Математическая физика, анализ, геометрия
2003, т. 10, № 4, с. 524–556

Фактор-представления группы $GL(\infty)$ и допустимые представления $GL(\infty)^X$

Н.И. Нессонов

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины пр. Ленина, 47, Харьков, 61103, Украина

E-mail:nessonov@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 2 августа 2002 г.
Представлена В.Я. Голодцом

Статья является второй частью работы (первая часть опубликована в журнале "МАГ", 2003, т. 10, № 2), в которой получена классификация фактор-представлений группы $GL(\infty)$. А также найден критерий унитарной эквивалентности сферических представлений группы $\left(GL(\infty)^X\right)$ функций на конечном множестве X со значениями в $GL(\infty)$. Построена инъекция множества фактор-представлений группы $GL(\infty)$ в множество сферических представлений $GL(\infty)^X$. Для последних указано их каноническое продолжение на группу движений, соответствующую $GL(\infty)^X$.

Стаття є другою частиною роботи (першу частину опубліковано в журналі "МАГ", 2003, т. 10, № 2), в якій одержано класифікацію фактор-представлень групи $GL(\infty)$. Також знайдено критерій унітарної еквівалентності сферичних представлень групи $\left(GL(\infty)^X\right)$ функцій на скінченній множині X зі значеннями у $GL(\infty)$ у термінах їх параметрів. Побудовано ін'єкцію множини фактор-представлень групи $GL(\infty)$ у сферичні представлення групи $\left(GL(\infty)^X\right)$. Для останніх дано канонічне розширення на групу рухів, що відповідає $\left(GL(\infty)^X\right)$.

3. Разложение представлений $\Pi^{\chi}_{A,\kappa}$ на неприводимые

Пусть

$$U_k\left(\kappa, A\right) = \left\{u \in U\left(k\right) : [A, u] = \left[\kappa\left(a\right), u\right] = 0 \ \forall\ a \in \mathfrak{A}\right\},$$

$Y = U_k\left(\kappa, A\right) \backslash U\left(k\right)$ — пространство левых классов смежности $U\left(k\right)$ по подгруппе $U_k\left(\kappa, A\right)$, p — естественная проекция $U\left(k\right)$ на Y, s — сечение над Y,

Mathematics Subject Classification 2000: 46L55, 46L65.

© Н.И. Нессонов, 2003

т.е. s — отображение из Y в $U(k)$ со свойствами: $p\circ s = id|_Y$, $s\left(\breve{I}_k\right) = I_k$, где $\breve{I}_k$ — класс из Y, содержащий единицу $I_k \in U(k)$, $\Lambda(k,k)\,(\Lambda(k,\infty))$ — множество $k\times k(k\times\infty)$-матриц, состоящих из первых k столбцов (из столбцов с номерами, бо́льшими k) элементов $\lambda \in \Lambda_k$.

Напомним, что антигомоморфизм κ, возникающий в процессе приведения произвольного сферического фактор-представления к канонической форме (см. лемму 2.9) обладал свойством $\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}) = I_k$. С другой стороны, в реализации (0.1) можно рассматривать κ, не обладающий этим свойством.

Предложение 3.1. *Для того чтобы в $L^2(\Lambda_k,\nu_k)$ существовал при некотором m $\Pi_{A,\kappa}(U(m,\infty))$ — неподвижный вектор $\xi \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы проектор $\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})$ был ортогональным и $[\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}), A] = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если существует $\Pi_{A,\kappa}(U(m,\infty))$ — неподвижный вектор $\xi\neq 0$ и $u_n = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0\\ 0 & u(k) & 0\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix} \in U(m,\infty)$, где $u(k)\in U(k)$, то

$$\alpha_{A,\kappa}(\lambda,u_n)\left[\frac{d\nu_k(\lambda_{(u_n)_\kappa})}{d\nu_k(\lambda)}\right]^{1/2}\xi(\lambda_{(u_n)_\kappa}) = \xi(\lambda)\ \ \forall\ n>m. \tag{3.1}$$

Пускай $\Lambda_k(j) = \mathbb{C}^k$, ν_k^j — вероятностная мера на $\Lambda_k(j)$ с плотностью $\frac{1}{\pi^k}\exp\left[-\lambda_j^*\lambda_j\right]$ $(\lambda_j\in\Lambda_k(j))$ относительно меры Лебега, ξ_0^j — вектор из $L^2(\Lambda_k(j),\nu_k^j)$, определяемый функцией на $\Lambda_k(j)$, тождественно равной единице. Так как линейная оболочка векторов вида

$$\mathop{\otimes}_{j=1}^{N} f_j \mathop{\otimes}_{j=N+1}^{\infty}\xi_0^j\ \ \left(f_j\in L^2(\Lambda_k(j),\nu_k^j)\right)$$

плотна в $L^2(\Lambda_k,\nu_k)$, то из (3.1) получаем, что

$$\alpha_{A,\kappa}(\lambda,u_n)\left[\tfrac{d\nu_k(\lambda_{(u_n)_\kappa})}{d\nu_k(\lambda)}\right]^{1/2}\equiv 1.$$

Отсюда

$$Tr\Big[\lambda(u_n-I)^*\lambda^*\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})^* + \kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})\lambda(u_n-I)\lambda^*$$
$$+\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})\lambda(u_n-I)(u_n-I)^*\lambda^*\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})^*\Big] = 0;$$
$$Tr\Big[A\big(\lambda(u_n-I)^*\lambda^*\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})^*$$
$$+\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})\lambda(u_n-I)\lambda^* + \kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})\lambda(u_n-I)(u_n-I)^*\lambda^*\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})^*\big)\Big] = 0.$$

Из этих соотношений, учитывая перестановочность операторов под знаком следа, получаем

$$Tr\{\lambda^*[(\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})^*A-\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})^*A\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}))\lambda(u_n-I)^*$$
$$+(A\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})-\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})^*A\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}))\lambda(u_n-I)]\}=0$$
$$Tr\{\lambda^*[(\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})^*-\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})^*\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}))\lambda(u_n-I)^*$$
$$+(\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})-\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})^*\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}))\lambda(u_n-I)]\}=0\ \ \forall u_n\in U(m,\infty).$$

Отсюда и из произвольности u_n вытекает, что

$$\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})^*A-\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})^*A\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})=A\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})-\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})^*A\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})=0;$$
$$\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})^*-\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})^*\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})=\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})-\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})^*\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})=0.$$

Следовательно, $\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})^*=\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})$, и поэтому $\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})A=A\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})$. Предложение 3.1 доказано.

Следствие 3.2. *Если для некоторого m в $L^2(\Lambda_k,\nu_k)$ существует вектор $\xi\neq 0$, неподвижный относительно множества операторов $\left\{\Pi_{A,\kappa}\left(U\left(m,\infty\right)\right)\right\}$, то найдется $\eta\in L^2(\Lambda_k,\nu_k)$ такой, что $\eta\neq 0$ и $\Pi_{A,\kappa}(u)\eta=\eta\ \forall u\in U(\mathbb{C})\subset G(\mathfrak{A})$. Более того, полагая $A_1=\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})A$ и естественно отождествляя Λ_r с $\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})\Lambda_k$, где r — ранг $\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})$, как оператора в $\mathbb{C}^k$, получаем, что $\Pi_{A,\kappa}$ унитарно эквивалентно представлению $\Pi_{A_1,\kappa_1}\otimes id$, действующему в $L^2(\Lambda_r,\nu_r)\otimes L^2(\Lambda_{k-r},\nu_{k-r})$. Здесь κ_1 — антигомоморфизм $\mathfrak{A}$ в $M_r(\mathbb{C})$, индуцированный κ.*

Таким образом, для разложения $\Pi_{A,\kappa}$ в прямой интеграл неприводимых представлений достаточно ограничиться случаем, когда $\kappa(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})=I_k$.

Положим $(\tau(u)f)(\lambda)=f(u^{-1}\lambda)$ $\left(f\in L^2(\Lambda_k,\nu_k),\ u\in U(k)\right)$. По построению $\tau\left(U_k\left(\kappa,A\right)\right)''\subset\left\{\Pi_{A,\kappa}\left(G(\mathfrak{A})\right)\right\}'$.

Теорема 3.3. $\tau\left(U_k\left(\kappa,A\right)\right)''=\left\{\Pi_{A,\kappa}\left(G(\mathfrak{A})\right)\right\}'$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Элементы $\lambda\in\Lambda_k$ будем записывать в виде $\lambda=(\lambda(k,k),\lambda(k,\infty))$, где $\lambda(k,k)\in\Lambda(k,k)$, $\lambda(k,\infty)\in\Lambda(k,\infty)$. Если Z_k — множество верхних треугольных матриц из $M_k(\mathbb{C})$ с положительными элементами на диагонали, то за исключением множества лебеговой меры нуль $\Lambda(k,k)=U(k)\cdot Z_k$.

Разложение $\lambda(k,k)=u\cdot s(y)\cdot z_k$ $(\lambda(k,k)\in\Lambda(k,k),\ u\in U_k(\kappa,A),\ y\in Y,$ $z_k\in Z_k)$ единственно на множестве полной лебеговой меры. Оно естественно индуцирует метрический изоморфизм θ множества $\Lambda_k=\Lambda(k,k)\times\Lambda(k,\infty)$ на $U_k\left(\kappa,A\right)\times Y\times Z_k\times\Lambda(k,\infty)=\Lambda_k(A)$, если на Λ_k рассматривается мера ν_k, а $\Lambda_k(A)$ наделено мерой $\mu_{_A} = \mu_1 \times \mu_{_Y} \times \mu_{_{Z_k}} \times \nu_{_{(k,\infty)}}$, где μ_1 — мера Хаара на $U_k\,(\kappa, A)$, $\mu_{_Y}$ — естественная проекция меры Хаара с U_k на Y, $\mu_{_{Z_k}}$ — правая мера Хаара на Z_k и $\nu_{_{(k,\infty)}}$ — проекция ν_k на $\Lambda(k,\infty)$. Пусть $\theta^*\nu_k$ — мера на $\Lambda_k(A)$, определяемая согласно соотношению $\theta^*\nu_k(Q) = \nu_k(\theta^{-1}Q)$ $(Q \subset \Lambda_k(A)))$. Наконец, положим

$$(U_\theta f)\,(\lambda_A) = \left[\frac{d\theta^*\nu_k\,(\lambda_A)}{d\mu_{_A}\,(\lambda_A)}\right]^{\frac{1}{2}} f\left(\theta^{-1}\lambda_A\right)\ \left(f \in L^2(\Lambda_k, \nu_k),\ \lambda_A \in \Lambda_k(A)\right).$$

По определению U_θ — унитарный оператор, отображающий $L^2(\Lambda_k, \nu_k)$ на $L^2(\Lambda_k(A), \mu_{_A})$.

