Математическая физика, анализ, геометрия
2003, т. 10, № 2, с. 167–187

Фактор-представления группы $GL(\infty)$ и допустимые представления $GL(\infty)^X$

Н.И. Нессонов

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины пр. Ленина, 47, Харьков, 61103, Украина

E-mail:nessonov@ilt.uch.net

Статья поступила в редакцию 2 августа 2002 г.
Представлена В.Я. Голодцом

Статья является первой из трех частей работы, в которой изучаются фактор-представления типа III группы $GL(\infty)$. Пусть $\mathfrak{A}$ — конечномерная комплексная алгебра с единицей $\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}$, $G(\mathfrak{A})$ — группа всех бесконечных обратимых матриц со значениями в $\mathfrak{A}$. Здесь получена полная классификация унитарных представлений $G(\mathfrak{A})$, сферических относительно унитарной подгруппы $U(\infty) \subset GL(\infty) = G(\mathbb{C}\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}) \subset G(\mathfrak{A})$. С каждым из них связан класс фактор-представлений Π группы $GL(\infty)$, обладающих тем свойством, что в пространстве представления H_Π существует ненулевой вектор ξ, для которого $\varphi(g) = (\Pi(g)\xi, \xi) = \varphi(ugu^*)$ при всех $u \in U(\infty)$. В следующих частях будет дано полное описание представлений, удовлетворяющих этому условию.

Стаття є першою з трьох частин роботи, де вивчаються фактор-представлення типу III групи $GL(\infty)$. Нехай $\mathfrak{A}$ — кінечновимірна комплексна алгебра з одиницею $\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}$, $G(\mathfrak{A})$ — група усіх нескінченних матриць зі значеннями в $\mathfrak{A}$, які мають обернені. Одержано повну класифікацію унітарних представлень $G(\mathfrak{A})$, які сферичні по відношенню до унітарної підгрупи $U(\infty) \subset GL(\infty) = G(\mathbb{C}\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}) \subset G(\mathfrak{A})$. З кожним із них пов'язується класс фактор-представлень Π групи $GL(\infty)$, які мають таку властивість, що в просторі представлення H_Π існує ненульовий вектор ξ, і для нього $\varphi(g) = (\Pi(g)\xi, \xi) = \varphi(ugu^*)$ при усіх $u \in U(\infty)$. У наступних частинах буде дано повний опис представлень, що задовольняють цю умову.

0. Введение

Пусть $\mathfrak{A}$ — конечномерная комплексная алгебра с единицей $\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}$; $\mathfrak{a}_0 = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n$ — базис линейного пространства $\mathfrak{A}$. Обозначим через $M_\infty(\mathfrak{A})$

Mathematics Subject Classification 2000: 46L55, 46L65.

множество матриц из бесконечного числа строк и столбцов с элементами из $\mathfrak{A}$, у которых лишь конечное число ненулевых элементов, $G(\mathfrak{A}) = \{\mathbf{1} + \hat{\mathfrak{a}} : \hat{\mathfrak{a}} \in M_\infty(\mathfrak{A})$ и $\exists\ (\mathbf{1} + \hat{\mathfrak{a}})^{-1} = (\mathbf{1} + \hat{\mathfrak{b}})$, где $\hat{\mathfrak{b}} \in M_\infty(\mathfrak{A})\}$.

Положим $G(r)$ $(G(r, \infty, \mathfrak{A})) = \{\mathbf{1} + [\mathfrak{a}_{ij}] \in G(\mathfrak{A}) : [\mathfrak{a}_{ij}] \in M_\infty(\mathfrak{A})$ и $\mathfrak{a}_{ij} = 0$, когда $i > r$ или $j > r$ ($\mathfrak{a}_{ij} = 0$, когда $i \leq r$ или $j \leq r$)$\}$, $G(\mathbb{C}) = \{\mathbf{1} + [c_{ij}\mathbf{1}_\mathfrak{A}] \in G(\mathfrak{A}) : c_{ij} \in \mathbb{C}\}$. Обозначим через $U(\mathbb{C})$ унитарную подгруппу $G(\mathbb{C}) \subset G(\mathfrak{A})$, $U(r, \infty) = U(\mathbb{C}) \cap G(r, \infty, \mathfrak{A})$.

Топология в $\mathfrak{A}$ естественно индуцирует на $G(r)$ структуру топологической группы. На $G(\mathfrak{A})$ будем рассматривать топологию индуктивного предела.

Определение 0.1. *Унитарное фактор-представление* Π *группы* $G(\mathfrak{A})$, *действующее в гильбертовом пространстве* H_Π, *будем называть допустимым (см. [2, 10]), если для некоторого натурального* k *существует* $\eta \neq 0$ *из* H_Π *такой, что* $\Pi(u)\eta = \eta$ *для всех* $u \in U(k, \infty)$.

Определение 0.2. *Фактор-представление* Π *группы* $G(\mathfrak{A})$ *будем называть сферическим, если в* H_Π *существует вектор* $\eta \neq 0$ *такой, что* $\Pi(u)\eta = \eta$ *для всех* $u \in U(\mathbb{C})$.

Если G — группа, $\mathbf{1}$ — единица в G, φ — нормированная $(\varphi(\mathbf{1}) = 1)$, положительно определенная (п.о.) функция на G, то через Π_φ обозначим унитарное представление группы G, построенное по φ.

Определение 0.3. *Нормированную п.о. функцию* φ *на* G *будем называть неразложимой, если* Π_φ *— фактор-представление.*

Будем обозначать через H_φ гильбертово пространство, в котором действует Π_φ. Пусть $B(H_\varphi)$ — множество всех ограниченных операторов в H_φ. Для $M \subset B(H_\varphi)$ положим

$$M' = \{a \in B(H_\varphi) : \ am - ma = [a, m] = 0 \text{ для всех } m \in M\}.$$

Определение 0.4. *Нормированную п.о. функцию* φ *на* G *будем называть КМШ-состоянием (состоянием Кубо–Мартина–Швингера), если в* H_φ *существует вектор* ξ_φ *со свойствами*

$$(\Pi_\varphi(g)\xi_\varphi, \xi_\varphi) = \varphi(g), \ [\Pi_\varphi(G)\xi_\varphi] = [\{\Pi_\varphi(G)\}'\xi_\varphi] = H_\varphi,$$

где $[\Pi_\varphi(G)\xi_\varphi]$ *— замыкание линейной оболочки векторов* $\Pi_\varphi(g)\xi_\varphi$ $(g \in G)$.

Определение 0.5. *КМШ-состояние* φ *на* $G(\mathfrak{A})$ *будем называть унитарно инвариантным, если*

$$\varphi(ugu^*) = \varphi(g) \ \text{ для всех } g \in G(\mathfrak{A}) \text{ и } u \in U(\mathbb{C}).$$

В этой работе получено полное описание сферических фактор-представлений группы $G(\mathfrak{A})$ и на его основе исчерпывающая классификация *неразложимых* унитарно инвариантных КМШ-состояний на $GL(\infty) = G(\mathbb{C})$. Используемые методы после незначительных модификаций позволяют найти полную систему инвариантов унитарной эквивалентности для допустимых представлений $G(\mathfrak{A})$ (см. [10]).

Для краткого описания результатов работы введем необходимые нам объекты.

Пусть Λ_k — множество всех комплексных матриц из k строк и бесконечного числа столбцов, ν_k — гауссовская мера на Λ_k с единичным ковариационным оператором, $M_k(\mathbb{C})$ — полная алгебра $k \times k$-матриц над $\mathbb{C}$. Обозначим через κ антигомоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $M_k(\mathbb{C})$ ($\kappa(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \kappa(\mathfrak{b})\kappa(\mathfrak{a})$ при всех $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{A}$).

Для $g = \mathbf{1} + \sum_{j=0}^{n} \mathfrak{a}_j \mathfrak{M}_j$, где $\mathbf{1}$ — единица в $G(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{M}_j \in M_\infty(\mathbb{C})$, и $\lambda \in \Lambda_k$ положим

$$\lambda_{g_\kappa} = \lambda + \sum_{j=0}^{n} \kappa(\mathfrak{a}_j)\lambda\mathfrak{M}_j \,.$$

Если A — самосопряженная $k \times k$-матрица, то положим

$$\alpha_{A,\kappa}(\lambda, g) = \exp\{i\,Tr[A(\lambda_{g_\kappa}\lambda^*_{g_\kappa} - \lambda\lambda^*)]\}.$$

Так как κ — антигомоморфизм, то нетрудно проверить, что операторы $\Pi_{A,\kappa}(g)$, действующие в $L^2(\Lambda_k, \nu_k)$ согласно соотношению

$$(\Pi_{A,\kappa}(g)\xi)(\lambda) = \alpha_{A,\kappa}(\lambda, g)\left[\frac{d\nu_k(\lambda_{g_\kappa})}{d\nu_k(\lambda)}\right]^{1/2} \xi(\lambda_{g_\kappa}) \,, \tag{0.1}$$

образуют представление группы $G(\mathfrak{A})$.

Одним из основных результатов работы является следующая

Теорема 0.6. (См. теорему 2.13). *Пусть Π — сферическое фактор-представление группы $G(\mathfrak{A})$. Тогда Π имеет тип 1. Существуют натуральное k, антигомоморфизм κ из $\mathfrak{A}$ в $M_k(\mathbb{C})$ и одномерное унитарное представление χ группы $G(\mathfrak{A})$ такие, что Π унитарно эквивалентно сужению $\chi \otimes \Pi_{A,\kappa}$ на подпространство $[\Pi_{A,\kappa}(G(\mathfrak{A}))\xi_0]$, где $\xi_0 \in L^2(\Lambda_k, \nu_k)$ и определяется функцией на Λ_k, тождественно равной единице.*

Указанное сужение обозначим через $\Pi^{\chi,0}_{A,\kappa}$.

