Математическая физика, анализ, геометрия
2003, т. 10, № 2, с. 249–255

О некоторых свойствах собственных значений при вариации области

Ю.С. Гасымов

Институт прикладной математики, Бакинский государственный университет
ул. З. Халилова, 23, Баку, 370148, Азербайджан
E-mail:yusifcan@rambler.ru

Статья поступила в редакцию 21 сентября 2002 г.
Представлена Ф.С. Рофе-Бекетовым

Рассматривается спектральная задача для эллиптического оператора второго порядка. Изучены некоторые свойства собственных значений этого оператора относительно области.

Розглядається спектральна задача для еліптичного оператора другого порядку. Вивчено деякі властивості власних значень цього оператора відносно області.

Изучение зависимости собственных значений от области представляет как теоретический, так и практический интерес. Несмотря на актуальность, эти исследования имеют некоторые математические трудности, связанные, в первую очередь, с понятием вариации области.

В работах [1–3], используя разные описания вариации области, изучены некоторые свойства собственных значений.

В настоящем исследовании изучены некоторые свойства собственных значений эллиптического оператора на основе использования полученной ранее формулы для первой вариации относительно области.

Рассмотрим следующую задачу на собственные значения:

$$-\Delta u(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x),\ x \in D, \tag{1}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in S_D, \tag{2}$$

где D — ограниченная выпуклая область из E^n, $S_D \in C^2$ — ее граница, Δ — оператор Лапласа, $q(x)$ — дифференцируемая неотрицательная функция

Mathematics Subject Classification 2000: 35J25, 35R35, 65L15.

на D. При этих условиях собственные функции $u_j(x)$ задачи (1), (2) принадлежат классу $C^2(D)\cap C^1\overline{(D)}$, а собственные значения λ_j — положительны и могут быть пронумерованы в порядке возрастания с учетом их кратности [4].

Множество выпуклых ограниченных областей $D\subset E^n$ обозначим через M. Пусть

$$K=\{D\in M,\ S_D\in C^2\}.$$

Известно, что для фиксированной области D j-е собственное значение задачи (1), (2) вычисляется по формуле [5]

$$\lambda_j(D)=\inf_u I(u,D),\quad (u,u_p)=0,\ p=\overline{1,j-1}, \tag{3}$$

где

$$I(u,D)=\frac{\int_D\{|\nabla u(x)|^2+q(x)u^2(x)\}\,dx}{\int_D u^2(x)dx}.$$

Здесь $|\nabla u(x)|^2=\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2$, а $\inf$ берется по всем функциям, $u\in C^2(D)\cap C^1(\overline{D})$, обращающимся в нуль на границе S_D.

Как видно, формула (3) определяет собственное значение λ_j как функционал от D.

В работах [6, 7] доказана дифференцируемость функционала $\lambda_j(D)$ по D на K и получено выражение для его первой вариации при различных граничных условиях. Для задачи (1), (2) это выражение имеет вид

$$\delta\lambda_j(D)=-\max_{u_j}\int\limits_{S_D}|\nabla u_j(\xi)|^2\left[P_{D'}\left(n(\xi)\right)-P_D\left(n(\xi)\right)\right]d\xi, \tag{4}$$

где D, $D'\in K$, $P_D(x)=\max\limits_{l\in D}(x,l)$, $x\in E^n$ — опорная функция области D, $n(\xi)$ — внешняя нормаль к границе S_D в точке ξ, а $\max$ берется по всем собственным функциям, соответствующим собственному значению $\lambda_j(D)$ в случае его кратности. Если $\lambda_j(D)$ — простое собственное значение задачи (1), (2), то $\max$ перед интегралом отсутствует.

В данной работе исследуются некоторые свойства собственных значений относительно области, используя это выражение.

Так как полученные в статье формулы верны для каждого λ_j, в дальнейшем не будем вводить индексы.

Пусть область D зависит от параметра $t\in R$, т.е. $D=D(t)$, $\lambda(t)=\lambda\left(D(t)\right)$.

Следствие 1. *Если $P'_{D(t)}(x) \geq 0$ ($P'_{D(t)}(x) \leq 0$), $\forall x \in E^n$, то $\lambda(t)$ убывает (возрастает) относительно t.*

Действительно, непосредственно из (4) получим

$$\lambda'(t) = -\max_u \int\limits_{S_{D(t)}} |\nabla u(\xi)|^2 \, P'_{D(t)}(n(\xi))\, d\xi\,, \tag{5}$$

где

$$P'_{D(t)}(x) = \frac{d}{dt} P_{D(t)}(x).$$

Отсюда следует, что если $P'_{D(t)}(x) \geq 0$ ($P'_{D(t)}(x) \leq 0$), $\forall x \in E^n$, то $\lambda'(t) \leq 0$ ($\lambda'(t) \geq 0$), т.е. $\lambda(t)$ убывает (возрастает) относительно t.