Рассмотрим в $L^2(\Lambda_k, \nu_k)$ унитарный оператор V_k, определяемый умножением на функцию v_k, где

$$v_k\,(\lambda(k,k), \lambda(k,\infty)) = \exp\left[i\,Tr\,(A\lambda(k,k)\lambda^*(k,k))\right),$$

и приведем действие некоторых операторов представления Π_1 группы $G(\mathfrak{A})$, связанного с $\Pi_{_{A,\kappa}}$ (см. (0.1)) соотношением

$$\Pi_1(g) = U_\theta V_k \Pi_{_{A,\kappa}}(g) V_k^* U_\theta^{-1}\ \ (g \in G(\mathfrak{A}))\,. \tag{3.2}$$

Пусть $g_k = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix} \in G\,(k,\infty,\mathbb{C})$, $h_k\,(\mathfrak{a}) = \begin{bmatrix} I_k & \mathfrak{a}h_{\mathbb{C}} \\ 0 & I \end{bmatrix} \in G\,(\mathfrak{A})$ ($h_{\mathbb{C}}$ — матрица над $\mathbb{C}, \mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$), $g_t(\mathfrak{a}) = \begin{bmatrix} I_k + t\mathfrak{a} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ (t — $(k \times k)$ — матрица над $\mathbb{C}$).

Из определения представления $\Pi_{_{A,\kappa}}$ (см. (0.1)), учитывая (3.2), получаем

$$\begin{gathered}(\Pi_1(g_k)\xi)\,(u,y,z,\lambda(k,\infty)) \\ = \alpha_{_A}(\lambda, g_k)\left[\tfrac{d\nu_k(\lambda(k,\infty)g)}{d\nu_k(\lambda(k,\infty))}\right]^{\frac{1}{2}} \xi(u,y,z,\lambda(k,\infty)g), \\ (\alpha_{_A}(\lambda, g_k) = \exp\left\{i\,Tr\left[\lambda(k,\infty)\,(gg^* - I)\,\lambda^*(k,\infty)\right]\right\});\end{gathered} \tag{3.3}$$

$$\begin{gathered}\Big(\Pi_1\big(h_k(\mathfrak{a})\big)\xi\Big)\,(u,y,z,\lambda\,(k,\infty)) = \exp\Big\{-\tfrac{1}{2}\Big[D\kappa\,(\mathfrak{a})\,us(y)zh_{\mathbb{C}}\lambda^*(k,\infty) \\ +\kappa(\mathfrak{a})^* D\lambda(k,\infty)h_{\mathbb{C}}^* z^* s^*\,(y)\,u^* + \kappa\,(\mathfrak{a})^*\,D\kappa(\mathfrak{a})us(y)zh_{\mathbb{C}}h_{\mathbb{C}}^* z^* s^*(y)u^*\Big]\Big\} \\ \times\xi\,(u,y,z,\lambda(k,\infty) + \kappa(\mathfrak{a})us\,(y)\,zh_{\mathbb{C}}),\ \ D = I + 2iA.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Для записи действия оператора $\Pi\,(g_t(\mathfrak{a}))$ заметим, что отображение $\lambda \to \lambda_{g_\kappa}$ на $\Lambda_k = \Lambda(k,k) \times \Lambda(k,\infty)$ при $g = g_t(\mathfrak{a})$ индуцирует действие на $U_k\,(\kappa, A) \times Y \times Z_k \times \Lambda(k,\infty) = \Lambda_k(A)$, определяемое соответствием

$$(u,y,z,\lambda(k,\infty)) \to (uv(t,\mathfrak{a}), y(t,\mathfrak{a}), z(t,\mathfrak{a}), \lambda(k,\infty))\,,$$

где $us(y)z+\kappa(\mathfrak{a})us(y)zt = uv(t,\mathfrak{a})s(y(t,\mathfrak{a}))z(t,\mathfrak{a})$; u, $v(t,\mathfrak{a}) \in U_k(\kappa, A)$, $y(t,\mathfrak{a}) \in Y$, $z(t,\mathfrak{a}) \in Z_k$. Обозначая теперь через ρ производную Радона меры μ_A относительно этого действия, получаем

$$\left(\Pi_1\left(g_t(\mathfrak{a})\right)\xi\right)(u,y,z,\lambda(k,\infty)) = \rho^{\frac{1}{2}}(u,y,z,g_t(\mathfrak{a}))$$
$$\xi\left(uv(t,\mathfrak{a}), y(t,\mathfrak{a}), z(t,\mathfrak{a}), \lambda(k,\infty)\right). \tag{3.5}$$

Докажем, что $\Pi_1\left(G(\mathfrak{A})\right)''$ содержит операторы умножения на функции из $L^\infty(Y) \otimes L^\infty(Z_k)$.

Для этого рассмотрим последовательности матриц $g_k^{(l)}$ и $h_k^{(l)}(\mathfrak{a})$, $l \in \mathbb{N}$, вида

$$g_k^{(l)} = \begin{bmatrix} I_{kl} & 0 & 0 \\ 0 & g\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \left(g \in GL_k(\mathbb{C})\right),$$

$$h_k^{(l)}(\mathfrak{a}) = \begin{bmatrix} I_k & 0 & \mathfrak{a}h_{\mathbb{C}} & 0 \\ 0 & I_{k(l-1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \left(h_{\mathbb{C}} \in GL_k(\mathbb{C})\right).$$

Положим $p(l) = g_k^{(l)} \cdot h_k^{(l)}(\mathfrak{a})$. Тогда элементы множества $\left\{\xi_l = \Pi_1(p(l))\xi_0'\right\}_{l\in\mathbb{N}}$, где $\xi_0' = f \otimes \xi_0^{(k)}$, f — произвольный элемент из $L^2\left(U_k(\kappa,A), \mu_1\right) \otimes L^2\left(Y, \mu_Y\right) \otimes L^2\left(Z_k, \mu_{Z_k}\right)$, $\xi_0^{(k)}$ определяется функцией на $\left(\Lambda(k,\infty), \nu_k\right)$, тождественно равной единице, образуют при фиксированных (u,y,z) независимую систему случайных величин на $\left(\Lambda(k,\infty), \nu_k\right)$ с равными математическими ожиданиями $M\left(u,y,z,h_{\mathbb{C}}\right)$. Применение к $\left\{\xi_l\right\}_{l\in\mathbb{N}}$ закона больших чисел приводит к соотношению

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-L}\sum_{l=L}^{n} \xi_l = \int\limits_{\Lambda(k,\infty)} \xi_1 d\nu_{(k,\infty)} = M\left(u,y,z,h_{\mathbb{C}}\right), \tag{3.6}$$

где L — произвольное фиксированноее число из $\mathbb{N}$, а сходимость следует понимать по норме пространства $L^2\left(\Lambda_k(A), \mu_A\right)$.

Для вычисления интеграла из (3.6) заменим $D = I + 2iA$ на $D_r = I + 2rA$, где r — вещественное. При достаточно малом по модулю r приведем и докажем соответствующую формулу. После этого воспользуемся принципом аналитического продолжения.

Обозначая через $\lambda\left((l+1)k,k\right)$ $(k \times k)$-матрицу, состоящую из столбцов матрицы λ с номерами от $lk+1$ по $(l+1)k$, из (3.6), учитывая (3.3)–(3.4), получаем

$$\int\limits_{\Lambda(k,\infty)} \xi_1 d\nu_{(k,\infty)} = f(u,y,z)$$

$$\times \int\limits_{\Lambda(k,\infty)} \exp\Big\{ -\frac{1}{2} Tr\Big[D_r\lambda\left((l+1)k,k\right)(gg^*-1)\lambda\left((l+1)k,k\right)^*$$

$$+D_r\lambda\left((l+1)k,k\right) gh^*_{\mathbb{C}} z^* s(y)^* u^* \kappa(\mathfrak{a})^* + D_r\kappa(\mathfrak{a}) us(y) zh_{\mathbb{C}} g^* \lambda\left((l+1)k,k\right)^*$$

$$+D_r\kappa(\mathfrak{a}) us(y) zh_{\mathbb{C}} h^*_{\mathbb{C}} z^* s(y)^* u^* \kappa(\mathfrak{a})^*$$

$$+\lambda\left((l+1)k,k\right)\lambda\left((l+1)k,k\right)^*\Big]\Big\} d\lambda\left((l+1)k,k\right), \tag{3.7}$$

где $d\lambda\left((l+1)k,k\right)$ — мера Лебега на множестве комплексных $k \times k$-матриц.

Для вычисления интеграла сделаем замену переменной $\lambda\left((l+1)k,k\right) = \lambda'\left((l+1)k,k\right) + \zeta$, устраняющую в показателе экспоненты из (3.7) слагаемые, линейные по $\lambda'\left((l+1)k,k\right)$, при вещественном r. Приведем соответствующие преобразования:

$$\begin{aligned}
& B\big(g, h_{\mathbb{C}}, \lambda\left((l+1)k,k\right)\big) = D_r\lambda\left((l+1)k,k\right)(gg^*-1)\lambda\left((l+1)k,k\right)^* \\
+\ & D_r\lambda\left((l+1)k,k\right) gh^*_{\mathbb{C}} z^* s(y)^* u^* \kappa(\mathfrak{a})^* + D_r\kappa(\mathfrak{a}) us(y) zh_{\mathbb{C}} g^* \lambda\left((l+1)k,k\right)^* \\
+\ & D_r\kappa(\mathfrak{a}) us(y) zh_{\mathbb{C}} h^*_{\mathbb{C}} z^* s(y)^* u^* \kappa(\mathfrak{a})^* + \lambda\left((l+1)k,k\right)\lambda\left((l+1)k,k\right)^* \\
=\ & D_r\lambda'\left((l+1)k,k\right)(gg^*-1)\lambda'\left((l+1)k,k\right)^* \\
+\ & \lambda'\left((l+1)k,k\right)\lambda'\left((l+1)k,k\right)^* \\
+\ & D_r\lambda'\left((l+1)k,k\right)(gg^*-1)\zeta^* + D_r\zeta(gg^*-1)\lambda'\left((l+1)k,k\right)^* \\
+\ & D_r\lambda'\left((l+1)k,k\right) gh^*_{\mathbb{C}} z^* s(y)^* u^* \kappa(\mathfrak{a})^* + D_r\kappa(\mathfrak{a}) us(y) zh_{\mathbb{C}} g^* \lambda'\left((l+1)k,k\right)^* \\
+\ & D_r\zeta\left(gg^*-I\right)\zeta^* + D_r\zeta gh^*_{\mathbb{C}} z^* s^*(y) u^* \kappa(\mathfrak{a})^* + D_r\kappa(\mathfrak{a}) us(y) zh_{\mathbb{C}} g^* \zeta^* \\
+\ & 2\zeta\lambda'\left((l+1)k,k\right)^* + 2\lambda'\left((l+1)k,k\right)\zeta^* \\
+\ & D_r\kappa(\mathfrak{a}) us(y) zh_{\mathbb{C}} h^*_{\mathbb{C}} z^* s^*(y) u^* \kappa(\mathfrak{a})^* + 2\zeta\zeta^*.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Если ζ при вещественном r удовлетворяет условию

$$\begin{aligned}
& Tr\big[D_r\zeta(gg^*-I)\lambda'\left((l+1)k,k\right)^* + 2\zeta\lambda'\left((l+1)k,k\right)^* \\
+\ & D_r\kappa(\mathfrak{a}) us(y) zh_{\mathbb{C}} g^* \lambda'\left((l+1)k,k\right)^*\big] = 0,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