Следующее утверждение является критерием унитарной эквивалентности для представлений вида $\Pi^{1,0}_{A,\kappa} = \Pi^{0}_{A,\kappa}$, где $\chi \equiv 1$.

Теорема 0.7. (См. теорему 4.4.). *Для унитарной эквивалентности представлений* $\Pi^0_{A_1,\kappa_1}$ *и* $\Pi^0_{A_2,\kappa_2}$ *необходимо и достаточно, чтобы существовал унитарный оператор* U *такой, что* $UA_1U^* = A_2$, $U\kappa_1(\mathfrak{a})U^* = \kappa_2(\mathfrak{a})$ *при всех* $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$.

Существенную роль в наших построениях играют обобщения теорем 0.6–0.7 на группы движений, связанные с $G(\mathfrak{A})$. Соответствующие результаты (см. теоремы 2.14 и 4.14) представляют самостоятельный интерес.

Далее, на основе теоремы 0.6 в работе получено описание *неразложимых унитарно инвариантных (н.у.и.)* КМШ-состояний на группе $GL(\infty)$. Наш подход следует идее Г.И. Ольшанского о связи сферических представлений группы $U(\infty) \times U(\infty)$ с фактор-представлениями типа II_1 $U(\infty)$.

Пусть φ — н.у.и. КМШ-состояние на $G(\mathbb{C}) = GL(\infty)$, $H_\varphi = [\Pi_\varphi \xi_\varphi]$, $M = (\Pi_\varphi(G(\mathbb{C}))')' = \Pi_\varphi(G(\mathbb{C}))''$.

Отображение $m\xi_\varphi \longrightarrow m^*\xi_\varphi$ $(m \in M)$ определяет антилинейный оператор из H_φ в H_φ, замыкание которого обозначим через S. Тогда замыкание F отображения $m'\xi_\varphi \longrightarrow m'^*\xi_\varphi$ $(m' \in M')$ является сопряженным к S оператором.

Если $\Delta_\varphi = FS$ — модулярный оператор, а $S = \mathcal{J}_\varphi {\Delta_\varphi}^{1/2}$ — полярное разложение S, то отображение

$$m\xi_\varphi \longrightarrow \Pi_\varphi(g_1) m \Delta_\varphi^{1/2} \Pi_\varphi(g_2)^* \Delta_\varphi^{-1/2} \xi_\varphi = \Pi_\varphi(g_1) m \mathcal{J}_\varphi \Pi_\varphi(g_2) \mathcal{J}_\varphi \tag{0.2}$$

расширяется до унитарного оператора $\Pi_\varphi^{(2)}(g_1, g_2)$ на H_φ. Более того, операторы $\Pi_\varphi^{(2)}(g_1, g_2)$ $((g_1, g_2) \in G(\mathbb{C}) \times G(\mathbb{C}) = G(F(X_2)))$, где $F(X_2)$ — алгебра комплекснозначных функций на двухточечном множестве $X_2 = \{0, 1\}$, образуют представление группы $G(F(X_2))$.

Построенное таким образом представление будем называть *стандартным.*

Предложение 0.8. *Если* φ *— неразложимое КМШ-состояние на группе* G*, то* $\Pi_\varphi^{(2)}$ *— неприводимое представление группы* $G \times G$.

Теорема 0.9. *Если* φ *— н.у.и. КМШ-состояние на группе* $G(\mathbb{C})$*, то* $\Pi_\varphi^{(2)}$ *— неприводимое сферическое представление группы* $G(F(X_2))$.

Следовательно, возвращаясь к теореме 0.6, получаем, что существует самосопряженная матрица A_φ и антигомоморфизм κ_φ из $F(X_2)$ в $M_k(\mathbb{C})$, определяющие представление $\Pi^0_{A_\varphi,\kappa_\varphi}$, которое унитарно эквивалентно $\Pi_\varphi^{(2)}$.

В разделе 5 получены необходимые и достаточные условия на параметры представления $\Pi^0_{A,\kappa}$, при выполнении которых оно будет *стандартным,* т.е. унитарно эквивалентным $\Pi_\varphi^{(2)}$, где φ — н.у.и. КМШ-состояние на $G(\mathbb{C})$.

Для формулировки соответствующих результатов введем необходимые объекты.

Пусть p_i — индикатор i−го элемента из X_2, P_i — соответствующий идемпотент в $F(X_2)$. Тогда $B_i = \kappa(P_i) \in M_k(\mathbb{C})$ и является проектором. Если g_1, $g_2 \in G(\mathbb{C})$ $g_1 = \mathbf{1}+\mathfrak{M}_1$, $g_2 = \mathbf{1}+\mathfrak{M}_2$, то мы отождествим $(g_1, g_2) \in G(\mathbb{C})\times G(\mathbb{C})$ с элементом $\mathbf{1} + P_0\,\mathfrak{M}_1 + P_1\,\mathfrak{M}_2\ \in G(F(X_2))$.

Предположим, наконец, что $\Pi^0_{A,\kappa}$ — *стандартное* представление группы $G(F(X_2))$. Если φ — соответствующее н.у.и. КМШ-состояние на $G(\mathbb{C})$, то будем считать, не ограничивая общности, что $\Pi^0_{A,\kappa} = \Pi^{(2)}_\varphi$.

Далее, с учетом соотношения $\mathcal{J}_\varphi \Pi^0_{A,\kappa}(g_1, g_2)\mathcal{J}_\varphi = \Pi^0_{A,\kappa}(g_2, g_1)$ из теоремы 0.7 вытекает существование унитарного оператора $u_\varphi \in M_k(\mathbb{C})$ со свойством

$$(\mathcal{J}_\varphi\xi)(\lambda) = \bar{\xi}(u_\varphi\lambda) \text{ для всех } \xi \in [\Pi_{A,\kappa}(G(F(X_2)))\xi_0], \tag{0.3}$$

где $\xi_0 \in L^2(\Lambda_k, \nu_k)$ и определяется функцией на Λ_k, тождественно равной единице, а черта означает комплексное сопряжение. Следовательно,

$$u_\varphi B_0 u^*_\varphi = B_1,\ u_\varphi A u^*_\varphi = -A. \tag{0.4}$$

Более того, используя утверждение теоремы 0.9, можно показать (см. лемму 4.2), что $B_0 = \mathbf{1}_k - B_1$. Положим $\Pi^{(l)}_\varphi(g) = \Pi^0_{A,\kappa}((g, \mathbf{1}))$, $\Pi^{(r)}_\varphi(g) = \Pi^0_{A,\kappa}((\mathbf{1}, g))$, $(g \in G(\mathbb{C}))$.

Параметры A, B_0, B_1 видом действия операторов представления $\Pi^0_{A,\kappa}$ определяются неоднозначно (см., напр., теорему 0.7). Это вызывает некоторые затруднения при написании условий на A, B_0, B_1, обеспечивающих *стандартность* $\Pi^0_{A,\kappa}$. Для того чтобы исправить это положение, построим расширение представления $\Pi^0_{A,\kappa}$ на большую группу, операторы которого будут действовать во всем $L^2(\Lambda_k, \nu_k)$ и однозначно определять соответствующие параметры.

В первую очередь заметим, что ввиду (0.4) $k = 2m$, где m — натуральное. Обозначим через H_m аддитивную группу локально ненулевых матриц из m столбцов и бесконечного числа строк. Пусть $G(\mathbb{C})\ltimes H_m$ — полупрямое произведение $G(\mathbb{C})$ на H_m с естественным умножением $(g_1, h_1)\cdot(g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 + g_1 h_2)$.

Отождествим $G(\mathbb{C})$ с ее образом $G(\mathbb{C})\ltimes O_m$, где O_m — нулевая матрица из H_m, при естественном вложении в $G(\mathbb{C})\ltimes H_m$.

Определим представление $\bar{\Pi}_{A,\kappa}$ группы $(G(\mathbb{C})\ltimes H_m)\times(G(\mathbb{C})\ltimes H_m)$, являющееся расширением $\Pi_{A,\kappa}$, согласно соотношениям:

$$\begin{aligned}&\bar{\Pi}_{A,\kappa}(g) = \Pi_{A,\kappa}(g) \ \text{ при } \ g \in (G(\mathbb{C})\ltimes O_m) \times (G(\mathbb{C})\ltimes O_m);\\&(\bar{\Pi}_{A,\kappa}((\mathbf{1},h) \times \mathfrak{e})\eta)(\lambda) = \exp\{i\,\Re\,Tr[B\lambda h]\}\eta(\lambda);\\&(\bar{\Pi}_{A,\kappa}(\mathfrak{e} \times (\mathbf{1},h))\eta)(\lambda) = \exp\{i\,\Re\,Tr[u_\varphi B\lambda h]\}\eta(\lambda),\end{aligned} \tag{0.5}$$

где $\mathfrak{e}$ — единица в $G(\mathbb{C})\ltimes H_m$, $\eta \in L^2(\Lambda_k, \nu_k)$.

Положим $\bar{\Pi}_\varphi^{(l)}(g) = \bar{\Pi}^0_{A,\kappa}((g \times \mathfrak{e})), \bar{\Pi}_\varphi^{(r)}(g) = \bar{\Pi}^0_{A,\kappa}((\mathfrak{e} \times g))$, где $g \in G(\mathbb{C})\ltimes H_m$.

В разделе 4 доказано следующее важное утверждение (см. лемму 4.10).

Лемма 0.10. $[\bar{\Pi}_\varphi^{(r)}(G(\mathbb{C})\ltimes H_m)\xi_0] = [\bar{\Pi}_\varphi^{(l)}(G(\mathbb{C})\ltimes H_m)\xi_0] = L^2(\Lambda_k, \nu_k)$.

Пусть $M^{(l)} = \{\bar{\Pi}_\varphi^{(l)}(G(\mathbb{C})\ltimes H_m)\}''$, $M^{(r)} = \{\bar{\Pi}_\varphi^{(r)}(G(\mathbb{C})\ltimes H_m)\}''$. По построению $\{M^{(l)}\} \subset \{M^{(r)}\}'$, а $\{M^{(r)}\} \subset \{M^{(l)}\}'$.

