A(\bar{p})}$, либо $\overline{T_A(\bar{p})} \subset \overline{T_C(\bar{p})}$. Назовем выпуклое тело

$$C_A = \cap_{\bar{p} \in (\partial A)'} \overline{T_C(\bar{p})}$$

форм-телом тела A относительно тела C в M^n.

В настоящей работе будут доказаны следующие уточнения изопериметрического неравенства n-мерного пространства Минковского M^n:

$$S_B^{\frac{n}{n-1}}(A) - (n^n V_B(I))^{\frac{1}{n-1}} V_B(A) \geq (S_B^{\frac{1}{n-1}}(A) - \rho(nV_B(I))^{\frac{1}{n-1}})^n - (n^n V_B(I))^{\frac{1}{n-1}} V_B(A_{-\rho}(I)), \tag{7}$$

$$S_B^{\frac{n}{n-1}}(A) - (n^n V_B(I_A))^{\frac{1}{n-1}} V_B(A) \geq (S_B^{\frac{1}{n-1}}(A) - \rho(nV_B(I_A))^{\frac{1}{n-1}})^n - (n^n V_B(I_A))^{\frac{1}{n-1}} V_B(A_{-\rho}(I)) \tag{8}$$

и их следствия

$$S_B^{\frac{n}{n-1}}(A) - (n^n V_B(I))^{\frac{1}{n-1}} V_B(A) \geq S_B^{\frac{n}{n-1}}(A_{-\rho}(I)) - (n^n V_B(I))^{\frac{1}{n-1}} V_B(A_{-\rho}(I)), \tag{9}$$

$$S_B^{\frac{n}{n-1}}(A) - (n^n V_B(I_A))^{\frac{1}{n-1}} V_B(A) \geq S_B^{\frac{n}{n-1}}(A_{-\rho}(I)) - (n^n V_B(I_A))^{\frac{1}{n-1}} V_B(A_{-\rho}(I)), \tag{10}$$

$$S_B^{\frac{n}{n-1}}(A) - (n^n V_B(I_A))^{\frac{1}{n-1}} V_B(A) \geq (S_B^{\frac{1}{n-1}}(A) - q(nV_B(I_A))^{\frac{1}{n-1}})^n, \tag{11}$$

$$S_B^{\frac{n}{n-1}}(A) - (n^n V_B(I_A))^{\frac{1}{n-1}} V_B(A) \geq 0, \tag{12}$$

$$S_B^{\frac{n}{n-1}}(A) - (n^n V_B(I_A))^{\frac{1}{n-1}} V_B(A) \geq S_B^{\frac{n}{n-1}}(A_{-q}(I)), \tag{13}$$

$$\rho S_B(A) \geq (n-1)V_B(\rho I_A) + V_B(A) - V_B(A_{-\rho}(I)), \tag{14}$$

$$q S_B(A) \geq (n-1)V_B(q I_A) + V_B(A). \tag{15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о н е р а в е н с т в а (7). Изопериметрическое неравенство Минковского для выпуклых тел A и C в R^n имеет вид

$$V_1^{\frac{n}{n-1}}(A, C) - V^{\frac{1}{n-1}}(C) V(A) \geq 0. \tag{16}$$

В работе [6] получено следующее уточнение (16) в R^n:

$$
\begin{aligned}
&V_1^{\frac{n}{n-1}}(A,C) - V^{\frac{1}{n-1}}(C)V(A) \\
\geq &(V_1^{\frac{1}{n-1}}(A,C) - \rho V^{\frac{1}{n-1}}(C))^n - V^{\frac{1}{n-1}}(C)V(A_{-\rho}(C)),
\end{aligned} \tag{17}
$$

в котором $\rho \in [0,q]$, $q = q(A,C)$. Из (2) и (3) следует, что $V(I) = V_B(I)$, $V(A) = V_B(A)$, $V(A_{-\rho}(I)) = V_B(A_{-\rho}(I))$, $nV_1(A,I) = S_B(A)$, где величины $V(I)$, $V(A)$, $V(A_{-\rho}(I))$, $V_1(A,I)$ вычислены в R_1^n. Положим в (17) $C = I$ в R_1^n. Тогда, умножая обе части (17) на $n^{\frac{n}{n-1}}$ и учитывая, что $q = q(A,I)$ и $A_{-\rho}(I)$ не зависит от выбора присоединенного к M^n пространства R^n, придем к неравенству (7). ∎