то

$$\begin{aligned}
& Tr\big[D_r\lambda'\left((l+1)k,k\right)(gg^*-I)\zeta^* + 2\lambda'\left((l+1)k,k\right)\zeta^* \\
+\ & D_r\lambda'\left((l+1)k,k\right) gh^*_{\mathbb{C}} z^* s^*(y) u^* \kappa(\mathfrak{a})^*\big] = 0.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Отсюда и из (3.8) получаем

$$B\big(g, h_{\mathbb{C}}, \lambda\left((l+1)k, k\right)\big) = Tr\big[D_r\lambda'\left((l+1)k, k\right)(gg^* - 1)\lambda'\left((l+1)k, k\right)^*$$
$$+ \quad 2\lambda'\left((l+1)k, k\right)\lambda'\left((l+1)k, k\right)^* + B_1\left(g, h_{\mathbb{C}}, \zeta\right)\big],$$

где

$$B_1\left(g, h_{\mathbb{C}}, \zeta\right) = D_r\zeta(gg^* - I)\zeta^* + D_r\zeta g h_{\mathbb{C}}^* z^* s^*(y)u^*\kappa(\mathfrak{a})^*$$
$$+ \quad D_r\kappa(\mathfrak{a})us(y)zh_{\mathbb{C}}g^*\zeta^* + D_r\kappa(\mathfrak{a})us(y)zh_{\mathbb{C}}h_{\mathbb{C}}^* z^* s^*(y)u^*\kappa(\mathfrak{a})^* + 2\zeta\zeta^*. \quad (3.11)$$

Так как (3.9)–(3.10) эквивалентны соотношению

$$D_r\zeta(gg^* - I) + 2\zeta + D_r\kappa(\mathfrak{a})us(y)zhg^* = 0,$$

то

$$\zeta = -\frac{1}{2}\left[I + \frac{1}{2}D_r \otimes (gg^* - I)\right]^{-1} D_r\kappa(\mathfrak{a})us(y)zh_{\mathbb{C}}g^*,$$

где действие оператора $D_r \otimes (gg^* - I)$ на матрицу η из k строк определяется соответствием $\eta \longrightarrow D_r\eta(gg^* - I)$.

Следовательно, при вещественном r

$$Tr\big[B_1\left(g, h_{\mathbb{C}}, \zeta\right)\big] = Tr\bigg\{-\frac{1}{2}D_r\left[I + \frac{1}{2}D_r \otimes (gg^* - I)\right]^{-1} D_r\kappa(\mathfrak{a})us(y)zh_{\mathbb{C}}g^*$$
$$\times g h_{\mathbb{C}}^* z^* s^*(y)u^*\kappa(\mathfrak{a})^* + D_r\kappa(\mathfrak{a})us(y)zh_{\mathbb{C}}h_{\mathbb{C}}^* z^* s^*(y)u^*\kappa(\mathfrak{a})^*\bigg\}.$$

Учитывая это соотношение и (3.11) при интегрировании в (3.7), получаем

$$\int\limits_{\Lambda(k,\infty)} \xi_1 d\nu_{(k,\infty)} = f(u, y, z) \cdot c(g)$$
$$\times \exp\bigg\{-\frac{1}{4}\Big[2D\kappa(\mathfrak{a})us(y)zh_{\mathbb{C}}h_{\mathbb{C}}^* z^* s^*(y)u^*\kappa(\mathfrak{a})^*$$
$$-\Big(I + \frac{1}{2}D \otimes (gg^* - I)\Big)^{-1} D\kappa(\mathfrak{a})us(y)zh_{\mathbb{C}}g^*gh_{\mathbb{C}}^* z^* s^*(y)u^*\kappa(\mathfrak{a})^*\Big]\bigg\}. \qquad (3.12)$$

В этом соотношении, заменив D_r на D, мы воспользовались тем фактом, что $\int\limits_{\Lambda(k,\infty)} \xi_1 d\nu_{(k,\infty)}$ является аналитической функцией по r в открытой полосе, содержащей мнимую ось.

Теперь, учитывая вид матриц $p(l)$ и соотношение (3.6), получаем, что слабые предельные точки выпуклой оболочки множества $\Big\{\Pi_1(p(l))\Big\}_{l\in\mathbb{N}}$ содержат операторы умножения на функции

$$M\left(u,y,z,h_{\mathbb{C}}\right)=c(g)\cdot\exp\Big\{-\frac{1}{4}Tr\Big[2D\kappa(\mathfrak{a})us(y)zh_{\mathbb{C}}h_{\mathbb{C}}^{*}z^{*}s^{*}(y)u^{*}\kappa(\mathfrak{a})^{*}$$
$$-D\Big(I+\frac{1}{2}D\otimes(gg^{*}-I)\Big)^{-1}D\kappa(\mathfrak{a})us(y)zh_{\mathbb{C}}g^{*}gh_{\mathbb{C}}^{*}z^{*}s^{*}(y)u^{*}\kappa(\mathfrak{a})^{*}\Big]\Big\}, \qquad (3.13)$$

где $c(g)$ — ненулевая константа, зависящая только от g. Далее будем отождествлять функции с соответствующими операторами умножения.

Оставшуюся часть доказательства разделим на три пункта.

i) Докажем, что $\Pi_1(G(\mathfrak{A}))''$ содержит операторы умножения на функции из $L^{\infty}(Z_k)$.

Для этого заметим, что если $\|g\|$ — норма матрицы g, а $w-\lim$ означает предел в слабой операторной топологии, то согласно (3.13)

$$M_{h_{\mathbb{C}}}^{\mathfrak{a}}(y,z)=w-\lim_{\|g\|\to 0}c(g)^{-1}M\left(u,y,z,h_{\mathbb{C}}\right)$$
$$=\exp\Big\{-\frac{1}{2}Tr\Big[D\kappa(\mathfrak{a})us(y)zh_{\mathbb{C}}h_{\mathbb{C}}^{*}z^{*}s^{*}(y)u^{*}\kappa(\mathfrak{a})^{*}\Big]\Big\}. \qquad (3.14)$$

Так как $M_{h_{\mathbb{C}}}^{\mathfrak{a}}\in\Pi_1(G(\mathfrak{A}))''$ и ${M_{h_{\mathbb{C}}}^{\mathfrak{a}}}^{*}=\overline{M_{h_{\mathbb{C}}}^{\mathfrak{a}}}$, то $\overline{M_{h_{\mathbb{C}}}^{\mathfrak{a}}}\in\Pi_1(G(\mathfrak{A}))''$. Отсюда получаем, учитывая вид D, что оператор умножения на функцию $\exp_{h_{\mathbb{C}}}$, где $\exp_{h_{\mathbb{C}}}(z)=\exp\Big[-Tr\big(zh_{\mathbb{C}}h_{\mathbb{C}}^{*}z^{*}\big)\Big]$, также принадлежит $\Pi_1(G(\mathfrak{A}))''$ $\forall h_{\mathbb{C}}\in GL_k(\mathbb{C})$. Следовательно, множество

$$\mathcal{M}=\Big\{\exp'_{h_{\mathbb{C}}}:\ \exp'_{h_{\mathbb{C}}}(z)=Tr\big(zh_{\mathbb{C}}h_{\mathbb{C}}^{*}z^{*}\big)\exp_{h_{\mathbb{C}}}(z)\Big\}_{h_{\mathbb{C}}\in GL_k(\mathbb{C})}\subset\Pi_1(G(\mathfrak{A}))''.$$

Обозначим через $\widehat{Z_k}$ стандартную компактификацию Z_k, полученную присоединением точки z_∞, и докажем, что функции из $\mathcal{M}$ по непрерывности расширяются на $\widehat{Z_k}$. Причем, $\forall f\in\mathcal{M}$ $\hat{f}(z_\infty)=0$, где $\hat{f}$ — продолжение f.

С этой целью для любого $\epsilon>0$ введем множества $\mathcal{K}_\epsilon=\big\{z\in Z_k:\epsilon<\|z\|<\frac{1}{\epsilon}\big\}$ и $\mathcal{U}_\epsilon=Z_k\setminus\mathcal{K}_\epsilon$. Очевидно, что множества $\mathcal{U}_\epsilon$ образуют в $\widehat{Z_k}$ базу окрестностей точки z_∞. Обозначая, наконец, через $s(h_{\mathbb{C}}h_{\mathbb{C}}^{*})$ минимальное спектральное значение матрицы $h_{\mathbb{C}}h_{\mathbb{C}}^{*}$, получаем

$$Tr\big(zh_{\mathbb{C}}h_{\mathbb{C}}^{*}z^{*}\big)\exp_{h_{\mathbb{C}}}(z)\Big\}\leq\|z^{*}z\|Tr(hh^{*})\exp\big[-\|z^{*}z\|s(h_{\mathbb{C}}h_{\mathbb{C}}^{*})\big].$$

Следовательно, для любого $\delta>0$ $\exists$ ϵ такое, что $\exp'_{h_{\mathbb{C}}}(z)<\delta$ при $z\in\mathcal{U}_\epsilon$. Таким образом, любая функция $f\in\mathcal{M}$ расширяется по непрерывности до непрерывной функции $\hat{f}$ на компакте $\widehat{Z_k}$ и $\hat{f}(z_\infty) = 0$. Обозначим через $\widehat{\mathcal{M}}$ множество функций на $\widehat{Z_k}$, полученное с помощью описанной процедуры расширения из $\mathcal{M}$.

Элементарно проверяется, что $\widehat{\mathcal{M}}$ разделяет точки $\widehat{Z_k}$. Поэтому в силу теоремы Стоуна любая непрерывная функция на $\widehat{Z_k}$, обращающаяся в нуль в точке z_∞, является пределом относительно равномерной топологии функций из C^*-алгебры, порожденной $\widehat{\mathcal{M}}$. Отсюда вытекает утверждение пункта *i)*.

ii) Докажем, что $\Pi_1(G(\mathfrak{A}))''$ содержит операторы умножения на функции из $L^\infty(Z_k) \otimes L^\infty(Y)$.

Для $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} \in \mathfrak{A}$ и $k \times k$-матриц $h_{\mathbb{C}}$, t положим $\Pi_1\big(g_t(\mathfrak{b})\big) M^{\mathfrak{a}}_{h_{\mathbb{C}}} \Pi_1^*\big(g_t(\mathfrak{b})\big) = M^{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}_{h_{\mathbb{C}},t}$. Согласно (3.5)

$$M^{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}_{h_{\mathbb{C}},t}(z,y) = \exp\bigg\{ -\tfrac{1}{2} Tr\Big[D\kappa(\mathfrak{a}) \Big(s(y) z \\ + \kappa(\mathfrak{b}) s(y) z t \Big) h_{\mathbb{C}} h^*_{\mathbb{C}} \Big(z^* s^*(y) + t^* z^* s^*(y) \kappa(\mathfrak{b})^* \Big) \kappa(\mathfrak{a})^* \Big] \bigg\}. \tag{3.15}$$

Обозначим через $\mathcal{L}$ множество $\Big\{ M^{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}_{h_{\mathbb{C}},t} \,:\, h_{\mathbb{C}}, t \in GL_k(\mathbb{C});\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{A} \Big\}$.

Теперь заметим, что компактификация $\widehat{Z_k \times Y}$ пространства $Z_k \times Y$ естественно отождествляется с фактор-пространством $\big(\widehat{Z_k} \times Y\big) \backslash \big(z_\infty \times Y\big)$. Далее, учитывая результат пункта *i)*, получаем, что все функции вида $f \cdot g$, где $f \in \mathcal{M}$, $g \in \mathcal{L}$, расширяются по непрерывности на $\widehat{Z_k \times Y}$ и соответствующие расширения $\widehat{f \cdot g}$ обращаются в нуль в присоединенной точке.