Лемма 0.10 дает возможность по вектору ξ_0 определить модулярный оператор $\hat{\Delta}_\varphi$ и антиунитарную изометрию $\hat{\mathcal{J}}_\varphi$, действующие в $L^2(\Lambda_k, \nu_k)$ и совпадающие на $[\Pi_{A,\kappa}(G(\mathbb{C}))\xi_0]$ с Δ_φ и $\mathcal{J}_\varphi$ соответственно, которые построены по н.у.и. состоянию φ ранее. Более того, существует унитарная матрица $\hat{u}_\varphi \in M_k(\mathbb{C})$, для которой $(\hat{J}_\varphi\eta)(\lambda) = \bar{\eta}(\hat{u}_\varphi\lambda)$ при всех $\eta \in L^2(\Lambda_k, \nu_k)$, где черта означает комплексное сопряжение, и

$$\hat{u}_\varphi B_0 \hat{u}_\varphi^* = \mathbf{1} - B_0, \ \hat{u}_\varphi A \hat{u}_\varphi^* = -A. \tag{0.6}$$

Если в определении представления $\bar{\Pi}_{A,\kappa}$ согласно (0.5) u_φ заменить на $\hat{u}_\varphi$, в случае их несовпадения, то представления $\bar{\Pi}_\varphi^{(l)}$ и $\bar{\Pi}_\varphi^{(r)}$ группы $G(\mathbb{C})\ltimes H_m$ будут в силу (0.6) удовлетворять соотношению

$$\bar{\Pi}_\varphi^{(l)}(g) = \hat{J}_\varphi \bar{\Pi}_\varphi^{(r)}(g) \hat{J}_\varphi \ \text{ при всех } \ g \in \ G(\mathbb{C})\ltimes H_m\,. \tag{0.7}$$

Для удобства записи условий на A и B_0, обеспечивающих *стандартность* представления $\bar{\Pi}_{A,\kappa}$, а следовательно, и $\Pi^0_{A,\kappa}$, можно, опираясь на (0.6), в случае необходимости проектор B_0 заменить на унитарно эквивалентный и считать, не ограничивая общности, что он в некотором базисе определяется матрицей $\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ X & 0 \end{bmatrix}$, где I_m — единичная, а X — неотрицательная $m \times m$-матрицы. Матрицы A и $\hat{u}_\varphi$ также наследуют соответствующую блочную структуру:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix}, \ \hat{u}_\varphi = \begin{bmatrix} -VX(I_m + X^2)^{-1/2} & V(I_m + X^2)^{-1/2} \\ V(I_m + X^2)^{-1/2} & V(I_m + X^2)^{-1/2} \end{bmatrix},$$

где V — унитарная $m \times m$-матрица.

Сформулируем теперь главный результат раздела 5.

Теорема 0.11. (См. теорему 5.2). *Для того чтобы представление $\bar{\Pi}_{A,\kappa}$ группы $G(\mathbb{C})\ltimes H_m$ было стандартным, т.е. удовлетворяло соотношению (0.7), необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

a) $V = -I_m$;

b) $\hat{u}_\varphi B_0 \hat{u}_\varphi^* = \mathbf{1} - B_0$, $\hat{u}_\varphi A \hat{u}_\varphi^* = -A$;

c) матрица $B_0^* D(I_m - B_0) + (I_m - B_0)^* DB$, где $D = I_k + 2\,i\,A$ невырождена;

d) матрица $A_X = \begin{bmatrix} X(I_m + X^2)^{-1/2} & -(I_m + X^2)^{-1/2} \\ -(I_m + X^2)^{-1/2} & Q \end{bmatrix}$,

где $Q = \left\{ X + 2\left[X + 2i\left(A_{12} + XA_{22}\right)\right]^{-1}\left[I_m - 2i\left(A_{12} + XA_{22}\right)X\right]\right\}$ $\times (I_m + X^2)^{-1/2}$, *положительно определена.*

При доказательстве этой теоремы приводится формула, связывающая действие сужения модулярного оператора $\hat{\Delta}_\varphi$ на инвариантном конечномерном подпространстве в $L^2(\Lambda_k, \nu_k)$ с матрицей A_X. Более того, этим сужением $\hat{\Delta}_\varphi$ определяется однозначно на всем $L^2(\Lambda_k, \nu_k)$. В ходе доказательства решается задача полного спектрального анализа модулярного оператора $\hat{\Delta}_\varphi$.

Теорема 0.11 вместе с утверждениями 0.6, 0.9 дают описание н.у.и. КМШ-состояний на группе $G(\mathbb{C})$. Вопрос применения наших методов для решения аналогичной проблемы в случае произвольной унитарно инвариантной неразложимой положительно определенной функции на $G(\mathbb{C})$ связан с построением расширения соответствующего фактор-представления на группу $G(\mathbb{C}) \times G(\mathbb{C})$ (см. предложение 0.8) и пока остается открытым.

Предметом отдельной работы будет обобщение теоремы 0.11 на бесконечномерные симплектическую и ортогональную группы.

В заключение отметим, что переход от сферического представления к КМШ–состоянию на группе $G(\mathfrak{A})$ напоминает конструкцию квазисвободного состояния по фоковскому представлению алгебры коммутационных (антикоммутационных) соотношений.

1. Асимптотическая сферическая функция и свойства представлений группы движений

Пусть $U(\mathbb{C})$ — унитарная подгруппа $G(\mathbb{C}) \subset G(\mathfrak{A})$, $U(r,\infty) = U(\mathbb{C}) \cap G(r,\infty,\mathfrak{A})$. Так как $G(\mathfrak{A})$ — индуктивный предел матричных групп $G(r)$ ($r \in \mathbb{N}$), то справедливо следующее полезное утверждение.

Предложение 1.1. *В группе $U(\mathbb{C})$ существует последовательность элементов $u_n (n \in \mathbb{N})$ со свойствами:*

i) для любых l, $n \in \mathbb{N}$ найдется $k(l,n) \in \mathbb{N}$ такое, что при $k \geq k(l,n)$ $u_k G(l) u_k^* \subset G'(n) = \{h \in G(\mathfrak{A}) : hp = ph,$ когда $p \in G(n)\}$;

ii) при любом $n \in \mathbb{N}$ существует $l(n) \in \mathbb{N}$, для которого $u_k u_l^* \in G'(n)$, когда $k > l \geq l(n)$.

Предложение 1.2. *Пусть Π — допустимое фактор-представление группы $G(\mathfrak{A})$, действующее в гильбертовом пространстве H_Π. Тогда для любых единичных векторов η_1, $\eta_2 \in H_\Pi$ и $g \in G(\mathfrak{A})$*

$$\varphi_{\eta_1}(g) = \lim_{l \to \infty} \left(\Pi\left(u_l g u_l^*\right) \eta_1, \eta_1\right) = \lim_{l \to \infty} \left(\Pi\left(u_l g u_l^*\right) \eta_2, \eta_2\right) = \varphi_{\eta_2}(g).$$

Причем пределы не зависят от выбора последовательности u_l ($l \in \mathbb{N}$) из предложения 1.1, а $\varphi_{\eta_1}(g) = \varphi_{\eta_2}(g)$ — неразложимая сферическая функция на $G(\mathfrak{A})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как Π — допустимое фактор-представление, то в H_Π существует единичный вектор η, неподвижный относительно операторов $\Pi(u)$ для всех $u \in U(k,\infty)$ при некотором $k \in \mathbb{N}$. Будем считать без ограничения общности, что $H_\Pi = [\Pi(G(\mathfrak{A}))\eta]$. Тогда существует отображение $\mathfrak{n}$ из $\mathbb{R}^+ \times H_\Pi$, где $\mathbb{R}^+$ — множество положительных вещественных чисел, в $\mathbb{N}$ со следующим свойством: *для любого единичного вектора $\xi \in H_\Pi$ и $\delta > 0$ найдется единичный вектор $\xi(\delta)$, неподвижный относительно операторов $\Pi(u)$ ($u \in U(k,\infty) = U(\mathbb{C}) \cap G'(k)$) при всех $k \geq \mathfrak{n}(\delta,\xi)$ такой, что $||\xi - \xi(\delta)|| < \delta$.*

Пусть $p = max\{\mathfrak{n}(\delta,\eta), \mathfrak{n}(\delta,\eta_1), \mathfrak{n}(\delta,\eta_2)\}$ согласно предложению 1.1 (ii) $u_k u_l^* \in G'(p) \cap U() = U(p,\infty)$ при $k > l \geq l(p)$. Следовательно, для любого $g \in G(\mathfrak{A})$

$$\begin{aligned} 2\delta &> \left|\left(\Pi\left(u_k g u_k^*\right) \eta_i, \eta_i\right) - \left(\Pi\left(u_k g u_k^*\right) \eta_i(\delta), \eta_i(\delta)\right)\right| \\ &= \left|\left(\Pi\left(u_k g u_k^*\right) \eta_i, \eta_i\right) - \left(\Pi\left(u_l g u_l^*\right) \eta_i(\delta), \eta_i(\delta)\right)\right|. \end{aligned}$$

Отсюда $\left|\left(\Pi\left(u_k g u_k^*\right) \eta_i, \eta_i\right) - \left(\Pi\left(u_l g u_l^*\right) \eta_i, \eta_i\right)\right| < 4\delta$ при $k > l \geq l(p)$. Так как δ произвольно, то $\left(\Pi\left(u_k g u_k^*\right) \eta_i, \eta_i\right)$ ($k \in \mathbb{N}$) — фундаментальная последовательность. Таким образом, пределы последовательностей

$$\left(\Pi\left(u_k g u_k^*\right) \eta_i, \eta_i\right) \quad k \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2,$$

существуют для всех $g \in G(\mathfrak{A})$.