П р и м е р 1. Пусть

$$D(t) = D_0 + t \cdot D,\ t > 0, D_0,\ D \in K.$$

Тогда

$$P_{D(t)}(x) = P_{D_0}(x) + t \cdot P_D(x),\ P'_{D(t)}(x) = P_D(x).$$

Если $0 \in D$, то по определению опорной функции $P_D(x) \geq 0$, т.е. $\lambda(t)$ убывает.

Теперь предположим, что $D = D(t),\ t = (t_1, \ldots, t_k) \in T \subset E^k$ и $S_{D(t)} \in C^2$ для каждого $t \in T$. Тогда из (4) получим

$$\frac{\partial \lambda(t)}{\partial t_i} = -\max_u \int\limits_{S_{D(t)}} |\nabla u(\xi)|^2 \, \frac{\partial P_{D(t)}\,(n(\xi))}{\partial t_i}\, d\xi\,. \tag{6}$$

Следствие 2. *Пусть $n = 1,\ D(t) = D(t_1, t_2) = [t_1, t_2]$. Тогда λ возрастает относительно t_1 и убывает относительно t_2.*

На самом деле, в этом случае

$$P_{[t_1,t_2]}\,(x) = \begin{cases} t_2 x, & x \geq 0, \\ t_1 x, & x \leq 0. \end{cases} \tag{7}$$

Отсюда и из (6) получаем

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t_1} = \left| \frac{\partial u(t_1)}{\partial x} \right|^2, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial t_2} = -\left| \frac{\partial u(t_2)}{\partial x} \right|^2.$$

Следующая теорема показывает, что граничное значение функции $|\nabla u_j(x)|$ однозначно определяет собственное значение λ_j.

Теорема 1. *Пусть* $t^2 q(xt) = q(x)$. *Тогда для собственных значений задачи* (1), (2) *в области* D *верна формула*

$$\lambda_j(D) = \frac{1}{2}\max_{u_j}\int\limits_{S_D} |\nabla u_j(\xi)|^2 P_D(n(\xi))d\xi. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возмем $D_0 \in K$, $D(t) = tD_0$, $t > 0$. j-ю собственную функцию задачи (1), (2), соответствующую области D_0, обозначим через $u_j(x)$. Тогда ясно, что $\tilde{u}_j(x) = u_j\left(\frac{x}{t}\right)$, $x \in D(t)$, является собственной функцией задачи (1), (2) при $D = D(t)$. Действительно, учитывая

$$\Delta\tilde{u}_j(x) = \frac{1}{t^2}\Delta u_j\left(\frac{x}{t}\right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{t^2}q\left(\frac{x}{t}\right) = q(x),$$

получаем, что $\tilde{u}_j(x)$ является собственной функцией задачи (1), (2), соответствующей собственному значению $\lambda_j(t) = \frac{\lambda_j(D_0)}{t^2}$. Принимая во внимание это в (5), имеем

$$-2\frac{\lambda_j\left(D_0\right)}{t^3} = -\frac{1}{t^2}\max_{\tilde{u}_j}\int\limits_{S_D(t)} \left|\nabla u_j\left(\frac{\xi}{t}\right)\right|^2 P_{D_0}(n(\xi))d\xi.$$

При $t = 1$ получим (8). Теорема доказана.

Из формулы (8) для одномерного случая, т.е. при $n = 1$, $D = [t_1, t_2]$, получим

$$\lambda = \frac{1}{2}u_x^2\left(t_2\right)t_2 - \frac{1}{2}u_x^2\left(t_1\right)\cdot t_1. \tag{9}$$

Сходство формул (5) и (8) дает возможность исследовать некоторые качественные свойства собственных значений относительно области.

Теорема 2. *Допустим, что* λ *является простым собственным значением задачи* (1), (2) *и для опорной функции* $P(t,x)$ *области* $D(t)$ *выполняется соотношение*

$$\sum_{i=1}^{k} a_i\left(t\right)\frac{\partial P\left(t,x\right)}{\partial t_i} = b\left(t\right)P\left(t,x\right), \quad x \in E^n,\ t \in T. \tag{10}$$

Тогда собственное значение $\lambda(t)$ *задачи* (1), (2) *в области* $D(t)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\sum_{i=1}^{k} a_i\left(t\right)\frac{\partial\lambda\left(t\right)}{\partial t_i} = -2b\left(t\right)\lambda\left(t\right), \tag{11}$$

где $a_i(t)$, $i = \overline{1,k}$, $b(t)$ — *заданные функции.*

Доказательство. Умножая каждую сторону (6) на $a_i(t)$, суммируя и учитывая (10), получим

$$\sum_{i=1}^{k} a_i(t) \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial t_i} = -\int_{S_B} |\nabla u\,(t,\xi)|^2\, b(t) P_{D(t)}(n(\xi)) d\xi.$$

На основе (8) из последнего соотношения получим (11). Теорема доказана.