Перейдем к обоснованию того, что функции из $\mathcal{ML} = \Big\{ \widehat{f \cdot g} \Big\}_{f \in \mathcal{M}, g \in \mathcal{L}}$ разделяют точки пространства $\widehat{Z_k \times Y}$.

Пусть $(z_i, y_i) \in Z_k \times Y$, $i = 1, 2$, $(z_1, y_1) \neq (z_2, y_2)$ и $p((z_1, y_1)) = p((z_2, y_2))$ $\forall p \in \mathcal{ML}$. Отсюда, учитывая вид функций из $\mathcal{ML}$, получаем, что $M^{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}_{h_{\mathbb{C}},t}(z_1, y_1)$ $= M^{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}_{h_{\mathbb{C}},t}(z_2, y_2)$ $\forall\ h_{\mathbb{C}}, t \in GL_k(\mathbb{C});\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{A}$. Это соотношение в силу (3.15) эквивалентно условиям:

$$\Big(z_1^* s^*(y_1) + t^* z_1^* s^*(y_1) \kappa(\mathfrak{b})^* \Big) \kappa(\mathfrak{a})^* \kappa(\mathfrak{a}) \Big(s(y_1) z_1 + \kappa(\mathfrak{b}) s(y_1) z_1 t \Big) \\ = \Big(z_2^* s^*(y_2) + t^* z_2^* s^*(y_2) \kappa(\mathfrak{b})^* \Big) \kappa(\mathfrak{a})^* \kappa(\mathfrak{a}) \Big(s(y_2) z_2 + \kappa(\mathfrak{b}) s(y_2) z_2 t \Big), \tag{3.16}$$

$$\Big(z_1^* s^*(y_1) + t^* z_1^* s^*(y_1) \kappa(\mathfrak{b})^* \Big) \kappa(\mathfrak{a})^* A \kappa(\mathfrak{a}) \Big(s(y_1) z_1 + \kappa(\mathfrak{b}) s(y_1) z_1 t \Big) \\ = \Big(z_2^* s^*(y_2) + t^* z_2^* s^*(y_2) \kappa(\mathfrak{b})^* \Big) \kappa(\mathfrak{a})^* A \kappa(\mathfrak{a}) \Big(s(y_2) z_2 + \kappa(\mathfrak{b}) s(y_2) z_2 t \Big) \tag{3.17}$$

Если $\mathfrak{a} = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{b} = 0$, $t = 0$, то из (3.16) легко следует $z_1^* z_1 = z_2^* z_2$. Таким образом, $z_1 = z_2$.

Далее, учитывая (3.17), при тех же условиях получаем $s^*(y_1) A s(y_1) = s^*(y_2) A s(y_2)$ или

$$\left[s(y_2) s^*(y_1), A \right] = 0. \tag{3.18}$$

Из сравнения в (3.16) коэффициентов перед степенями t вытекает соотношение $s^*(y_1)\kappa(\mathfrak{b})^* s(y_1) = s^*(y_2)\kappa(\mathfrak{b})^* s(y_2)$ или

$$\left[s(y_2) s^*(y_1), \kappa(\mathfrak{b})^* \right] = 0.$$

Теперь отсюда и из (3.18) получаем, что $s(y_2)s^*(y_1) \in U_k\left(\kappa, A\right)$. Следовательно, $y_1 = y_2$. Таким образом, функции из $\mathcal{ML}$ разделяют точки компакта $\widehat{Z_k \times Y}$. Учитывая этот факт и теорему Стоуна, получаем, что множество непрерывных функций на $\widehat{Z_k \times Y}$, которые обращаются в нуль в присоединенной точке, является замыканием в равномерной топологии алгебры, порожденной $\mathcal{ML}$. Отсюда, в частности, следует включение $L^\infty(Z_k) \otimes L^\infty(Y) \subset \Pi_1(G(\mathfrak{A}))''$.

iii) Окончание доказательства теоремы 3.3. Пусть $\tau_1(u) = U_\theta V_k \tau(u) V_k^* U_\theta^{-1}$ $\left(u \in U_k\left(\kappa, A\right)\right)$. Тогда $\left(\tau_1(v) f\right)\left(u, y, z, \lambda(k, \infty)\right) = f\left(v^{-1}u, y, z, \lambda(k, \infty)\right)$ $\left(u, v \in U_k\left(\kappa, A\right)\right)$.

Если ограниченный оператор $B \in \Pi_1\left(G(\mathfrak{A})\right)$, то из его перестановочности с операторами умножения на функции из $L^\infty(Z_k) \otimes L^\infty(Y)$, которые в силу утверждения, содержащегося в пункте *ii),* принадлежат $\Pi_1(G(\mathfrak{A}))''$, вытекает, что B — измеримая операторнозначная функция на $Z_k \times Y$ со значениями в множестве

$$\mathcal{B}\Big(L^2\big(U_k\left(\kappa, A\right), \mu_1\big) \otimes L^2\big(\Lambda(k, \infty), \nu_{(k,\infty)}\big)\Big)$$

ограниченных операторов, действующих в пространстве

$$L^2\big(U_k\left(\kappa, A\right), \mu_1\big) \otimes L^2\big(\Lambda(k, \infty), \nu_{(k,\infty)}\big).$$

Далее, используя (3.3)–(3.4), стандартными методами можно установить, что для $(\mu_{Z_k} \times \mu_Y)$—почти всех (z, y) $B(y, z) = B_U(y, z) \otimes \mathcal{I}_{L^2\left(\Lambda(k,\infty), \nu_{(k,\infty)}\right)}$, где $B_U(y, z) \in \mathcal{B}\Big(L^2\big(U_k\left(\kappa, A\right), \mu_1\big)\Big)$, $\mathcal{I}_{L^2\left(\Lambda(k,\infty), \nu_{(k,\infty)}\right)}$ — единичный оператор в $L^2\big(\Lambda(k, \infty), \nu_{(k,\infty)}\big)$.

Покажем, что, поменяв значения $B_U(y, z)$ на множестве $(\mu_{Z_k} \times \mu_Y)$-нулевой меры, ее можно сделать непрерывной на $Z_k \times Y$.

Действительно, если f — непрерывная положительная функция на $GL_k(\mathbb{C})$ со свойством $\int\limits_{GL_k(\mathbb{C})} f(g)\,dg = 1$, а i_k — вложение $GL_k(\mathbb{C})$ в $G(\mathfrak{A})$ $\left(i_k(g) = \begin{bmatrix} g\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\right)$, то $(\mu_{Z_k} \times \mu_Y)$ — почти всюду B_U совпадает с

$$\hat{B_U} \otimes \mathcal{I}_{L^2\left(\Lambda(k,\infty),\nu_{(k,\infty)}\right)} = \int\limits_{GL_k(\mathbb{C})} f(g)\,\Pi_1\big(i_k(g)\big)B\Pi_1\big(i_k(g^{-1})\big)\,dg. \tag{3.19}$$

Так как, согласно (3.5), $\Pi_1\big(i_k(g)\big)B\Pi_1\big(i_k(g^{-1})\big)$ определяется измеримой операторнозначной функцией на $Z_k \times Y$ со значениями

$$m\big(v(z,y,g)\big)B_U\big(z_g, y(z,g)\big)m\big(v(z_g, y(z,g), g^{-1})\big) \in \mathcal{B}\Big(L^2\big(U_k(\kappa, A), \mu_1\big)\Big), \tag{3.20}$$

где $s(y)zg = v(z,y,g)s(y(z,g))z_g$ $\Big(v(z,y,g) \in U_k(\kappa,A)$, $y(z,g) \in Y$, $z_g \in Z_k$, $m(v)$ — оператор правого сдвига на v в $L^2\big(U_k(\kappa,A),\mu_1\big)\Big)$, то, учитывая непрерывность $v(z,y,g)$, $y(z,g)$, z_g по y,z,g и теорему Лебега о предельном переходе, получаем, что операторнозначная функция, соответствующая $\hat{B_U}$ (см. (3.19)), непрерывна по y,z. Следовательно, заменяя в случае необходимости B_U на $\hat{B_U}$, будем предполагать, что B_U непрерывно зависит от z,y.

Далее заметим, что условие $\Big[B, \Pi_1\big(i_k(g)\big)\Big] = 0$ эквивалентно соотношению

$$B_U(z,y) = m\big(v(z,y,g)\big)B_U\big(z_g, y(z,g)\big)m\big(v(z_g, y(z,g), g^{-1})\big), \tag{3.21}$$

которое выполняется при всех $(z,y) \in Z_k \times Y$ и $g \in GL_k(\mathbb{C})$ (см. (3.20)).

Заметим, что по определению при $\zeta \in Z_k$ $v(z,y,\zeta) = I_k$, $y(z,\zeta) = y$ $\forall (z,y) \in Z_k \times Y$. Отсюда и из (3.21) получаем $B_U(z\zeta, y) = B_U(z,y)$. Следовательно, B_U не зависит от z.

Далее, обозначая через $\widehat{e}$ класс элемента I_k в Y, положим для каждого $z \in Z_k$ $G(z) = \Big\{g \in GL_k(\mathbb{C}) \,:\, \widehat{e}(z,g) = \widehat{e} \iff s(\widehat{e})zg = v(z,\widehat{e},g)z_g\Big\}$. Так как при $g \in G(z)$ $v(z,\widehat{e},g)z_g g^{-1} = s(\widehat{e})z = z$, то $v(z_g,\widehat{e},g^{-1}) = v^{-1}(z,\widehat{e},g)$. Отсюда, учитывая независимость B_U от z и (3.21), получаем

$$\Big[B_U(\widehat{e},z)\,,\, m(v)\Big] = 0 \ \forall\, z \in Z_k,\ v \in U_k(\kappa, A)\,. \tag{3.22}$$

По определению $\Big\{\widehat{e}(z,r)\Big\}_{r\in GL_k(\mathbb{C})} = Y$ и $v(z,\widehat{e},g)v(z_g,\widehat{e}(z,g),g^{-1}) = I_k$ $\forall z \in Z_k$, $g \in GL_k(\mathbb{C})$. Следовательно, B_U не зависит от $y \in Y$ и $B = B_U \otimes \mathcal{I}_{L^2\left(Y,\mu_Y\right)} \otimes \mathcal{I}_{L^2\left(Z_k,\mu_{Z_k}\right)} \otimes \mathcal{I}_{L^2\left(\Lambda(k,\infty),\nu_{(k,\infty)}\right)}$.

Согласно (3.22) B_U в $L^2\big(U_k(\kappa, A), \mu_1\big)$ коммутирует с операторами правого сдвига. По этой причине $B \in \Big\{\tau_1\big(U_k(\kappa, A)\big)\Big\}''$. Теорема 3.3 доказана.

Представляет самостоятельный интерес и в дальнейшем нам будет необходим аналог теоремы (3.3) для представлений $\Pi^{\chi}_{A,\kappa,z}$ группы $G(\mathfrak{A}) \ltimes M^{(p)}_{\infty}(\mathfrak{A})$ (см. теорему 2.14).

Теорема 3.4. *Пусть* $U_k(z, \kappa, A) = \Big\{u \in U_k(\kappa, A) \ : \ zu = z\Big\}$. *Тогда* $\tau\big(U_k(z, \kappa, A)\big)'' = \Big\{\Pi^{\chi}_{A,\kappa,z}\big(G(\mathfrak{A}) \ltimes M^{(p)}_{\infty}(\mathfrak{A})\big)\Big\}'$.