Двусторонняя инвариантность φ_{η_i} $(i = 1,2)$ относительно элементов из $U(\mathbb{C})$ $(\varphi_{\eta_i}(g) = \varphi_{\eta_i}(ugv) \ \ \forall u, v \in U(\mathbb{C}))$ вытекает из соотношения $\lim\limits_{l \to \infty} \Pi\left(u_l u u_l^*\right) \eta_i = \eta_i$, которое справедливо $\forall u \in U(\mathbb{C})$ в силу замечаний, сделанных в начале доказательства.

Докажем совпадение φ_{η_1} и φ_{η_2} .

Из цикличности ξ вытекает, что для любого $\delta > 0$ существуют наборы $\{g_{ik_i}\}_{k_i=1}^{N_i}$ $(i = 1, 2)$ элементов из $G(n)$ и числа $\{c_{ik_i}\}_{k_i=1}^{N_i}$ $(i = 1, 2)$ из $\mathbb{C}$ со свойствами

$$\left\| \sum_{k_i=1}^{N_i} c_{ik_i} \, \Pi(g_{ik_i})\xi - \eta_i \right\| < \delta, \quad i = 1, 2. \tag{1.1}$$

Если Π — фактор-представление, то, учитывая (1.1), получаем

$$\begin{aligned} 2\delta \ > & \left| \lim_{l\to\infty} (\Pi(u_l \; g \; u_l^*) \; \eta_i \, , \; \eta_i) \right. \\ & - \lim_{l\to\infty} \left. \left(\Pi(u_l \; g \; u_l^*) \sum_{k_i=1}^{N_i} c_{ik_i} \Pi(g_{ik_i})\xi, \sum_{k_i=1}^{N_i} c_{ik_i} \Pi(g_{ik_i})\xi \right) \right| \\ & = \left| \lim_{l\to\infty} (\Pi(u_l g u_l^*) \; \eta_i, \eta_i) \ - \ \lim_{l\to\infty} (\Pi(u_l g u_l^*)\xi, \, \xi) \left\| \sum_{k_i=1}^{N_i} c_{ik_i} \Pi(g_{ik_i})\xi \right\|^2 \right| . \end{aligned}$$

Так как δ произвольно, то отсюда и из (1.1) следует, что $\varphi_{\eta_1}(g) = \varphi_{\eta_2}(g) \; \forall \; g \in G$.

Неразложимость φ_{η_1} докажем на основе соотношения

$$\lim_{l\to\infty} \varphi_{\eta_1}(u_l g \; u_l^* \; h) \ = \ \varphi_{\eta_1}(g) \; \varphi_{\eta_1}(h) \quad \forall \; g, \; h \in G \, .$$

Определение 1.3. *Сферическую функцию на асимптотически абелевой группе $G(\mathfrak{A})$, определенную согласно предложению 1.2 по допустимому представлению Π, будем называть асимптотической сферической функцией (а.с.ф.) и обозначать через $\varphi_{\Pi}^{(a)}$.*

Замечание 1.4. *Изложенную конструкцию а.с.ф. можно провести для допустимых фактор-представлений более широкого класса индуктивных пределов матричных групп. В разделе 2 подобные рассуждения будут использованы в случае вводимой ниже группы $G_j(\mathfrak{A})$.*

В $G(\mathfrak{A})$ рассмотрим подгруппу $G_j(\mathfrak{A})$, состоящую из матриц вида $\begin{bmatrix} I_j & 0 \\ * & * \end{bmatrix}$, где $*$ означает произвольную матрицу соответствующих размеров. Группа $G_j(\mathfrak{A})$ содержит подгруппу $G(j, \infty, \mathfrak{A})$, естественно изоморфную $G(\mathfrak{A})$. Представление Π группы $G_j(\mathfrak{A})$ назовем *допустимим*, если его сужение на $G(j, \infty, \mathfrak{A})$ *допустимо* (см. определение 0.1).

В остальной части этого раздела мы сформулируем структурную теорему о допустимых представлениях группы $G_j(\mathbb{C}) \subset G_j(\mathfrak{A})$, доказанную в [12], и установим некоторые их свойства, которые необходимы в дальнейшем. С этой целью введем следующие обозначения. Пусть $l \in \mathbb{N}$, A — самосопряженная $l \times l$-матрица, z — $j \times l$-матрица, $U(l, A, z) = \{u \in U(l) : \ uA = Au,\ zu = z\}$ — подгруппа группы $U(l)$ унитарных $l \times l$-матриц. На $L^2(\Lambda_l, \nu_l)$ действуют унитарные операторы $\tau(u)$ $(u \in U(l, A, z))$, определяемые соотношением $(\tau(u)\eta)(\lambda) = \eta(u^*\lambda)$ и образующие представление группы $U(l, A, z)$.

Теперь зададим представление $\Pi_{A,z}$ группы $G_j(\mathbb{C})$ в $L^2(\Lambda_l, \nu_l)$. Соответствующие операторы действуют согласно формулам

$$\begin{aligned}
&(\Pi_{A,z}\left(\begin{bmatrix} I_j & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix}\right)\eta)(\lambda) = \mid det\ g \mid^{\imath\beta}\ \hat{\alpha}_A(\lambda, g)\eta(\lambda g),\\
&(\Pi_{A,z}\left(\begin{bmatrix} I_j & 0 \\ h & I \end{bmatrix}\right)\eta)(\lambda) = \exp[i\ \Re Tr(z\lambda h)]\eta(\lambda),
\end{aligned} \tag{1.2}$$

где $\hat{\alpha}_A(\lambda, g) = \exp\left\{-\frac{1}{2}Tr[\lambda(gg^* - 1)\lambda^* - 2iA\lambda(gg^* - 1)\lambda^*]\right\}$, β — вещественное число.

В работе [12] доказано следующее важное утверждение.

Предложение 1.5. $\{\Pi_{A,z}(G_j(\mathbb{C}))\}' = \{\tau(U(l, A, z))\}''$.

Пусть ϱ — неприводимое представление группы $U(l, A, z)$, ϱ_{kl} $(1 \le k, l \le \dim \varrho)$ — его матричный элемент. Тогда оператор

$$P_{k\varrho} = \dim \varrho \int\limits_{U(l,A,z)} \overline{\varrho_{kk}}\tau\ (u)\ du$$

— минимальный ортопроектор в $\{\Pi_{A,z}(G_j(\mathbb{C}))\}'$.

Теорема 1.6. (См. теорему 5.10 из [12]). *Для любого допустимого фактор-представления Π группы $G_j(\mathbb{C})$ существуют натуральное число $\mathbf{r}(\Pi)$, самосопряженная $\mathbf{r}(\Pi) \times \mathbf{r}(\Pi)$-матрица A, $j \times \mathbf{r}(\Pi)$-матрица z, неприводимое представление ϱ группы $U(\mathbf{r}(\Pi), A, z)$ и вещественное число β такие, что Π кратно сужению $\Pi_{A,z}$ на подпространство $P_{k\varrho}L^2(\Lambda_{\mathbf{r}(\Pi)}, \nu_{\mathbf{r}(\Pi)})$, которое, в свою очередь, неприводимо.*

Пусть $rank\,(z)$ — ранг матрицы z. Используя утверждение предыдущей теоремы, легко установить необходимое в разделе 2 следующее техническое утверждение.

Предложение 1.7. *Если $rank\,(z) \ge \mathbf{r}(\Pi)$, то представление $\Pi_{A,z}$ группы $G_j(\mathbb{C})$ в $L^2(\Lambda_{\mathbf{r}(\Pi)}, \nu_{\mathbf{r}(\Pi)})$ (см. 1.2) неприводимо.*

2. Описание сферических представлений

В $M_\infty(\mathfrak{A})$ рассмотрим подпространство $M_\infty^{(p)}(\mathfrak{A})$, состоящее из матриц, у которых столбцы с номерами, бóльшими, чем p, нулевые. На $M_\infty^{(p)}(\mathfrak{A})$ умножением слева действует группа $G(\mathfrak{A})$ ($m \in M_\infty^{(p)}(\mathfrak{A}) \to gm \in M_\infty^{(p)}(\mathfrak{A})$ ($g \in G(\mathfrak{A})$)). Обозначим через $G(\mathfrak{A})\ltimes M_\infty^{(p)}(\mathfrak{A})$ соответствующее полупрямое произведение $G(\mathfrak{A})$ на аддитивную группу $M_\infty^{(p)}(\mathfrak{A})$. Как и ранее, будем отождествлять $G(\mathfrak{A})$ с ее естественным образом в $G(\mathfrak{A})\ltimes M_\infty^{(p)}(\mathfrak{A})$.

Пусть Π — сферическое фактор-представление группы $G(\mathfrak{A})\ltimes M_\infty^{(p)}(\mathfrak{A})$, действующее в гильбертовом пространстве H_Π, ξ — единичный $\Pi(U(\mathbb{C}))$-неподвижный вектор в H_Π, $\varphi_\Pi(g) = (\Pi(g)\xi, \xi)$ ($g \in G(\mathfrak{A})\ltimes M_\infty^{(p)}(\mathfrak{A})$).

Теорема 2.1. *Если* $H_\Pi = [\Pi(G(\mathfrak{A})\ltimes M_\infty^{(p)}(\mathfrak{A}))\xi]$, *то* $\dim\{\eta \in H_\Pi : \Pi(u)\eta = \eta \forall\, u \in U(\mathbb{C})\} = 1$ *и поэтому w^* — алгебра* $\{\Pi(G(\mathfrak{A})\ltimes M_\infty^{(p)}(\mathfrak{A}))\}' = \mathbb{C}I_{H_\Pi}$ *, где I_{H_Π} — единичный оператор в H_Π. Другими словами, сферическое, циклическое фактор-представление группы $G(\mathfrak{A})\ltimes M_\infty^{(p)}(\mathfrak{A})$ неприводимо.*

Доказательство. В первую очередь покажем, что любой $\Pi(U(\mathbb{C}))$-неподвижный вектор η имеет вид $\eta = c\xi$ ($c \in \mathbb{C}$). Пусть $M_\infty^{(p)}(n, \mathfrak{A})$ состоит из тех матриц $\mathfrak{m} \in M_\infty^{(p)}(\mathfrak{A})$, у которых первые n строк нулевые и $\hat{G}_p(n, \infty, \mathfrak{A}) = G(n, \infty, \mathfrak{A})\ltimes M_\infty^{(p)}(n, \mathfrak{A})$.