Доказательство неравенства (8). В [7] форм-тело $\tilde{C}_A$ выпуклого тела A относительно тела C в R^n определено с помощью равенства $\tilde{C}_A = (\Omega_A, H_C^*(\bar{u}))$, где Ω_A — минимальная замкнутая область задания опорной функции тела A на Ω, $H_C^*(\bar{u})$ — ограничение опорной функции $H_C(\bar{u})$ тела C на Ω_A. Там же было показано, что $\Omega_A = \bar{\Phi}$, где $\bar{\Phi}$ — замыкание множества Φ концов единичных нормалей к опорным гиперплоскостям тела A, проходящим через регулярные точки границы тела A. Так как регулярные точки на границе тела A лежат всюду плотно, то $A = \cap_{\bar{p}\in(\partial A)'}\overline{T_A(\bar{p})}$. Отсюда следует, что множество Φ не лежит ни в одной замкнутой полусфере Ω. Поэтому C_A является выпуклым телом. Если в определении C_A под знаком пересечения к множеству опорных полупространств добавить опорное полупространство, имеющее своей внешней единичной нормалью нормаль, предельную для Φ, то пересечение по-прежнему будет равно C_A. Это следует из непрерывности опорной функции выпуклого тела C_A. Следовательно, в R^n, присоединенном к M^n, будет $C_A = \tilde{C}_A$.

В [6] для выпуклых тел A и C в R^n показано, что

$$
V(A) - V(A_{-\rho}(C)) = n\int_0^\rho V_1(A_{-\sigma}(C),C)d\sigma \tag{18}
$$

и

$$
V_1^{\frac{1}{n-1}}(A_{-\sigma}(C),C) \leq V_1^{\frac{1}{n-1}}(A,C) - \sigma V^{\frac{1}{n-1}}(C_A). \tag{19}
$$

Подставляя (19) в (18), придем к неравенству

$$
V(A) - V(A_{-\rho}(C)) \leq n\int_0^\rho (V_1^{\frac{1}{n-1}}(A,C) - \sigma V^{\frac{1}{n-1}}(C_A))^{n-1}d\sigma,
$$

которое после интегрирования правой части запишем в виде:

$$V_1^{\frac{n}{n-1}}(A,C) - V^{\frac{1}{n-1}}(C_A)V(A) \geq (V_1^{\frac{1}{n-1}}(A,C) - \rho V^{\frac{1}{n-1}}(C_A))^n \\ -V^{\frac{1}{n-1}}(C_A)V(A_{-\rho}(C)). \quad (20)$$

Полагая в (20) $C = I$ в R_1^n и умножая обе части на $n^{\frac{n}{n-1}}$, придем к (8). ■

Доказательство неравенства (9). В [6] для выпуклых тел A и C в R^n доказано неравенство

$$V_1^{\frac{n}{n-1}}(A,C) - V^{\frac{1}{n-1}}(C)V(A) \geq V_1^{\frac{n}{n-1}}(A_{-\rho}(C),C) - V^{\frac{1}{n-1}}(C)V(A_{-\rho}(C)).$$

Полагая $C = I$ в R_1^n и умножая обе части последнего неравенства на $n^{\frac{n}{n-1}}$, придем к (9). ■

Отметим, что из неравенства (9) следует утверждение: при переходе от выпуклого тела A к параллельному внутреннему телу $A_{-\rho}(I)$ в M^n изопериметрическая разность не увеличивается.

Доказательство неравенства (10). Полагая в (19) $\sigma = \rho$, оценим с помощью полученного неравенства величину, стоящую в скобке правой части неравенства (20). Придем к неравенству

$$V_1^{\frac{n}{n-1}}(A,C) - V^{\frac{1}{n-1}}(C_A)V(A) \geq V_1^{\frac{n}{n-1}}(A_{-\rho}(C),C) - V^{\frac{1}{n-1}}(C_a)V(A_{-\rho}(C)).$$

Полагая $C = I$ в R_1^n и умножая обе части последнего неравенства на $n^{\frac{n}{n-1}}$, придем к (10). ■

Отметим, что из неравенства (10) следует утверждение: при переходе от A к $A_{-\rho}(I)$ в M^n уточненная изопериметрическая разность, учитывающая особенности на границе тела A, не увеличивается.