Д о к а з а т е л ь с т в о этого утверждения аналогично обоснованию теоремы 3.3.

4. Унитарно-инвариантные КМШ-состояния на $G(\mathfrak{A})$

Определение 4.1. *Положительно определенную функцию (п.о.ф.) φ на $G(\mathfrak{A})$ будем называть неразложимой (φ — н.п.о.ф.), если соответствующее ей ГНС-представление Π_φ, действующее в гильбертовом пространстве H_φ является фактор-представлением.*

Определение 4.2. *П.о.ф. φ на $G(\mathfrak{A})$ будем называть КМШ-состоянием (состоянием Кубо–Мартина–Швингера (см. [14])), если в H_φ существует ненулевой вектор ξ_φ такой, что $\varphi(g) = (\Pi_\varphi(g)\xi_\varphi, \xi_\varphi)$ $(g \in G(\mathfrak{A}))$ и $H_\varphi = \Big[\Pi_\varphi\Big(G(\mathfrak{A})\Big)\xi_\varphi\Big] = \Big[\Pi_\varphi\Big(G(\mathfrak{A})\Big)'\xi_\varphi\Big]$.*

Иными словами: *φ называется КМШ-состоянием на $G(\mathfrak{A})$, если оно продолжается по непрерывности относительно сильной операторной топологии с алгебры ореаторов, порожденной в H_φ $\Pi_\varphi\Big(G(\mathfrak{A})\Big)$, до точного состояния на $\Pi_\varphi\Big(G(\mathfrak{A})\Big)''$ (см. [14]).*

Определение 4.3. *КМШ-состояние φ на $G(\mathfrak{A})$ называется унитарно-инвариантным (у.и.), если $\varphi(ugu^*) = \varphi(g)$ $\forall g \in G(\mathfrak{A})$ и $\forall\, u \in U(\mathbb{C})$.*

В этом разделе получено полное описание неразложимых у.и. (н.у.и.) КМШ-состояний на $G(\mathfrak{A})$ при $\mathfrak{A} = \mathbb{C}$. Отметим, что наш метод позволяет исчерпывающе изучить структуру множества н.у.и. КМШ-состояний на $G(\mathfrak{A})$ и для некоторых примеров алгебр $\mathfrak{A} \neq \mathbb{C}$.

Результаты этого раздела можно считать обобщением известной идеи Г.И. Ольшанского о каноническом соответствии между сферическими (относительно $diag(G) = \{(g,g) \in G \times G\}$) неприводимыми представлениями группы $G\times G$ и фактор-представлениями типа II_1 G на случай представлений типа III. Это важно еще и потому, что индуктивные пределы некомпактных матричных групп не имеют представлений с конечным следом.

Напомним кратко основные положения модулярной теории Томита (см. [14]).

Пусть φ — у.и. КМШ-состояние на $G(\mathfrak{A})$, $M = \Pi_\varphi\Big(G(\mathfrak{A})\Big)''$. Соответствие $m\xi_\varphi \to m^*\xi_\varphi$, $m \in M$, определяет антилинейный предзамкнутый оператор из H_φ в H_φ. Его замыкание обозначим через S. Тогда замыкание F отображения $m'\xi_\varphi \to (m')^*\xi_\varphi$, $m' \in M'$, является сопряженным к S оператором, а именно:

$$\Big(S\Big(m\xi_\varphi\Big), \Big(m'\xi_\varphi\Big)\Big) = \Big(F\Big(m'\xi_\varphi\Big), m\xi_\varphi\Big).$$

Пусть $\Delta_\varphi = F \cdot S$ — модулярный оператор (м.о.) на H_φ, $S = \mathcal{J}_\varphi \cdot \Delta_\varphi^{\frac{1}{2}}$ — полярное разложение S. Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{gathered}\mathcal{J}_\varphi M \mathcal{J}_\varphi = M',\ \mathcal{J}_\varphi^2 = I,\ \mathcal{J}_\varphi \Delta_\varphi \mathcal{J}_\varphi = \Delta_\varphi^{-1} F = \Delta_\varphi^{\frac{1}{2}} \cdot \mathcal{J}_\varphi,\\ \Big(\mathcal{J}_\varphi\eta, \mathcal{J}_\varphi\xi\Big) = \Big(\xi, \eta\Big)\ \forall\, \xi, \eta \in H_\varphi,\ \Delta_\varphi\xi_\varphi = \mathcal{J}_\varphi\xi_\varphi = \xi_\varphi.\end{gathered} \tag{4.1}$$

Приведем по КМШ-состоянию φ на $G(\mathfrak{A})$ конструкцию унитарного представления $\Pi_\varphi^{(2)}$ группы $G(\mathfrak{A}) \times G(\mathfrak{A})$.

Пусть Π_φ — унитарное представление $G(\mathfrak{A})$, построенное согласно ГНС-конструкции. Тогда действие операторов $\Pi_\varphi(g)$ $g \in G(\mathfrak{A})$ в H_φ определяется левым умножением $m\xi_\varphi \overset{\Pi_\varphi(g)}{\longrightarrow} \Pi_\varphi(g)\, m\xi_\varphi \quad \forall\ m \in M$. Реализованное таким образом Π_φ будем обозначать через $\Pi_\varphi^{(l)}$.

Аналог унитарного представления, определяемого правым умножением, задается операторами $\Pi_\varphi^{(\mathfrak{r})}(g)$, $g \in G(\mathfrak{A})$), которые действуют согласно формуле

$$\Pi_\varphi^{(\mathfrak{r})}(g)\big(m\xi_\varphi\big) = m\Delta_\varphi^{\frac{1}{2}}\Pi_\varphi^*(g)\Delta_\varphi^{-\frac{1}{2}}\xi_\varphi = m\mathcal{J}_\varphi\Pi_\varphi(g)\mathcal{J}_\varphi\xi_\varphi. \tag{4.2}$$

Определим унитарное представление $\Pi_\varphi^{(2)}$ группы $G(\mathfrak{A})\times G(\mathfrak{A})$ соответственно следующему соотношению:

$$\Pi_\varphi^{(2)}((g_1, g_2)) = \Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(g_1)\Pi_\varphi^{(\mathfrak{r})}(g_2). \tag{4.3}$$

Из соотношений (4.1)–(4.2) следует, что

$$\Pi_\varphi^{(2)}((g_1,g_2)) = \Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(g_1)\mathcal{J}_\varphi\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(g_2)\mathcal{J}_\varphi \tag{4.4}$$

и поэтому $\left(\Pi_\varphi^{(2)}((g_1,g_2))\xi_\varphi,\xi_\varphi\right) = \overline{\left(\Pi_\varphi^{(2)}((g_2,g_1))\xi_\varphi,\xi_\varphi\right)}$.

Лемма 4.4. *Если φ — у.и. КМШ-состояние на $G(\mathfrak{A})$, то $\Pi_\varphi^{(2)}((u,u))\xi_\varphi = \xi_\varphi$ $\forall u \in U(\mathbb{C}) \subset G(\mathfrak{A})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соотношения $\varphi\big(ugu^*\big) = \varphi\big(g\big)$ $\Big(g \in G(\mathfrak{A})$, $u \in U(\mathbb{C})\Big)$ получаем $\Big(\Pi_\varphi(u)\Pi_\varphi(g)\Pi_\varphi(u^*)\xi_\varphi,\xi_\varphi\Big) = \Big(\Pi_\varphi(g)\xi_\varphi,\xi_\varphi\Big)$. Отсюда после замены g на gu вытекает

$$\begin{gathered}\Big(\Pi_\varphi(u)\Pi_\varphi(g)\xi_\varphi,\xi_\varphi\Big) = \Big(\Pi_\varphi(g)\Pi_\varphi(u)\xi_\varphi,\xi_\varphi\Big) \\ = \Big(\Pi_\varphi(g)\xi_\varphi,\Pi_\varphi(u^*)\xi_\varphi\Big) = \Big(\Pi_\varphi(u)\xi_\varphi,\Pi_\varphi(g^{-1})\xi_\varphi\Big) \\ \forall\ u \in U(\mathbb{C}) \text{ и } g \in G(\mathfrak{A}).\end{gathered} \tag{4.5}$$

Так как операторы F и S связаны соотношением

$$\Big(F\big(\Pi_\varphi(u)\xi_\varphi\big),\Pi_\varphi(g)\xi_\varphi\Big) = \Big(S\big(\Pi_\varphi(g)\xi_\varphi\big),\Pi_\varphi(u)\xi_\varphi\Big),$$

то, используя (4.5), получаем

$$\begin{gathered}\Big(F\big(\Pi_\varphi(u)\xi_\varphi\big),\Pi_\varphi(g)\xi_\varphi\Big) = \Big(S\big(\Pi_\varphi(g)\xi_\varphi\big),\Pi_\varphi(u)\xi_\varphi\Big) = \Big(\Pi_\varphi(g^{-1})\xi_\varphi,\Pi_\varphi(u)\xi_\varphi\Big) \\ = \Big(\Pi_\varphi(u^*)\Pi_\varphi(g^{-1})\xi_\varphi,\xi_\varphi\Big) = \Big(\Pi_\varphi(g^{-1})\Pi_\varphi(u^*)\xi_\varphi,\xi_\varphi\Big) = \Big(\Pi_\varphi(u^*)\xi_\varphi,\Pi_\varphi(g)\xi_\varphi\Big).\end{gathered}$$

Следовательно, $F\big(\Pi_\varphi(u)\xi_\varphi\big) = \Pi_\varphi(u)^*\xi_\varphi$ и $\Delta_\varphi\Big(\Pi_\varphi(u)\xi_\varphi\Big) = FS\Big(\Pi_\varphi(u)\xi_\varphi\Big) = \Pi_\varphi(u)\xi_\varphi$. Теперь отсюда и из (4.4) вытекает соотношение

$$\begin{gathered}\Pi_\varphi^{(2)}((u,u))\xi_\varphi = \Pi_\varphi(u)\mathcal{J}_\varphi\Pi_\varphi(u)\mathcal{J}_\varphi\xi_\varphi = \Pi_\varphi(u)\mathcal{J}_\varphi\Delta_\varphi^{\frac{1}{2}}\Pi_\varphi(u)\xi_\varphi \\ = \Pi_\varphi(u)S\Big(\Pi_\varphi(u)\xi_\varphi\Big) = \Pi_\varphi(u)\Pi_\varphi(u)^*\xi_\varphi = \xi_\varphi.\end{gathered}$$

Лемма 4.4 доказана.

Для конечного множества X обозначим через $F(X)$ алгебру комплексно-значных функций на X. Если $X_2 = \{0,1\}$ — двухточечное множество, то группа $G(\mathfrak{A}) \times G(\mathfrak{A})$ естественно изоморфна $G(\mathfrak{A} \otimes F(X_2))$.

Если φ — н.у.и. КМШ-состояние на $G(\mathfrak{A})$, то $\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}$ и $\Pi_\varphi^{(\mathfrak{r})}$ — фактор-представления группы $G(\mathfrak{A})$, обладающие свойством:

$$\left[\Pi_\varphi^{(\mathfrak{r})}\left(G(\mathfrak{A})\right)\xi_\varphi\right] = \left[\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}\left(G(\mathfrak{A})\right)\xi_\varphi\right] = \left[\Pi_\varphi^{(2)}\left(G(\mathfrak{A}\otimes F(X_2))\right)\xi_\varphi\right] = H_\varphi$$

(см. определение 4.2). Отсюда, учитывая теорему 2.1 и лемму 4.4, получаем, что $\Pi_\varphi^{(2)}$ — сферическое неприводимое представление группы $G(\mathfrak{A}\otimes F(X_2))$. Но полное описание этого класса представлений содержится в теореме 2.13. Обозначим параметры (A,κ,χ), соответствующие $\Pi_\varphi^{(2)}$, через $(A_\varphi,\kappa_\varphi,\chi_\varphi)$.