Предположим, что существует вектор $\eta \in H_\Pi$ со свойствами

$$||\eta|| = 1, \;\; \Pi(u)\eta = \eta \;\forall\, u \in U(\mathbb{C}), \;\; (\eta, \xi) = 0.$$

Если $M_r^{(p)}(\mathfrak{A})$ — множество матриц из $M_\infty^{(p)}(\mathfrak{A})$, у которых все строки с номерами, бóльшими r, нулевые, $\hat{G}_p(r) = G(r)\ltimes M_r^{(p)}(\mathfrak{A})$, то для любого $\epsilon > 0$ существуют r, $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, наборы $\{g_i\}_{i=1}^{N(\epsilon)} \subset \hat{G}_p(r)$, $\{c_i\}_{i=1}^{N(\epsilon)} \subset \mathbb{C}$ со свойством $||\sum\limits_{l=1}^{N(\epsilon)} c_l\Pi(g_l)\xi - \eta|| < \epsilon$. Отсюда, учитывая тот факт, что в $U(\mathbb{C})$ существует последовательность $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, для которой $u_n\hat{G}_p(r)u_n^* \subset \hat{G}_p(n, \infty, \mathfrak{A})$, получаем $||\sum\limits_{l=1}^{N(\epsilon)} c_l\Pi(u_n)\Pi(g_l)\Pi(u_n^*)\xi - \eta|| < \epsilon$ или $0 \le ||\sum\limits_{l=1}^{N(\epsilon)} c_l\Pi(u_n g_l u_n^*)\xi||^2 + \eta^2 - 2\,\Re\,(\sum\limits_{l=1}^{N(\epsilon)} c_l\Pi(u_n g_l u_n^*)\xi,\, \eta) < \epsilon^2$.

Переходя в этом неравенстве к пределу ($n \to \infty$) и замечая, что слабые предельные точки множества операторов $\left\{A_n = \sum\limits_{l=1}^{N(\epsilon)} c_l\Pi(u_n g_l u_n^*)\right\}_{n=1}^{\infty}$ имеют вид ζI_{H_Π} ($\zeta \in \mathbb{C}$), а $(\eta,\, \xi) = 0$, получаем $2-\epsilon(2+\epsilon) < \epsilon^2$. Но это противоречит произвольности ϵ. Теорема 2.1 доказана.

Следствие 2.2. *Представление Π определяется сферической функцией φ_Π с точностью до унитарной эквивалентности. Причем φ_Π при любом r однозначно восстанавливается по своему сужению на $G(r,\infty,\mathfrak{A})$.*

Сферическую функцию φ_Π будем называть *неразложимой* (φ_Π — н.с.ф.), если соответствующее ей представление Π_φ является фактор-представлением.

Следующее утверждение вытекает из *теоремы мультипликативности*, доказанной в [8].

Предложение 2.3. *Если φ — н.с.ф. на группе $G(\mathfrak{A})$, то ее сужение на $G(\mathbb{C})$ — также н.с.ф. и согласно результатам работы [8]*

$$\varphi(g) = \frac{\{\det(|g|)\}^{i\beta}}{\det\{\cosh[|g|\otimes I_k] + 2i\sinh[|g|\otimes A]\}},$$

где A — $k\times k$-самосопряженная матрица, $\beta \in \mathbb{R}$, I_k — $k\times k$-единичная матрица, $|g| = \sqrt{g^*g}$.

Определение. *Число k будем называть рангом $\mathbf{r}(\varphi)$ н.с.ф. φ или соответствующего сферического представления Π_φ.*

В дальнейшем k и φ будут такими же, как и в условии предложения 2.3.

Далее в этом разделе будем заниматься изучением сужения φ и соответствующего представления Π_φ на введенную в разделе 1 группу $G_k(\mathfrak{A})$ (см. следствие 2.2). Предположим, что Π_φ действует в гильбертовом пространстве H_φ, ξ_φ — $\Pi_\varphi(U(\mathbb{C}))$-неподвижный, единичный циклический вектор и $\varphi(g) = (\Pi_\varphi(g)\xi_\varphi,\, \xi_\varphi)$. Обозначим через Π_{φ_k} сужение Π_φ на $G_k(\mathfrak{A})$, действующее в подпространстве $H_{\varphi_k} = [\Pi_\varphi(G_k(\mathfrak{A}))\xi_\varphi]$, $\Pi_{\varphi_k}(G_k(\mathfrak{A}))''$ — бикоммутант $\Pi_{\varphi_k}(G_k(\mathfrak{A}))$, C_k — центр $\Pi_{\varphi_k}(G_k(\mathfrak{A}))''$,

$$(\Pi_{\varphi_k},\, H_{\varphi_k},\, \xi_\varphi) = \int\limits_{X(C_k)} (\Pi_{\varphi_k}^{(x)},\, H_{\varphi_k}^{(x)},\, \xi_\varphi^{(x)})\, d\mu(x) \tag{2.1}$$

— разложение $(\Pi_{\varphi_k},\, H_{\varphi_k},\, \xi_\varphi)$ в прямой интеграл фактор-представлений, где $X(C_k)$ — спектр C_k, μ — мера на $X(C_k)$.

Лемма 2.4. *Пусть $C_k^{(1)}$ — центр алгебры операторов $\Pi_{\varphi_k}(G_k(\mathfrak{A})\cap G(\mathbb{C}))''$, действующих в H_{φ_k}. Тогда:*

i) $C_k^{(1)} = \bigcap_{n\geq 1} \Pi_{\varphi_k}(G_k(n,\infty,\mathfrak{A}) \cap G(\mathbb{C}))''$, *где* $G_k(n,\infty,\mathfrak{A})$ *состоит из матриц вида* $\begin{bmatrix} I_k & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \\ * & 0 & * \end{bmatrix}$;

ii) $C_k = \bigcap_{n\geq 1} \Pi_{\varphi_k}(G_k(n,\,\infty,\,\mathfrak{A}))''$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Тот факт, что $\bigcap_{n\geq 1} \Pi_{\varphi_k}(G_k(n,\,\infty,\,\mathfrak{A}))'' \subset C_k$, а $\bigcap_{n\geq 1} \Pi_{\varphi_k}(G_k(n,\,\infty,\,\mathfrak{A}) \cap G(\mathbb{C}))'' \subset C_k^{(1)}$ очевиден. Обратное включение в обоих случаях устанавливается аналогично. Приведем подробное доказательство соотношеия $ii)$.

Пусть $a \in C_k$ и $||a|| \geq 1$. Тогда существует последовательность операторов $\left\{ A_l = \sum_{j=1}^{N_l} c_j(l)\Pi_{\varphi_k}(g_j(l)) \right\}_{l\in\mathbb{N}}$ $(N_l \in \mathbb{N},\ c_j(l) \in \mathbb{C},\ g_j(l) \in \begin{bmatrix} I_k & 0 & 0 \\ H_l & GL_l(\mathfrak{A}) & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} = G_k(l)$, где $GL_l(\mathfrak{A})$ — множество обратимых $l \times l$-матриц с коэффициентами из $\mathfrak{A}$, $H_l(\mathfrak{A})$ — множество всех $(l \times k)$-матриц с коэффициентами из $\mathfrak{A}$), со свойствами

$$||A_l|| < 1 \;\forall\, l \in \mathbb{N};\ s - \lim_{l\to\infty} A_l = a. \tag{2.2}$$

Далее, в $U(\mathbb{C}) \cap G_k(\mathfrak{A})$ найдутся операторы u_l $(l \in \mathbb{C})$, удовлетворяющие условию

$$u_l\, G_k(l)\, u_l^* \subset G_k(l,\infty,\mathfrak{A}). \tag{2.3}$$

Отсюда и из (2.2) получаем $s - \lim_{l\to\infty} \Pi_{\varphi_k}(u_l)\, A_l \Pi_{\varphi_k}(u_l^*)\, \xi_\varphi = a\xi_\varphi$ и $s - \lim_{l\to\infty} \Pi_{\varphi_k}(u_l)\, A_l \Pi_{\varphi_k}(u_l^*)\, \Pi_{\varphi_k}(g)\, \xi_\varphi = a\Pi_{\varphi_k}(g)\, \xi_\varphi$ при любом $g \in G_k(\mathfrak{A})$.

Эти соотношения с учетом вида операторов A_l (2.3) показывают, что $a \in \Pi_{\varphi_k}(G_k(l,\,\infty,\,\mathfrak{A}))''$ при всех $l \in \mathbb{N}$. Таким образом, утверждение $ii)$ нашей леммы доказано. Свойство $i)$ устанавливается аналогично. Лемма 2.4 доказана.

Пусть φ — сферическая функция на $G_k(\mathfrak{A})$. Другими словами, φ положительно определена, $\varphi(e) = 1$ (e — единица $G_k(\mathfrak{A})$), $\varphi(ugv) = \varphi(g)\ \forall\, g \in G_k(\mathfrak{A})$ и $\forall\, u,\, v \in U(\mathbb{C}) \cap G_k(\mathfrak{A})$.

В следующем утверждении не предполагается, что φ расширяется на группу $G(\mathfrak{A})$.

Предложение 2.5. *Для того чтобы φ была н.с.ф. на $G_k(\mathfrak{A})$, необходимо и достаточно выполнения следующего условия: при любых натуральных m и l, $g_1 \in G_k(l)$, $g_2 \in G_k(l) \cap G_{(k+l)}(m)$ справедливо соотношение $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о полностью аналогично обоснованию *теоремы мультипликативности* из [8].