Доказательство неравенства (11). Из равенства $A_{-\sigma}(C) = A_{-\sigma}(C_A)$, $\sigma \in [0,q]$, доказанного в [6], следует, что $q(A,C) = q(A,C_A) = q$.

Положим в (8) $\rho = q = q(A,I)$. Так как $V(A_{-q}(I)) = 0$, придем к (11), в котором $q = q(A,I_A)$. ■

Доказательство неравенства (12). Покажем, что правая часть неравенства (11) неотрицательна. С этой целью отметим, что в R^n имеет место равенство

$$V_1(A,C) = V_1(A,C_A).$$

Действительно, $V_1(A,C) = \frac{1}{n}\int\limits_\Omega H_C(\bar{u})F(A,d\omega)$, где $F(A,\omega)$ — поверхностная функция тела A [8]. Если $A = (\Omega_A, H_A^*(\bar{u}))$, то $F(A,\Omega - \Omega_A) = 0$ [9].

Тогда

$$V_1(A,C) = \frac{1}{n}\int\limits_{\Omega_A} H_C(\bar{u})F(A,d\omega)$$

$$= \frac{1}{n}\int\limits_{\Omega_A} H_{C_A}(\bar{u})F(A,d\omega) = \frac{1}{n}\int\limits_{\Omega} H_{C_A}(\bar{u})F(A,d\omega) = V_1(A,C_A),$$

т.к. $H_{C_A}(\bar{u}) = H_C(\bar{u})$ при $\bar{u} \in \Omega_A$.

Основание степени правой части (11) в R_1^n можно записать в виде

$$S_B^{\frac{1}{n-1}}(A) - q(nV_B(I_A))^{\frac{1}{n-1}} = n^{\frac{1}{n-1}}(V_1^{\frac{1}{n-1}}(A,I) - V_1^{\frac{1}{n-1}}(qI_A,I_A))$$

$$= n^{\frac{1}{n-1}}(V_1^{\frac{1}{n-1}}(A,I_A) - V_1^{\frac{1}{n-1}}(qI_A,I_A)).$$

Так как $qI_A \subset A$, то из свойства монотонности смешанного объема по каждому из своих аргументов следует, что правая часть (11) неотрицательна. Значит, и левая часть (11) неотрицательна. Последнее равносильно (12). ■

Заметим, что (12) является обобщением неравенства Хадвигера из [5] на геометрию Минковского. В [10] неравенство (12) было получено другим способом.

Доказательство неравенства (13). Если в неравенстве (10) положить $\rho = q = q(A,I)$, то придем к неравенству (13), т.к. $V_B(A_{-q}(I)) = 0$. ■

Заметим, что неравенство (13) уточняет неравенство Хадвигера (12) в случае, если $S_B(A_{-q}(I)) \neq 0$, т.е. в том случае, когда $(n-1)$-мерный объем $V_{n-1}(A_{-q}(I))$ в R_1^n не равен нулю.

Доказательство неравенства (14). Покажем, что неравенство (14) является алгебраическим следствием неравенства (8). Для этого рассмотрим функцию $\varphi_n(x) = (x-a)^n - x^n + nx^{n-1}a$, $a > 0$, $n \geq 2$. В [7] показано, что $\varphi_n(x)$ возрастает на промежутке $[a, +\infty)$. Положим $x = S_B^{\frac{1}{n-1}}(A)$, $a = \rho(nV_B(I_A))^{\frac{1}{n-1}}$. Так как $q(A,I) = q(A,I_A) = q$, то можно считать, что $qI_A \subset A$ и $\bar{o} \in qI_A$. В этом случае и $\rho I_A \subset A$ при $0 \leq \rho \leq q$. Выразим x и a через смешанные объемы в R_1^n. Имеем

$$x = S_B^{\frac{1}{n-1}}(A) = (nV_1(A,I))^{\frac{1}{n-1}} = (nV_1(A,I_A))^{\frac{1}{n-1}},$$

$$a = \rho(nV_B(I_A))^{\frac{1}{n-1}} = (n\rho^{n-1}V(I_A))^{\frac{1}{n-1}} = (nV_1(\rho I_A, I_A))^{\frac{1}{n-1}}.$$

Тогда из включения $\rho I_A \subset A$, монотонности смешанного объема по каждому из своих аргументов и последних выражений для x и a следует, что $x \geq a$.