Теперь рассмотрим произвольное неприводимое сферическое представление $\Pi_{A,\kappa}^{\chi,0}$ (см. теорему 2.13) группы $G(\mathfrak{A}\otimes F(X_2))$ и найдем условия на его параметры, при выполнении которых $\Pi_{A,\kappa}^{\chi,0}$ унитарно эквивалентно $\Pi_\varphi^{(2)}$ для некоторого неразложимого у.и. КМШ-состояния φ на $G(\mathfrak{A})$. С этой целью изучим сужение $\Pi_{A,\kappa}^{\chi,0}$ на подгруппы $G(\mathfrak{A})\times e$, $e\times G(\mathfrak{A})\subset G(\mathfrak{A})\times G(\mathfrak{A})\simeq G(\mathfrak{A}\otimes F(X_2))$, где e — единица $G(\mathfrak{A})$.

Элементы $g\in G(\mathfrak{A}\otimes F(X_2))$ будем отождествлять с функциями на X_2 со значениями в $G(\mathfrak{A})$. Положим $p_i(j)=\begin{cases} 0, & \text{если } j=i\\ \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}, & \text{если } j\neq i\end{cases}$, $i,j=0,1$. Если κ — антигомоморфизм, определенный в тореме 2.13, то $\kappa(p_i)=B_i$ — проектор из $M_k(\mathbb{C})$.

Лемма 4.5. *Если $\Pi_{A,\kappa}^{\chi,0}$ унитарно эквивалентно $\Pi_\varphi^{(2)}$ для некоторого неразложимого у.и. КМШ-состояния φ на $G(\mathfrak{A})$, то $B_0+B_1=I_k$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о с учетом неприводимости $\Pi_\varphi^{(2)}$ вытекает из утверждений 3.1–3.2.

Пусть κ_1 и κ_2 — антигомоморфизмы алгебры $\mathfrak{A}$ в $M_k(\mathbb{C})$, переводящие единицу $\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}\in\mathfrak{A}$ в единицу $I_k\in M_k(\mathbb{C})$, χ_1 и χ_2 — гомоморфизмы $G(\mathfrak{A})$ в $T=\{c\in\mathbb{C}:\|c\|=1\}$.

Определение 4.6. *Пары (A_1,κ_1) и (A_2,κ_2), где A_1 и A_2 — самосопряженные матрицы из $M_k(\mathbb{C})$, назовем унитарно эквивалентными (у.э.), если существует унитарная матрица $u\in M_k(\mathbb{C})$, для которой $uA_1u^*=A_2$ и $u\kappa_1(\mathfrak{a})u^*=\kappa_2(\mathfrak{a})$ $\forall\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}$.*

Обозначим через $\Pi_{A_j,\kappa_j}^{\chi_j,0}$, $j=1,2$, сужение представления $\Pi_{A_j,\kappa_j}^{\chi_j}=\chi_j\otimes\Pi_{A_j,\kappa_j}$ на подпространство $[\Pi_{A_j,\kappa_j}(G(\mathfrak{A}))\xi_0]$ (см. (0.1) и теорему 0.6).

Теорема 4.7. *Для унитарной эквивалентности представлений $\Pi_{A_1,\kappa_1}^{\chi_1,0}$ и $\Pi_{A_2,\kappa_2}^{\chi_2,0}$ группы $G(\mathfrak{A})$ необходимо и достаточно, чтобы $\chi_1=\chi_2$, а пары (A_1,κ_1) и (A_2,κ_2) были у.э.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность условий теоремы очевидна. Докажем их необходимость.

Так как сужения $\Pi^{\chi_1,0}_{A_1,\kappa_1}$ и $\Pi^{\chi_2,0}_{A_2,\kappa_2}$ на $G(\mathbb{C}\mathbf{1}_{\mathfrak{A}})\simeq GL(\infty,\mathbb{C})$ — унитарно эквивалентные фактор-представления, содержащие единичное представление унитарной подгруппы, то из результатов работы [8] легко вытекает, что матрицы A_1 и A_2 — у.э. Следовательно, можно считать, не ограничивая общности, что $A_1=A_2=A=diag(a_1,a_2,\dots,a_k)$, $a_j\in\mathbb{R}$.

Пусть $\Pi^{\chi}_{B,\kappa}=\Pi^{\chi_1}_{A_1,\kappa_1}\otimes\Pi^{\chi_2}_{A_2,\kappa_2}$, где $\chi(g)=\chi_1(g)\cdot\chi_2(g)\ \forall\ g\in G(\mathfrak{A})$, $\kappa=\begin{bmatrix}\kappa_1 & 0\\ 0 & \kappa_2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & A\end{bmatrix}$. Блочную структуру здесь можно определить с помощью представления $\lambda\in\Lambda_{2k}$ в виде $\lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}$ $\Big(\lambda_i\in\Lambda_k, i=1,2\Big)$.

Из унитарной эквивалентности $\Pi^{\chi_1,0}_{A_1,\kappa_1}$ и $\Pi^{\chi_1,0}_{A_2,\kappa_2}$, учитывая утверждение теоремы 3.3 о коммутанте представления $\Pi_{B,\kappa}$, получаем, что существует унитарная матрица $u=\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12}\\ u_{21} & u_{22}\end{bmatrix}\in M_{2k}(\mathbb{C})$ $\Big(u_{jk}\in M_k(\mathbb{C}),\ i,j=1,2\Big)$, удовлетворяющая следующим соотношениям:

$$[B,u^{\sharp}]=[\kappa(\mathfrak{a}),u^{\sharp}]=0\ \forall\ \mathfrak{a}\in G(\mathfrak{A}),\ \ u_{12}\neq 0 \tag{4.6}$$

($\sharp$ означает сопряжение или его отсутствие).

Отсюда $u_{12}\kappa_2(\mathfrak{a})=\kappa_1(\mathfrak{a})u_{12}$ и одновременно $u^*_{12}\kappa_1(\mathfrak{a})=\kappa_2(\mathfrak{a})u^*_{12}$. Умножая слева первое из этих соотношений на u^*_{12}, а второе — справа на u_{12}, получаем

$$u^*_{12}u_{12}\kappa_2(\mathfrak{a})=u^*_{12}\kappa_1(\mathfrak{a})u_{12}=\kappa_2(\mathfrak{a})u^*_{12}u_{12}. \tag{4.7}$$

Аналогично покажем, что

$$u_{12}u^*_{12}\kappa_1(\mathfrak{a})=u_{12}\kappa_2(\mathfrak{a})u^*_{12}=\kappa_1(\mathfrak{a})u_{12}u^*_{12}. \tag{4.8}$$

Пусть $u_{12}=v_{12}|u_{12}|$ — полярное разложение u_{12}, $E_1=v_{12}v^*_{12}$, $E_2=v^*_{12}v_{12}$. Тогда в силу (4.6) $E_1\neq 0$, $E_2\neq 0$, а из (4.6)–(4.8), используя стандартную технику, выводим соотношения

$$\Big[E_1,\kappa_1(\mathfrak{a})\Big]=\Big[E_2,\kappa_2(\mathfrak{a})\Big],\ \kappa_1(\mathfrak{a})v_{12}=v_{12}\kappa_2(\mathfrak{a})\,\forall\mathfrak{a}\in\mathfrak{A};\ \Big[v_{12},A\Big]=0. \tag{4.9}$$

Положим $\kappa_i^{(1)}(\mathfrak{a})=E_i\kappa_i(\mathfrak{a})$, $\kappa_i^{\perp}(\mathfrak{a})=(I_k-E_i)\kappa_i(\mathfrak{a})$, $A_i^{(1)}=E_iA$, $A_i^{\perp}=(I_k-E_i)A$, $i=1,2$. Из соотношений (4.9) получаем, что для каждого i операторы $\Pi^{\chi^0}_{A_i^{(1)},\kappa_i^{(1)}}(g_1)$, где χ^0 обозначает характер, тождественно равный единице, и $\Pi^{\chi_i}_{A_i^{\perp},\kappa_i^{\perp}}(g_2)$ перестановочны $\forall\, g_1,\, g_2\in G(\mathfrak{A})$. Более того,

$$\Pi^{\chi_i}_{A,\kappa_i}(g)=\Pi^{\chi^0}_{A_i^{(1)},\kappa_i^{(1)}}(g)\cdot\Pi^{\chi_i}_{A_i^{\perp},\kappa_i^{\perp}}(g)\ \forall\ g\in G(\mathfrak{A}). \tag{4.10}$$

Из соотношений (4.9) вытекает существование унитарной матрицы $v^{(1)}$ из $M_k(\mathbb{C})$, удовлетворяющей $\forall\, \mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ условиям:

$$E_1 v^{^{(1)}} = v^{^{(1)}} E_2 = v_{12},\ \left[v^{^{(1)}}, A\right] = 0,$$
$$v^{^{(1)}} \kappa_2(\mathfrak{a}) \left(v^{^{(1)}}\right)^* = \kappa_1^{(1)}(\mathfrak{a}) + v^{^{(1)}} \kappa_2^{\perp}(\mathfrak{a}) \left(v^{^{(1)}}\right)^*. \tag{4.11}$$

Используя (4.9), (4.11) и переходя в случае необходимости к унитарно эквивалентному представлению, можно считать, не ограничивая общности, что A и E_1 имеют диагональную форму

$$E_1 = E_2,\ \kappa_2^{(1)} = \kappa_1^{(1)}. \tag{4.12}$$

Следовательно, $\Pi^{\chi^0}_{A_1^{(1)}, \kappa_1^{(1)}}(g) = \Pi^{\chi^0}_{A_2^{(1)}, \kappa_2^{(1)}}(g)\, \forall g \in G(\mathfrak{A})$. Используя это соотношение, унитарную эквивалентность представлений $\Pi^{\chi_1, 0}_{A_1, \kappa_1}$ и $\Pi^{\chi_2, 0}_{A_2, \kappa_2}$, получаем из (4.10), что сужения представлений $\Pi^{\chi_1}_{A_1^{\perp}, \kappa_1^{\perp}}$ и $\Pi^{\chi_2}_{A_2^{\perp}, \kappa_2^{\perp}}$ на подпространства $\left[\Pi^{\chi_1}_{A_1^{\perp}, \kappa_1^{\perp}}(G(\mathfrak{A}))\xi_0\right]$ и $\left[\Pi^{\chi_2}_{A_2^{\perp}, \kappa_2^{\perp}}(G(\mathfrak{A}))\xi_0\right]$ унитарно эквивалентны. Это свойство позволяет провести изложенные выше рассуждения для представлений $\Pi^{\chi_1}_{A_1^{\perp}, \kappa_1^{\perp}}$, $\Pi^{\chi_2}_{A_2^{\perp}, \kappa_2^{\perp}}$ и увеличить проектор E_1. Таким образом, через конечное число шагов получим, что $E_1 = I_k$. Отсюда и из (4.12) вытекает необходимость условий теоремы 4.7.