Пусть φ и k такие же, как и в предложении 2.3, φ_k — сужение φ на $G_k(\mathfrak{A})$, $\varphi_x(g) = (\Pi_{\varphi_k}^{(x)}(g)\xi_\varphi^{(x)}, \xi_\varphi^{(x)})$, $g \in G_k(\mathfrak{A})$. Предположим, что мера μ из (2.1) нормирована так, что $||\xi_\varphi^{(x)}|| = 1$ для μ — почти всех (п.в.) $x \in X(C_k)$.

Лемма 2.6. *Если $g \in (G_k(l, \infty, \mathfrak{A}))$, то $\varphi_x(g) = \varphi(g)$ для μ-п.в. $x \in X(C_k)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как по предположению φ — н.с.ф. на $G_k(\mathfrak{A})$, то, принимая во внимание предложение 2.5, получаем

$$\int\limits_{x \in X(C_k)} \varphi_x(g_1)\varphi_x(g_2)\, d\mu(x) = \int\limits_{x \in X(C_k)} \varphi_x(g_1)\, d\mu(x) \int\limits_{x \in X(C_k)} \varphi_x(g_2)\, d\mu(x)$$

$\forall\, g_1, g_2$ из условия предложения 2.5. Отсюда очевидным образом вытекает утверждение леммы.

Обозначим через $H_k(\mathfrak{A})$ $(H_k(\mathbb{C}))$ подгруппу $G_k(\mathfrak{A})$ $(G_k(\mathbb{C}))$, состоящую из матриц вида $\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ h & I \end{bmatrix}$.

Лемма 2.7. *Пусть φ и k такие же, как и в предложении 2.3. Тогда для μ-п.в. $x \in X(C_k)$ $H_{\varphi_k}^{(x)} = [\Pi_{\varphi_k}^{(x)}(H_k(\mathbb{C}))\xi_\varphi^{(x)}] = [\Pi_{\varphi_k}^{(x)}(G_k(\mathfrak{A}))\xi_\varphi^{(x)}]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая предложение 2.3, леммы 2.4, 2.6 и полное описание сферических представлений групп $GL(\infty)$ (см. [8]), используя их конкретную реализацию, можно показать, что

$$H^{(x)} = [\Pi_{\varphi_k}^{(x)}(H_k(\mathbb{C}))\xi_\varphi^{(x)}] = [\Pi_{\varphi_k}^{(x)}(G_k(\mathbb{C}))\xi_\varphi^{(x)}] \tag{2.4}$$

для μ-п.в. $x \in X(C_k)$ (см. (2.1)).

Предположим, что существует $g \in G_k(\mathfrak{A})$ такой, что $\Pi_{\varphi_k}^{(x)}(g)\xi_\varphi^{(x)} \notin H_{\mathrm{C}}^{(x)}$ для x из некоторого множества $E \subset X(C)$ положительной μ-меры. Тогда, обозначая через P_x ортопроектор $H_{\varphi_k}^{(x)} = [\Pi_{\varphi_k}^{(x)}(G_k(\mathfrak{A}))\xi_\varphi^{(x)}]$ на $H^{(x)}$, получаем $\eta_x = \Pi_{\varphi_k}^{(x)}(g)\xi_\varphi^{(x)} - P_x(\Pi_{\varphi_k}^{(x)}(g)\xi_\varphi^{(x)}) \neq 0$ и $\eta_x \perp H^{(x)}$. Отсюда и из (2.4) следует, что $[\Pi_{\varphi_k}^{(x)}(G_k(\mathbb{C}))\eta_x] = H_\eta^{(x)}$ ортогонально $H^{(x)}$ $\forall\, x \in E$.

Пусть Π_{η_x} — сужение $\Pi_{\varphi_k}^{(x)}$ на группу $G_k(\mathbb{C})$, действующее в $H_\eta^{(x)}$. Понятно, что оно является допустимым. В силу утверждений 2.1 и 2.4 w^*-алгебры $\Pi_{\varphi_k}^{(x)}(G_k(\mathfrak{A}))''$ и $\Pi_{\varphi_k}^{(x)}(G_k(\mathbb{C}))''$ операторов, действующих в $H_{\varphi_k}^{(x)}$ и $H_\eta^{(x)}$, соответственно неприводимы.

Используя конструкцию асимптотической сферической функции (см. предложение 1.2), по вектору $\eta_x\,||\eta_x||^{-1}$ построим а.с.ф. φ_{η_x} на $G_k(\mathbb{C})$). В силу предложения 1.2

$$(\Pi_{\varphi_k}^{(x)}(g)\xi_\varphi^{(x)},\,\xi_\varphi^{(x)})\,||\xi_\varphi^{(x)}||^{-1}=\varphi_{\eta_x}(g)\ \text{ при всех }\ g\in G_k(\mathbb{C}). \tag{2.5}$$

Так как Π_{η_x} — *допустимое* представление группы $G_k(\mathbb{C})$, то из соотношений (2.3)–(2.4), используя классификационные утверждения 1.6–1.7, получаем, что в $H_\eta^{(x)}$ существует ненулевой $\Pi_{\eta_x}(U(\mathbb{C})\cap G_k(\mathbb{C}))$-неподвижный вектор ξ_x'. Так как $\xi_x'\perp\xi_\varphi^{(x)}$, то принимая во внимание тот факт, что представление $\Pi_{\varphi_k}^{(x)}$ группы $G_k(\mathfrak{A})$, действующее в $H_{\varphi_k}^{(x)}$, удовлетворяет условиям теоремы 2.1, получаем противоречие. Лемма 2.7 доказана.

Замечание 2.8. *Опираясь на утверждения 1.6 и 2.7 и переходя в случае необходимости к унитарно эквивалентному представлению, можно предположить без ограничения общности, что операторы $\Pi_{\varphi_k}^{(x)}(g)$ при g, которые принадлежат подгруппе, порожденной $G_k(\mathbb{C})$ и $H_k(\mathfrak{A})$, совпадают с $\Pi_{A(x),z(x)}(g)$ (см. (1.2)). При этом для удобства записи действия операторов $\Pi_{A(x),z(x)}(g)$ при $g\in H_k(\mathfrak{A})$ заметим, что $z(x)$ состоит из $k\dim\mathfrak{A}$ строк и k столбцов и имеет вид $\begin{bmatrix}\zeta_0(x)\\ \zeta_1(x)\\ \zeta_2(x)\\ \vdots\\ \zeta_n(x)\end{bmatrix}$, где $\zeta_k(x)$ — $k\times k$-матрица ($0\le k\le n=\dim\mathfrak{A}-1$). Причем $\zeta_0(x)$ невырождена для μ-п.в. $x\in X(C_k)$.*

Учитывая это, будем считать, что оператор $\Pi_{A(x),z(x)}(h)$ при $h=\begin{bmatrix}I_k & 0\\ \sum\limits_{j=0}^n \mathfrak{a}_j h_j & I\end{bmatrix}$, где h_j — комплексная матрица соответствующих размеров, действует согласно формуле (см. (1.2))

$$(\Pi_{A(x),z(x)}(h)\eta)(\lambda)=\exp\left[i\Re\,Tr\left(\sum_{j=0}^n\zeta_j(x)\lambda h_j\right)\right]\eta(\lambda)\times(\eta\in L^2(\Lambda_k,\nu_k)). \tag{2.6}$$

Для описания действия операторов $\Pi_{A(x),z(x)}(g)$ $(g \in G(k,\infty,\mathfrak{A}))$ заметим, что $g = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I + \sum\limits_{j=0}^{n} \mathfrak{a}_j \mathfrak{m}_j \end{bmatrix}$, где $\mathfrak{m}_j \in M_\infty(\mathbb{C})$, $\mathfrak{a}_0 = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}$. Если $h = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ h_0 \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} & I \end{bmatrix}$, то $ghg^{-1} = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ h_0 \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} + \sum\limits_{j=0}^{n} \mathfrak{a}_j \mathfrak{m}_j h_0 & I \end{bmatrix}$. Следовательно,

$$
\begin{aligned}
&(\Pi_{A(x),z(x)}(g)\Pi_{A(x),z(x)}(h)\Pi_{A(x),z(x)}(g^{-1})\eta)(\lambda) \\
&= \exp\left\{ i\Re\, Tr \left(\zeta_0(x)\lambda h_0 + \sum_{j=0}^{n} \zeta_j(x)\lambda \mathfrak{m}_j h_0 \right) \right\} \eta(\lambda) \\
&= \exp\left\{ i\Re\, Tr \left(\zeta_0(x) \left[\lambda h_0 + \sum_{j=0}^{n} (\zeta_0(x))^{-1} \zeta_j(x) \lambda \mathfrak{m}_j h_0 \right] \right) \right\} \eta(\lambda).
\end{aligned}
$$

Отсюда, полагая $\kappa_x(\mathfrak{a}_j) = (\zeta_0(x))^{-1}\zeta_j(x)$, $0 \le j \le n$, $\lambda_{g_{\kappa_x}} = \lambda + \sum\limits_{j=0}^{n} \kappa_x(\mathfrak{a}_j)\lambda \mathfrak{m}_j$, получаем, что действие $\Pi_{A(x),z(x)}(g)$ определено формулой

$$
\begin{gathered}
\left(\Pi_{A(x),z(x)}(g)\eta\right)(\lambda) = \beta(\lambda, g) \left[\frac{d\nu_k\left(\lambda_{g_{\kappa_x}}\right)}{d\nu_k(\lambda)} \right]^{1/2} \eta\left(\lambda_{g_{\kappa_x}}\right), \\
\beta(\lambda, g) \in \mathbb{T} = \{c \in \mathbb{C} : |c| = 1\}.
\end{gathered} \tag{2.7}
$$

Лемма 2.9. *Линейное расширение отображения κ_x, заданного на линейных образующих $\mathfrak{a}_j$ $(0 \le j \le n)$ формулой $\kappa_x(\mathfrak{a}_j) = (\zeta_0(x))^{-1}\zeta_j(x)$, является антигомоморфизмом из $\mathfrak{A}$ в $M_k(\mathbb{C})$. Причем $\kappa_x(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}) = I_k$.*

Доказательство. $\kappa_x(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}) = I_k$ по определению.