Поэтому степень $(x-a)^n$ в неравенстве (8) допускает следующую оценку снизу:

$$\begin{aligned}(x-a)^n &= x^n - nx^{n-1}a + \varphi_n(x)\\ &\geq x^n - nx^{n-1}a + \varphi_n(a) = x^n - nx^{n-1}a + (n-1)a^n\\ &= S_B^{\frac{n}{n-1}}(A) - nS_B(A)\rho(nV_B(I_A))^{\frac{1}{n-1}} + (n-1)\rho^n(nV_B(I_A))^{\frac{n}{n-1}}.\end{aligned}$$

Заменяя $(x-a)^n$ в правой части (8) этой оценкой и сокращая полученное неравенство на $n(nV_B(I_A))^{\frac{1}{n-1}}$, придем к неравенству (14). ■

Доказательство неравенства (15). Если в (14) положить $\rho = q$ и учесть, что $V(A_{-q}(I)) = 0$, то придем к неравенству (15). ■

Список литературы

[1] *H. Minkowski*, Geometrie der Zahlen. Leipzig–Berlin (1910).

[2] *T. Bonnesen und W. Fenchel*, Theorie der konvexen Körper. Springer, Berlin (1934).

[3] *К. Лейхтвейс*, Выпуклые множества. Наука, Москва (1985).

[4] *В.И. Дискант*, Обобщение неравенств Боннезена в геометрии Минковского. — *Мат. физ., анализ, геом.* (1994), т. 1, № 3/4, с. 450–453.

[5] *Г. Хадвигер*, Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. Наука, Москва (1966).

[6] *В.И. Дискант*, О поведении изопериметрической разности при переходе к параллельному телу и одном уточнении обобщенного неравенства Хадвигера. — *Мат. физ., анализ, геом.* (2003), т. 10, № 1, с. 40–48.

[7] *В.И. Дискант*, Уточнения изопериметрического неравенства и теоремы устойчивости в теории выпуклых тел. — *Тр. ин-та мат. СО АН СССР*, Наука, Новосибирск (1989), т. 14, с. 98–132.

[8] *А.Д. Александров*, К теории смешанных объемов выпуклых тел. I. Расширение некоторых понятий теории выпуклых тел. — *Мат. сб.* (1937), т. 2(44), № 5, с. 947–970.

[9] *А.Д. Александров*, К теории смешанных объемов выпуклых тел. III. Распространение двух теорем Минковского о выпуклых многогранниках на произвольные выпуклые тела. — *Мат. сб.* (1938), т. 3(45), № 1, с. 27–44.

[10] *В.И. Дискант*, Обобщение теоремы Линделефа. — *Мат. физ., анализ, геом.* (1997), т. 4, № 1/2, с. 59–64.

Improvements of the isoperimetric inequality geometry of the Minkowski

V.I. Diskant

The following improvements of an isoperimetric inequality in the n-dimensional Minkowski space M^n $(n \geq 2)$ with a normalizing body B [3]:

$$S_B^{\frac{n}{n-1}}(A) - (n^n V_B(I))^{\frac{1}{n-1}} V_B(A) \geq (S_B^{\frac{1}{n-1}}(A) - \rho(nV_B(I))^{\frac{1}{n-1}})^n$$
$$-(n^n V_B(I))^{\frac{1}{n-1}} V_B(A_{-\rho}(I)),$$
$$S_B^{\frac{n}{n-1}}(A) - (n^n V_B(I_A))^{\frac{1}{n-1}} V_B(A) \geq (S_B^{\frac{1}{n-1}}(A) - \rho(nV_B(I_A))^{\frac{1}{n-1}})^n$$
$$-(n^n V_B(I_A))^{\frac{1}{n-1}} V_B(A_{-\rho}(I))$$

and series of their consequents, among which one improvement (11) of an isoperimetric inequality in M^n, taking into account both singularities on boundary of a body A, and deviation of body A and I_A from homothetic, improvement (13) an inequality of Hadwiger from [5] in M^n in view of a non-degeneracy $A_{-q}(I)$, generalizing (15) of an inequality of Wills from [7] on M^n are proved. In reduced inequalities A — convex body, I — isoperimetrix, I_A — form-body of body A relatively to I, q — coefficient of holding capacity I in A, $\rho \in [0, q]$, $A_{-\rho}(I)$ — internal body which is parallel to body A relatively to I on the distance ρ, $V_B(A)$ — the volume of body A, $S_B(A)$ — the surface area of body A in M^n [3].