Далее в этом разделе будем полагать, что $\mathfrak{A} = \mathbb{C}$.

Из теоремы 2.13 и леммы 4.5 следует, что для неразложимого у.и. КМШ-состояния φ представление $\Pi^{(2)}_\varphi$ группы $G(\mathbb{C}) \times G(\mathbb{C})$ можно реализовать в подпространстве $H_\varphi \subset L^2(\Lambda_k, \nu_k)$ операторами $\Pi^{(2)}_\varphi((g,h))$ $g, h \in G(\mathbb{C})$, действие которых задается следующим образом:

$$\left(\Pi^{(2)}_\varphi((g,e))\xi\right)(\lambda) = \left(\Pi^{(\mathfrak{l})}_\varphi(g)\xi\right)(\lambda) = \chi_\varphi(g)\alpha_{_{B,A}}(\lambda, g)\xi((I-B)\lambda + B\lambda g),$$
$$\left(\Pi^{(2)}_\varphi((e,g))\xi\right)(\lambda) = \left(\Pi^{(\mathfrak{r})}_\varphi(g)\xi\right)(\lambda) = \overline{\chi_\varphi(g)}\alpha_{_{(I-B),A}}(\lambda, g)\xi(B\lambda + (I-B)\lambda g), \tag{4.13}$$

где B — проектор из $M_k(\mathbb{C})$ $\left(B^2 = B\right)$, $A = A^* \in M_k(\mathbb{C})$, χ_φ — гомоморфизм $G(\mathbb{C})$ в $\mathbb{T} = \{c \in \mathbb{C} :\ |c| = 1\}$,

$$\alpha_{_{B,A}}(\lambda, g) = |det\, g|^{^{dim\, B}} \exp\Big\{ -\tfrac{1}{2} Tr\Big[B^* D B \lambda (g g^* - I)\lambda^*$$
$$+(I - B^*) D B \lambda (g - I)\lambda^* + B^* D (I - B)\lambda (g^* - I)\lambda^*\Big]\Big\},\ D = I + 2iA,$$

и $H_\varphi = \left[\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(G(\mathbb{C}))\xi_0\right] = \left[\Pi_\varphi^{(\mathfrak{r})}(G(\mathbb{C}))\xi_0\right]$.

Для упрощения дальнейших рассмотрений будем считать, не ограничивая общности, что $\chi_\varphi \equiv 1$.

Лемма 4.8. *Если φ — неразложимое у.и. КМШ-состояние на $G(\mathbb{C})$, а представление $\Pi_\varphi^{(2)}$ реализовано согласно (4.13), то в пространстве $\left[\Pi_\varphi^{(2)}\Big(G(\mathbb{C})\times G(\mathbb{C})\Big)\xi_0\right] = \left[\Pi_\varphi^{(\mathfrak{r})}\Big(G(\mathbb{C})\Big)\xi_0\right] = \left[\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}\Big(G(\mathbb{C})\Big)\xi_0\right] = H_0$ действие антиунитарной изометрии $\mathcal{J}_\varphi$ задается соотношением*

$$\Big(\mathcal{J}_\varphi\,\xi\Big) = \overline{\xi}(u_\varphi\lambda),$$

где черта означает комплексное сопряжение, а u_φ — унитарная матрица, удовлетворяющая условиям $u_\varphi A u_\varphi^* = -A$, $u_\varphi B u_\varphi^* = I - B$.

Доказательство. Оператор U, действующий в H_0 согласно формуле $(U\xi)(\lambda) = \overline{\Big(\mathcal{J}_\varphi\,\xi\Big)}(\lambda)$, является унитарным. Далее из определения представления $\Pi_\varphi^{(2)}$ получаем $\mathcal{J}_\varphi\Pi_\varphi^{(2)}((g_1,g_2))\mathcal{J}_\varphi = \Pi_\varphi^{(2)}((g_2,g_1))$. Отсюда и из (4.13) вытекает, что $\Pi_\varphi^{(2)}$ унитарно эквивалентно представлению $\overline{\Pi_\varphi^{(2)}}$, определяемому в H_0 операторами $\overline{\Pi_\varphi^{(2)}}((g_1,g_2)) = U\Pi_\varphi^{(2)}((g_1,g_2))U$, действие которых задается соотношениями

$$\begin{aligned}\Big(\overline{\Pi_\varphi^{(2)}}((g,e))\xi\Big)(\lambda) &= \alpha_{(I-B),-A}(\lambda,g)\,\xi((I-B)\lambda + B\lambda g),\\ \Big(\overline{\Pi_\varphi^{(2)}}((e,g))\xi\Big)(\lambda) &= \alpha_{B,-A}(\lambda,g)\,\xi(B\lambda + (I-B)\lambda g).\end{aligned} \tag{4.14}$$

Отсюда и из теоремы 4.7 вытекает утверждение леммы 4.8.

Лемма 4.9. *Пусть $\mathcal{B}(\mathbb{C}^k)$ — множество линейных операторов, действующих на $\mathbb{C}^k$, B — проектор из $\mathcal{B}(\mathbb{C}^k)$, $\ker B$ — ядро B и $\dim(\ker B) = l$. Тогда существует базис, в котором матрица оператора B имеет вид $\begin{bmatrix} I_{k-l} & 0\\ X & 0\end{bmatrix}$, где $X = \Big[x_{ij}\Big]$, $1\le i\le l$, $1\le j\le k-l$, $x_{ij} = \delta_{ij}\cdot x_{ij}\ge 0$, δ_{ij} — символ Кронекера.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{R}(A)$ — множество значений оператора A. Заметим, что подпространства $\mathcal{R}(BB^*)$ и $\mathcal{R}((I-B^*)(I-B))$. Более того, $\mathcal{R}\Big(BB^* + (I-B^*)(I-B)\Big) = \mathbb{C}^k$. Выберем в $\mathbb{C}^k$ базис $\Big\{e_j\Big\}_{j=1}^k$, состоящий из собственных векторов оператора $BB^*+(I-B^*)(I-B)$. Причем $\{e_1,e_2,\dots,e_{k-l}\}\subset\mathcal{R}(BB^*)$, $\{e_{k-l+1},e_{k-l+2},\dots,e_k\}\subset\mathcal{R}((I-B^*)(I-B))$.

Так как $B^2=B$ и $e_i=BB^*f_i$ при $i\le k-l$, то $Be_i=e_i$ и $B_{ij}=(Be_i,e_j)=\delta_{ij}\ \forall\ J$ и $i\le k-l$. Далее заметим, что $(I-B^*)(I-B)e_i=s_ie_i$ и $s_i>0$ при $i=k-l+1,\,k-l+2,\,\dots,\,k$. Отсюда при $i,j=k-l+1,\,k-l+2,\,\dots,\,k$ $B_{ij}=s_i^{-1}s_j^{-1}\Big(B(I-B^*)(I-B)e_i,(I-B^*)(I-B)e_j\Big)=s_i^{-1}s_j^{-1}\Big((I-B^*)(I-B)e_i,B^*(I-B^*)(I-B)e_j\Big)=0$. Следовательно, матрица проектора B в базисе $\Big\{e_j\Big\}_{j=1}^k$ имеет вид $\Big[B_{ij}\Big]=\begin{bmatrix}I_{k-l}&0\\Y&0\end{bmatrix}$, где Y — произвольная комплексная $l\times(k-l)$-матрица.

Теперь предположим для определенности, что $l\ge k-l$. При этом условии существует унитарная матрица $v\in M_l(\mathbb{C})$, для которой $vY=\begin{bmatrix}\hat Y\\0\end{bmatrix}$, где $\hat Y$ — $(k-l)\times(k-l)$-матрица. Пусть u — унитарная матрица из $M_{k-l}(\mathbb{C})$ такая, что $|\hat Y^*|u=\hat Y$. Обозначим, наконец, через w унитарную матрицу из $M_{k-l}(\mathbb{C})$, которая диагонализует $|\hat Y^*|\iff w|\hat Y^*|w^*=diag(|\hat Y^*|)$. Положим $V=\begin{bmatrix}I_{k-l}&0\\0&v\end{bmatrix}$, $U=\begin{bmatrix}u&0\\0&I_l\end{bmatrix}$, $W=\begin{bmatrix}w&0&0\\0&w&0\\0&0&I_{2l-k}\end{bmatrix}$. Теперь, согласно построению, матрица $WU^*V\Big[B_{ij}\Big]V^*UW^*$ удовлетворяет условиям леммы 4.9. Случай $l\le k-l$ рассматривается аналогично. Лемма 4.9 доказана.

Лемма 4.10. *Пусть проектор B, соответствующий неразложимому у.и. КМШ-состоянию φ на $G(\mathbb{C})$ (см. (4.13)), определяется матрицей $\Big[B_{ij}\Big]=\begin{bmatrix}I_{k-l}&0\\X&0\end{bmatrix}$, удовлетворяющей условиям леммы 4.9. Тогда:*

i) $k=2l$;

ii) $[v,X]=0$;

iii) матрица унитарного оператора u_φ, определенного в лемме 4.8, имеет вид $\begin{bmatrix}-\frac{vX}{\sqrt{1+X^2}}&\frac{v}{\sqrt{1+X^2}}\\\frac{v^*}{\sqrt{1+X^2}}&\frac{vX}{\sqrt{1+X^2}}\end{bmatrix}$, где $v\in U(l)$ и $v^2=I_l$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В первую очередь заметим, что в силу теоремы 3.3 пространство H_0, введенное в лемме 4.8, совпадает с множеством $\Big\{\xi\in L^2(\Lambda_k,\nu_k):\ \xi(u\lambda)=\xi(\lambda)\,\forall u\in U(B,A)=\big\{u\in U(k):\ [u,B]=[u,A]=0\big\}\Big\}$. Далее, используя утверждение леммы 4.8, получаем, что $u_\varphi^2\in U(B,A)$. Поэтому, если $u_\varphi^2=\int\limits_0^{2\pi}e^{is}dE_s$ — спектральное разложение u_φ^2, то, заменяя в случае необходимости u_φ на $u_\varphi \cdot \int\limits_0^{2\pi} e^{\frac{-is}{2}} dE_s$, будем считать, не ограничивая общности, что $u_\varphi^2 = I_k$. Матрица u_φ при этом условии имеет вид $u_\varphi = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12}^* & u_{22} \end{bmatrix}$. Из равенства $u_\varphi B u_\varphi^* = I - B$ (см. лемму 4.8) получаем утверждение *i)* нашей леммы и соотношение $u_\varphi = \begin{bmatrix} -u_{12}x & u_{12} \\ u_{12}^* & xu_{12} \end{bmatrix}$.