Пусть $h = \begin{bmatrix} I_k & 0 & 0 \\ \mathfrak{a}_j h(1,k) & I_k & 0 \\ \mathfrak{a}_j h(k+1,\infty) & 0 & I \end{bmatrix} \in H_k(\mathfrak{A})$, $g = \begin{bmatrix} I_k & 0 & 0 \\ 0 & I_k & 0 \\ 0 & \mathfrak{a}_l q & I \end{bmatrix}$, где $h(1,k)$, $h(k+1,\infty)$, q — произвольные комплексные матрицы соответствующих размеров. Тогда

$$
ghg^{-1} = \begin{bmatrix} I_k & 0 & 0 \\ \mathfrak{a}_j h(1,k) & I_k & 0 \\ \mathfrak{a}_j h(k+1,\infty) + \mathfrak{a}_l \mathfrak{a}_j q h(1,k) & 0 & I \end{bmatrix}.
$$

Отсюда и из (2.6), записывая $\lambda \in \Lambda_k$ в виде $\lambda = [\lambda(1,k), \lambda(k+1,\infty)]$, где $\lambda(1,k)$ состоит из k первых столбцов матрицы λ, а $\lambda(k+1,\infty)$ — из оставшихся, получаем

$$\begin{aligned}\left(\Pi_{A(x),z(x)}(ghg^{-1})\eta\right)(\lambda) &= \exp\{i\Re\, Tr(\zeta_0(x)[\kappa_x(\mathfrak{a}_j)\lambda(1,k)h(1,k)\\ &+ \kappa_x(\mathfrak{a}_l\mathfrak{a}_j)\lambda(k+1,\infty)\, q\, h(1,k)\\ &+ \kappa_x(\mathfrak{a}_j)\lambda(k+1,\infty)\, h(k+1,\infty)])\}\eta(\lambda). \quad (2.8)\end{aligned}$$

Так как действие, индуцируемое элементом g на Λ_k, имеет вид

$$[\lambda(1,k),\ \lambda(k+1,\infty)] \to \lambda_{g_{\kappa_x}} = [\lambda(1,k) + \kappa_x(\mathfrak{a}_l)\lambda(k+1,\infty)q, \lambda(k+1,\infty)],$$

то из (2.6)–(2.7) вытекает следующее соотношение:

$$\begin{aligned}&(\Pi_{A(x),z(x)}(g)\Pi_{A(x),z(x)}(h)\Pi_{A(x),z(x)}(g^{-1})\eta)(\lambda)\\ &= \exp\{i\Re\, Tr(\zeta_0(x)[\kappa_x(\mathfrak{a}_j)\lambda(1,k)h(1,k)\\ &+\kappa_x(\mathfrak{a}_j)\kappa_x(\mathfrak{a}_l)\lambda(k+1,\infty)\, q\, h(1,k)\\ &+\kappa_x(\mathfrak{a}_j)\lambda(k+1,\infty)\, h(k+1,\infty)])\}\eta(\lambda).\end{aligned} \tag{2.9}$$

В силу того, что правые части (2.8)–(2.9) должны совпадать при всех p, $h(1,k)$, $h(k+1,\infty)$, то $\kappa_x(\mathfrak{a}_l\mathfrak{a}_j) = \kappa_x(\mathfrak{a}_j)\kappa_x(\mathfrak{a}_l)$. Лемма 2.9 доказана. Верно также обратное утверждение.

Лемма 2.10. *Если κ_x — антигомоморфизм и $\beta(\lambda, gh) = \beta(\lambda, g)\beta\left(\lambda_{g_{\kappa_x}}, h\right)$ $\forall\, g,\, h \in G(k,\infty,\mathfrak{A})$, то операторы $\Pi_{A(x),z(x)}(g)$ образуют представление группы $G(k,\infty,\mathfrak{A})$.*

Доказательство сводится к простой проверке соответствующих соотношений.

Пусть подгруппа $H_{(k,1)}(\mathfrak{A})$ ($H_{(k,1)}(\mathbb{C})$) состоит из матриц вида $\begin{bmatrix} I_k & 0 & 0\\ 0 & I_k & h\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix}$, где h — матрица соответствующих размеров над $\mathfrak{A}$ ($\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}(\mathbb{C})$).

Следующие утверждения, необходимые для обоснования того факта, что $\beta(\lambda, g)$, $g \in G(k,\infty,\mathfrak{A})$, определяются с точностью до одномерного унитарного представления видом операторов из (1.2), (2.6)–(2.7).

Лемма 2.11. *Если $h \in H_{(k,1)}(\mathfrak{A})$, то*

$$\beta(\lambda, h) = \exp\left\{i\, Tr\left[A_x\left(\lambda_{g_{\kappa_x}}\lambda^*_{g_{\kappa_x}} - \lambda\lambda^*\right)\right]\right\} = \alpha_{A_x}(\lambda, h).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно замечанию 2.8 $\beta(\lambda,h)=\alpha_{A_x}(\lambda,h)$ при $h\in G(k,\infty,\mathfrak{A})\cap G(\mathbb{C})=G(k,\infty,\mathbb{C})$ (см. (1.2)).

Пусть $h=\begin{bmatrix} I_k & 0 & 0\\ 0 & I_k & h_{\mathfrak{A}}\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix}\in H_{(k,1)}(\mathfrak{A})$, $q=\begin{bmatrix} I_k & 0 & 0\\ 0 & I_k & q_{\mathbb{C}}\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix}\in H_{(k,1)}(\mathbb{C})$. Учитывая замечание 2.8, соотношение $hq=qh$, свойства (1.2) и (2.7), получаем $\beta(\lambda,h)\alpha_{A_x}(\lambda_{h_{\kappa_x}},q)=\alpha_{A_x}(\lambda,q)\beta(\lambda_{q_{\kappa_x}},h)$. Отсюда, используя вид α_{A_x}, можно с помощью простой проверки убедиться в справедливости следующего равенства:

$$\begin{aligned} T(\lambda,h) &= \beta(\lambda,h)\exp\left\{-i\,Tr\left[A_x\left(\lambda_{h_{\kappa_x}}\lambda^*_{h_{\kappa_x}}-\lambda\lambda^*\right)\right]\right\}\\ &= \beta(\lambda_{q_{\kappa_x}},h)\exp\left\{-i\,Tr\left[A_x\left(\lambda_{(hq)_{\kappa_x}}\lambda^*_{(hq)_{\kappa_x}}-\lambda_{q_{\kappa_x}}\lambda^*_{q_{\kappa_x}}\right)\right]\right\}\\ &= T(\lambda_{q_{\kappa_x}},h). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Так как $q_{\mathbb{C}}$ произвольно, а $\lambda_{q_{\kappa_x}}=[\lambda(1,k),\lambda(k+1,\infty)+\lambda(1,k)q_{\mathbb{C}}]$, то в силу (2.10) $T(\cdot,h)$ не зависит от $\lambda(k+1,\infty)$.

Установим независимость $T(\cdot,h)$ от $\lambda(1,k)$. Для этого заметим, что существует $N\in\mathbb{N}$, $(N>k)$, для которого все столбцы матрицы $h_{\mathfrak{A}}$ с номерами, бо́льшими, чем N, нулевые. Положим $g=\begin{bmatrix} I_k & 0 & 0 & 0\\ 0 & I_k & 0 & 0\\ 0 & 0 & I_N & 0\\ 0 & p_{\mathbb{C}}\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} & 0 & I\end{bmatrix}$, где $p_{\mathbb{C}}$ — произвольная комплексная матрица. По построению $gh=hg$. Отсюда так же, как и выше, получаем соотношение $T(\lambda_{g_{\kappa_x}},h)=T(\lambda,h)$, которое ввиду того, что $\lambda_{g_{\kappa_x}}=[\lambda(1,k)+\lambda(k+N+1,\,\infty)p_{\mathbb{C}},\,\lambda(k+1,\,\infty)]$, приводит к независимости $T(\cdot,h)$ от $\lambda(1,k)$. Следовательно, T — одномерное унитарное представление группы $H_{(k,1)}(\mathfrak{A})$. Наконец, из соотношения

$$\Pi_{A(x),z(x)}(r)\Pi_{A(x),z(x)}(h)\Pi_{A(x),z(x)}(r^{-1})=\Pi_{A(x),z(x)}(h(r)),\quad\text{где}$$

$r=\begin{bmatrix} I_k & 0 & 0\\ 0 & I_k & 0\\ 0 & 0 & r_{\mathbb{C}}\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}\end{bmatrix}\in G(2k,\infty,\mathbb{C})$, $h(r)=\begin{bmatrix} I_k & 0 & 0\\ 0 & I_k & h_{\mathfrak{A}}r_{\mathbb{C}}^{-1}\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix}$, легко следует, что $T(\cdot,h)=T(\cdot,r(h))$. Так как $r_{\mathbb{C}}$ – произвольная обратимая матрица, то $T(\cdot,h)\equiv 1$. Лемма 2.11 доказана.