Пример 2. Пусть $D(t) = [t_1, t_2]$. Тогда из (7) следует, что

$$t_1 \frac{\partial P\,(t,x)}{\partial t_1} + t_2 \frac{\partial P\,(t,x)}{\partial t_2} = P(t,x).$$

Таким образом, мы получаем следующее уравнение для собственных значений:

$$t_1 \frac{\partial \lambda\,(t)}{\partial t_1} + t_2 \frac{\partial \lambda\,(t)}{\partial t_2} = -2\lambda(t).$$

Решая последнее с граничным условием

$$\lambda_j(t) = (\pi j)^2, \quad t_2 - t_1 = 1,$$

получим

$$\lambda_j\,(t) = \left(\frac{\pi j}{t_2 - t_1}\right)^2.$$

Для однозначного определения собственного значения из уравнения (11) нужно задать граничное условие, не находящееся на его характеристиках.

Теорема 3. *Пусть*

$$-P'_{D(t)}(x) \le m P_{D(t)}(x), \quad t \in [t_0, t_1]\,. \tag{12}$$

Тогда для собственных значений верна оценка

$$\lambda\,(t) \le \lambda\,(t_0)\, e^{\frac{m}{2}(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, t_1]\,. \tag{13}$$

Доказательство. Из формул (5), (8) при условии (12) получим

$$\lambda'\,(t) \le \frac{m}{2} \lambda\,(t)\,, \quad t \in [t_0, t_1]\,.$$

Умножая на $\lambda(t)$, учитывая, что $\lambda(t) \geq 0$, интегрируя, получим

$$\int\limits_{t_0}^{t} \lambda'(\tau)\,\lambda(\tau)\,d\tau \leq \frac{m}{2}\int\limits_{t_0}^{t} \lambda^2(\tau)\,d\tau. \tag{14}$$

Интегрируя левую часть последного неравенства по частям, будем иметь

$$\int\limits_{t_0}^{t} \lambda'(\tau)\,\lambda(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\lambda^2(t) - \frac{1}{2}\lambda^2(t_0).$$

Подставляя это в (14), получим

$$\lambda^2(t) \leq m\int\limits_{t_0}^{t} \lambda^2(\tau)\,d\tau + \lambda^2(t_0).$$

Отсюда, применяя лемму Гронуолла (см. [8, с. 450]) получаем

$$\lambda^2(t) \leq \lambda^2(t_0) \cdot e^{m(t-t_0)},$$

что аналогично (13). Теорема доказана.

Следствие 3. *Пусть $D(t) = tD_1 + D_0$ и для любого $t \in [0,T]$, $0 \in (1+t)D_1 + D_0$. Тогда*

$$\lambda(t) \leq \lambda(0)\,e^{\frac{1}{2}t}, \tag{15}$$

где $\lambda(0) = \lambda(D_0)$.

Действительно, в этом случае

$$(1+t)\,P_{D_1}(x) + P_{D_0}(x) \geq 0,$$

или

$$-P_{D_1}(x) \leq tP_{D_1}(x) + P_{D_0}(x).$$

Так как $P_{D_1}(x) = P'_{D(t)}(x)$ и $tP_{D_1}(x) + P_{D_0}(x) = P_{D(t)}(x)$, условие (12) выполняется при $m = 1$. Отсюда на основе теоремы 3 получаем (15).

Список литературы

[1] *F. Pesaint and J.-P. Zolesio*, Derivees par rapport au domaine des valeurs propres du Laplacien. — *C.R. Acad. Sci.* Ser. 1 (1995), v. 321, No. 10, p. 1337–1310.

[2] *R. Dziri and J.-P. Zolesio*, Shape derivative with Lipschitz condiuous coefficients. — *Boll. Unione Math. Ital.* B, (1996), v. 10, No. 3, p. 569–594.

[3] *Г.В. Сузиков*, Одна задача управления собственными значениями. — *Вестн. Харк. ун-та* (1988), № 315, с. 32–35.

[4] *В.С. Владимиров*, Уравнение математической физики. Наука, Москва (1988).

[5] *В.П. Михайлов*, Дифференциальные уравнения в частных производных. Наука, Москва, (1976).

[6] *Ю.С. Гасымов, А.А. Нифтиев*, О минимизации собственных значений оператора Шредингера по областям. — *Докл. РАН* (2001), т. 380, № 3, с. 305–307.

[7] *Ю.С. Гасымов*, Вариация собственных эллиптического уравнения второго порядка со вторым граничным условием. — *Методы оптимизации и их прил.* (2001), т. 4, с. 82–88.

[8] *Ф.П. Васильев*, Численные методы решения экстремальных задач. Наука, Москва (1980).

On some properties of the eigenvalues by the variation of the domain

Y.S. Gasimov

The spectral problem is considered for the second order elliptic operator. Some properties of the eigenvalues of this operator relatively domain are investigated.