Лемма 2.12. *Пусть* $g=\begin{bmatrix} I_k & 0 & 0\\ 0 & I_k & 0\\ 0 & 0 & g_{\mathfrak{A}}\end{bmatrix}\in G(2k,\infty,\mathfrak{A})$, *где* $g_{\mathfrak{A}}$ *— произвольная обратимая матрица над* $\mathfrak{A}$. *Тогда существует одномерное унитарное представление* χ *группы* $G(2k,\infty,\mathfrak{A})$ *такое, что*

$$\beta(\lambda,g)=\exp\left\{i\,Tr\left[A_x\left(\lambda_{g_{\kappa_x}}\lambda^*_{g_{\kappa_x}}-\lambda\lambda^*\right)\right]\right\}\chi(g).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть h такое же, как и в доказательстве предыдущей леммы. Тогда $gh_g = hg$, где $h_g = \begin{bmatrix} I_k & 0 & 0 \\ 0 & I_k & h_{\mathfrak{A}} g_{\mathfrak{A}} \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$. Следовательно, $\beta(\lambda, g)\beta(\lambda_{g_{\kappa_x}}, h_g) = \beta(\lambda, h)\beta(\lambda_{h_{\kappa_x}}, g)$. Отсюда, учитывая утверждение предыдущей леммы, получаем

$$D(\lambda, g) = \beta(\lambda, g) \exp\left\{-i\,Tr\left[A_x\left(\lambda_{g_{\kappa_x}}\lambda^*_{g_{\kappa_x}} - \lambda\lambda^*\right)\right]\right\} = \beta\left(\lambda_{h_{\kappa_x}}, g\right)$$
$$\times \exp\left\{-i\,Tr\left[A_x\left(\left(\lambda_{h_{\kappa_x}}\right)_{g_{\kappa_x}}\left(\lambda_{h_{\kappa_x}}\right)^*_{g_{\kappa_x}} - \lambda_{h_{\kappa_x}}\lambda^*_{h_{\kappa_x}}\right)\right]\right\} = D(\lambda_{h_{\kappa_x}}, g).$$

Из этого соотношения по той же причине, что и в доказательстве леммы 2.11, вытекает независимость $D(\lambda, g)$ от $\lambda(k+1, \infty)$. Так как $gr = rg$ при всех $r \in \begin{bmatrix} I_k & 0 & 0 \\ 0 & GL_l(\mathfrak{A}) & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$, то, опираясь на (2.7), получаем независимость $D(\lambda, g)$ от λ. Следовательно, унитарный коцикл $D(\lambda, g)$ — одномерное представление группы $G(2k, \infty, \mathfrak{A})$. Лемма 2.12 доказана.

Из полученных результатов вытекает главный результат этого раздела, содержащийся в следующем утверждении.

Теорема 2.13. *Пусть* Π — *сферическое фактор-представление группы* $G(\mathfrak{A})$. *Тогда* Π *имеет тип 1. Существуют* $k \in \mathbb{N}$, *антигомоморфизм* $\kappa : \mathfrak{A} \to M_k(\mathbb{C})$, *самосопряженная* $k \times k$*-матрица* A *и одномерное унитарное представление* χ *группы* $G(\mathfrak{A})$ *такие, что неприводимая компонента* Π *унитарно эквивалентна сужению представления* $\chi \otimes \Pi_{A,\kappa}$ *(см. (0.1)), действующего в* $L^2(\Lambda_k, \nu_k)$, *на подпространство* $[\Pi_{A,\kappa}(G(\mathfrak{A}))\xi_0]$, *где* $\xi_0 \in L^2(\Lambda_k, \nu_k)$, *и определяется функцией на* Λ_k, *которая тождественно равна единице.*

Такое сужение будем обозначать в дальнейшем через $\Pi^{\chi,0}_{A,\kappa}$.

С помощью изложенного здесь метода можно установить аналог теоремы 2.13 для сферических представлений группы $G(\mathfrak{A}) \ltimes M^{(p)}_\infty(\mathfrak{A})$, введенной в начале этого раздела. Так как соответствующее утверждение будет применяться при изучении фактор-представлений типа *III* группы $GL(\infty)$, приведем здесь его полную формулировку.

Отождествим $G(\mathfrak{A})$ с ее образом в $G(\mathfrak{A}) \ltimes M^{(p)}_\infty(\mathfrak{A})$ при естественном вложении $G(\mathfrak{A}) \hookrightarrow G(\mathfrak{A}) \ltimes M^{(p)}_\infty(\mathfrak{A})$ ($M^{(p)}_\infty \hookrightarrow G(\mathfrak{A}) \ltimes M^{(p)}_\infty(\mathfrak{A})$).

Теорема 2.14. *Пусть* Π — *сферическое фактор-представление группы* $G(\mathfrak{A}) \ltimes M^{(p)}_\infty(\mathfrak{A})$. *Тогда* Π *имеет тип 1. Причем существуют* $k \in \mathbb{N}$, *анти-*

гомоморфизм $\kappa : \mathfrak{A} \to M_k(\mathbb{C})$, *самосопряженная* $k \times k$*-матрица* A, $p \times k$*-матрица* z *и одномерное унитарное представление* χ $G(\mathfrak{A})$ *такие, что неприводимая компонента* Π *унитарно эквивалентна сужению представления* $\Pi^{\chi}_{A,\kappa,z}$, *которое определяется в* $L^2(\Lambda_k, \nu_k)$ *операторами, действующими согласно формулам:*

$$\left(\Pi^{\chi}_{A,\kappa,z}(h)\xi\right)(\lambda) = \exp\left\{ i\Re Tr\left[\sum_{j=0}^{n} z\kappa\left(\mathfrak{a}_j\right)\lambda h_j\right]\right\}\xi(\lambda),$$

где $h = \sum\limits_{j=0}^{n} \mathfrak{a}_j h_j \in M^{(p)}_{\infty}(\mathfrak{A})$, $h_j \in M^{(p)}_{\infty}(\mathbb{C})$, $\left\{\mathfrak{a}_0 = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}},\ \{\mathfrak{a}_j\}_{j=1}^{n}\right\}$ *— базис линейного пространства* $\mathfrak{A}$; $\Pi^{\chi}_{A,\kappa,z}(g) = \chi \otimes \Pi_{A,\kappa}(g)$ *при всех* $g \in G(\mathfrak{A})$, *(см. (0.1)), на подпространство* $\left[\Pi^{\chi}_{A,\kappa,z}(G(\mathfrak{A}) \ltimes M^{(p)}_{\infty}(\mathfrak{A}))\xi_0\right]$.

Список литературы

[1] *А.А. Кириллов*, Представления бесконечномерной унитарной группы. — *Докл. АН СССР* (1973), т. 212, с. 288–290.

[2] *Г.И. Ольшанский*, Унитарные представления бесконечномерных классических групп $U(p,\infty)$, $SO_0(p,\infty)$, $Sp(p,\infty)$ и соответствующих групп движений. — *Функц. анализ и его прил.* (1978), т. 12, № 3, с. 32–44.

[3] *Г.И. Ольшанский*, Унитарные представления бесконечномерных пар (G,K) и формализм Р. Хау. — *Докл. АН СССР* (1983), т. 269, с. 33–36.

[4] *Г.И. Ольшанский*, Конструкция унитарных представлений бесконечномерных классических групп. — *Докл. АН СССР* (1980), т. 250, с. 284–288.

[5] *Г.И. Ольшанский*, Метод голоморфных расширений в теории унитарных представлений бесконечномерных классических групп. — *Функц. анализ и его прил.* (1988), т. 22, № 4, с. 23–37.

[6] *А.М. Вершик, С.В. Керов*, Характеры и фактор-представления бесконечной унитарной группы. — *Докл. АН СССР* (1982), т. 267, № 2, с. 272–276.

[7] *Н.И. Нессонов*, Описание представлений группы обратимых операторов гильбертова пространства, содержащих единичное представление унитарной подгруппы. — *Функц. анализ и его прил.* (1983), т. 17, № 1, с. 79–80.

[8] *Н.И. Нессонов*, Полная классификация представлений $GL(\infty)$, содержащих единичное представление унитарной подгруппы. — *Мат. сб.* (1986), т. 130, № 2, с. 131–150.

[9] *Н.И. Нессонов*, Полное описание неразложимых сферических функций на бесконечномерной группе движений. — *Докл. АН СССР* (1987), т. 6, с. 7–9.

[10] *Н.И. Нессонов*, Описание допустимых представлений бесконечномерных матричных групп с коэффициентами в конечномерной алгебре. — *Функц. анализ и его прил.* (1992), т. 26, № 2, с. 93–95.

[11] *N.I. Nessonov*, Representations of infinite-dimensional matrix groups and associated dynamical systems. Operator algebras and operator theory: *Proc. OATE 2 Conf.*, Romania (1989), Longman Group UK Limited (1992).

[12] *N.I. Nessonov*, A complete classification of the admissible representations of infinite-dimensional classical matrix groups. Preprint, Internet, http://xxx.lanl.gov/find./funct-an./9704002.

[13] *O. Brateli and D.W. Robinson*, Operator algebras and quantum statistical mechanics. V. 2. Springer–Verlag, Berlin (1987). States in quantum statistical mechanics. Models of quantum statistical mechanics.

[14] *M. Takesaki*, Tomitas theory of modular Hilbert algebras and its applications. — *Lect. Notes Math.*, Springer–Verlag, Berlin (1972), v. 128.

Factor-representation of the group $GL(\infty)$ and admissible representations $GL(\infty)^X$

N.I. Nessonov

The paper is the first of three parts of the work which studies factor-representations of III-type of $GL(\infty)$ group. Let $\mathfrak{A}$ be a complex finite-dimensional algebra with unit $\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}$, let $G(\mathfrak{A})$ designate a group of all infinite dimensional invertible matrices with values on $\mathfrak{A}$. The complete classification of unitary representations of $G(\mathfrak{A})$, which are spherical with respect to unitary subgroup $U(\infty) \subset GL(\infty) = G(\mathbb{C}\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}) \subset G(\mathfrak{A})$, was obtained in the work. To each representation there corresponds a class of factor-representations Π of $GL(\infty)$ group with the property, that there exists nonzero vector ξ in a space of the representation H_Π, which suffices to correlation : $\varphi(g) = (\Pi(g)\xi, \xi) = \varphi(ugu^*)$ for all $u \in U(\infty)$. We give a complete description of representations which satisfy the last condition in further parts of the work.