Так как u_φ — унитарная матрица, то справедливы соотношения:

$$xu_{12}^* u_{12} x = I_l - u_{12}u_{12}^*\,, \tag{4.15}$$

$$u_{12}x^2 u_{12}^* = I_l - u_{12}u_{12}^*\,, \tag{4.16}$$

$$xu_{12}^* u_{12} = u_{12}xu_{12}\,. \tag{4.17}$$

Кроме этого, из условия $u_\varphi^2 = I_k$ получаем

$$u_{12}^* x = xu_{12}. \tag{4.18}$$

Теперь из соотношений (4.17)–(4.18) вытекает $xu_{12}^*u_{12} = u_{12}u_{12}^*x$. Отсюда и из (4.15) получаем $u_{12}u_{12}^*x^2 = I_l - u_{12}u_{12}^*$. Следовательно,

$$u_{12}u_{12}^* = (I_l + x^2)^{-1}. \tag{4.19}$$

Пусть $\sqrt{u_{12}u_{12}^*}\; v = u_{12}$ — полярное разложение оператора u_{12}. Из соотношения (4.19) вытекает, что v — унитарная $l \times l$-матрица. Наконец, из (4.16) и (4.19) получаем

$$\sqrt{u_{12}u_{12}^*}\, vx^2v^* \sqrt{u_{12}u_{12}^*} = I_l - (I_l + x^2)^{-1} = x^2\,(I_l + x^2)^{-1}$$

или

$$vx^2v^* = x^2 \;\Leftrightarrow\; [v,\, x] = 0.$$

Отсюда и из (4.19) вытекают утверждения *ii)* и *iii)* нашей леммы. Лемма 4.10 доказана.

Цель дальнейших рассмотрений — найти условия на A и B, при которых операторы представления группы $G(\mathbb{C}) \times G(\mathbb{C})$, определенные согласно (4.14), имеют вид

$$\overline{\Pi_\varphi^{(2)}}((g_1, e))\mathcal{J}_\varphi \overline{\Pi_\varphi^{(2)}}((g_2, e)\mathcal{J}_\varphi = \overline{\Pi_\varphi^{(2)}}((g_1, g_2)).$$

Такую реализацию в дальнейшем будем называть *стандартной*.

Пусть φ — неразложимое у.и. КМШ-состояние на $G(\mathbb{C})$. Если φ реализовано согласно (4.13), то положим $k(\varphi) = k$. Из утверждений 2.13, 4.7 и

4.10 (i) вытекает, что $k(\varphi)$ — инвариант представления и $k(\varphi) = 2l$, где l — натуральное число.

Пусть $M_\infty^{(l)}(\mathfrak{A})$ — подмножество в $M_\infty(\mathfrak{A})$, состоящее из матриц, у которых столбцы с номерами бо́льшими, чем l, нулевые. Обозначим через $G(\mathfrak{A}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathfrak{A})$ полупрямое произведение $G(\mathfrak{A})$ на аддитивную группу $M_\infty^{(l)}(\mathfrak{A})$ с естественным умножением

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 \cdot g_2, h_1 + g_1 \cdot h_2) \ \Big(g_i \in G(\mathbb{C}), h_i \in M_\infty^{(l)}(\mathfrak{A}), i = 1, 2\Big).$$

Отождествим $G(\mathfrak{A})$ с ее образом $G(\mathfrak{A}) \ltimes 0_l$, где 0_l — нулевая матрица из $M_\infty^{(l)}(\mathfrak{A})$, при естественном вложении $G(\mathfrak{A})$ в $G(\mathfrak{A}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathfrak{A})$.

Предложение 4.11. *Состояние φ расширяется до неразложимого у.и. КМШ-состояния $\hat{\varphi}$ на $G(\mathbb{C}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})$.*

Прежде чем перейти непосредственно к доказательству предложения 4.11, приведем конструкцию представления $\hat{\Pi}_\varphi^{(2)}$ группы

$$\Big(G(\mathbb{C}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})\Big) \times \Big(G(\mathbb{C}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})\Big),$$

которое является расширением представления $\Pi_\varphi^{(2)}$ группы $G(\mathbb{C}) \times G(\mathbb{C})$ (см. (4.13)).

В силу теоремы 2.13 представление $\Pi_\varphi^{(2)}$ можно реализовать в $\Big[\Pi_\varphi^{(2)}(G(\mathbb{C}) \times G(\mathbb{C}))\xi_0\Big] \subset L^2(\Lambda_{k(\varphi)}, \nu_{k(\varphi)})$ согласно (4.13). Соответствующие операторы естественно продолжаются на все $L^2(\Lambda_{k(\varphi)}, \nu_{k(\varphi)})$.

Пусть e — единица группы $G(\mathbb{C})$, $m_1, m_2 \in M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})$; $\widehat{m_1} = (e, m_1) \times (e, 0_l)$, $\widehat{m_2} = (e, 0_l) \times (e, m_2)$. Положим

$$\begin{gathered}
\Big(\hat{\Pi}_\varphi^{(2)}(\widehat{m_1})\xi\Big)(\lambda) = \exp\Big\{i\Re\, Tr[B\lambda m_1]\Big\}\, \xi(\lambda);\\
\Big(\hat{\Pi}_\varphi^{(2)}(\widehat{m_2})\xi\Big)(\lambda) = \exp\Big\{-i\Re\, Tr[Bu_\varphi \lambda m_2]\Big\}\, \xi(\lambda);\\
\hat{\Pi}_\varphi^{(2)}(g_1 \times g_2) = \Pi_\varphi^{(2)}(g_1 \times g_2),
\end{gathered} \tag{4.20}$$

если

$$\begin{gathered}
g_1 \times g_2 \in G(\mathbb{C}) \times G(\mathbb{C}) \subset \Big(G(\mathbb{C}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})\Big) \times \Big(G(\mathbb{C}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})\Big),\\
\xi \in L^2(\Lambda_{k(\varphi)}, \nu_{k(\varphi)}).
\end{gathered}$$

Для обоснования предложения 4.11 сформулируем и докажем две вспомогательные леммы технического характера.

Лемма 4.12. *Если φ — неразложимое у.и. КМШ-состояние на $G(\mathbb{C})$, $\Pi_\varphi^{(2)}$, $\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}$, $\Pi_\varphi^{(\mathfrak{r})}$ реализованы согласно (4.13), то матрицы $B^*D(I_{k(\varphi)}-B)+(I_{k(\varphi)}-B)^*DB$ и $B^*D(I_{k(\varphi)}-B)-(I_{k(\varphi)}-B)^*DB$ невырождены.*

Доказательство. Предположим обратное. Тогда, например,

$$\ker(B^*D(I_{k(\varphi)}-B)+(I_{k(\varphi)}-B)^*DB)=\mathcal{K}\neq 0.$$

Так как $(I_{k(\varphi)}-B)\mathcal{K}\subset\mathcal{K}$ и $B\mathcal{K}\subset\mathcal{K}$, то будем считать, не ограничивая общности, что

$$(I_{k(\varphi)}-B)\mathcal{K}\neq 0. \tag{4.21}$$

Обозначим через P ортогональный проектор на подпространство $(I_{k(\varphi)}-B)\mathcal{K}\subset\mathcal{K}$. Так как $P\leq(I_{k(\varphi)}-B)^*(I_{k(\varphi)}-B)$, то согласно предположению

$$B^*D(I_{k(\varphi)}-B)P=0 \text{ и } (I_{k(\varphi)}-B)^*DBP=0. \tag{4.22}$$

По построению представлений $\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}$, $\Pi_\varphi^{(\mathfrak{r})}$ и в силу теоремы 3.3

$$\begin{aligned}
&\left[\Pi_\varphi^{(\mathfrak{r})}\Big(G(\mathbb{C})\Big)\xi_0\right]=\left[\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}\Big(G(\mathbb{C})\Big)\xi_0\right]\\
&=\Big\{\xi\in L^2(\Lambda_{k(\varphi)},\nu_{k(\varphi)}):\ \xi(\lambda)=\xi(u^{-1}\lambda),\\
&\forall\, u\in U(B,A)=\{u\in U(k(\varphi)):\ [u,A]=[u,B]=0\}\Big\}=H_0.
\end{aligned}\tag{4.23}$$

Следовательно, $\forall\ h\in M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})$ вектор $\eta_h\neq 0$, определяемый функцией $\eta(\lambda)=\Big[Tr[P\lambda h\lambda^*]-\int\limits_{\Lambda_{k(\varphi)}}Tr[P\lambda h\lambda^*]\,d\,\nu_{k(\varphi)}\Big]$, принадлежит H_0.

Теперь на основе нашего предположения докажем, что

$$\eta_h\perp\left[\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}\Big(G(\mathbb{C})\Big)\xi_0\right].$$

Для этого заметим, что в силу (4.13) $\left[\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}\Big(G(\mathbb{C})\Big)\xi_0\right]$ является замыканием линейной оболочки множества функций $\Big\{\alpha_{B,A}(\cdot,g)\Big\}_{g\in G(\mathbb{C})}$, где

$$\begin{aligned}
&\alpha_{B,A}(\lambda,g)=|\det\,g|^{\dim B}\ \exp\Big\{-\frac{1}{2}Tr\Big[B^*DB\lambda(gg^*-I)\lambda^*\\
+\quad&(I_{k(\varphi)}-B^*)DB\lambda(g-I)\lambda^*+B^*D(I_{k(\varphi)}-B)\lambda(g^*-I)\lambda^*\Big]\Big\},\\
&D=I_{k(\varphi)}+2iA.
\end{aligned}$$

Положим

$$\alpha^{(P)}_{B,A}(\lambda,g)=|\det g|^{\dim B}\,\exp\Big\{-\tfrac{1}{2}Tr\Big[B^*DB(I_{k(\varphi)}-P)\lambda(gg^*-I)\lambda^*$$
$$+(I_{k(\varphi)}-B^*)DB(I_{k(\varphi)}-P)\lambda(g-I)\lambda^*$$
$$+B^*D(I_{k(\varphi)}-B)(I_{k(\varphi)}-P)\lambda(g^*-I)\lambda^*\Big]\Big\}.$$

В силу (4.22) $\alpha_{B,A}(\lambda,g)=\alpha^{(P)}_{B,A}(\lambda,g)$. Поэтому

$$\int\limits_{\Lambda_{k(\varphi)}}\eta_h(\lambda)\cdot\overline{\alpha_{B,A}(\lambda,g)}\,d\lambda=\int\limits_{\Lambda_{k(\varphi)}}\eta_h(\lambda)\cdot\overline{\alpha^{(P)}_{B,A}(\lambda,g)}\,d\lambda.$$

Но из (4.22), используя вид η_h, легко вывести, что последний интеграл в приведенном соотношении равен нулю. Следовательно,

$$\eta_h\perp\Big\{\alpha_{B,A}(\cdot,g)\Big\}_{g\in G(\mathbb{C})}\ \Rightarrow\ \eta_h\perp\Big[\Pi^{(\mathfrak{l})}_\varphi\Big(G(\mathbb{C})\Big)\xi_0\Big].$$

Так как $\eta_h\neq 0$, то полученное свойство противоречит (4.23). Лемма 4.12 доказана.

Пусть $\hat e$ — единица группы $G(\mathbb{C})\ltimes M^{(l)}_\infty$, $\hat\Pi^{(\mathfrak{l})}_\varphi(g)=\hat\Pi^{(2)}_\varphi(g\times\hat e)$, $\hat\Pi^{(\mathfrak{r})}_\varphi(g)=\hat\Pi^{(2)}_\varphi(\hat e\times g)$ при $g\in G(\mathbb{C})\ltimes M^{(l)}_\infty$ (см. (4.20)). Положим

$$\mathcal{M}^{(\mathfrak{l})}=\hat\Pi^{(\mathfrak{l})}_\varphi\Big(G(\mathbb{C})\ltimes M^{(l)}_\infty\Big)'',\ \ \mathcal{M}^{(\mathfrak{r})}=\hat\Pi^{(\mathfrak{r})}_\varphi\Big(G(\mathbb{C})\ltimes M^{(l)}_\infty\Big)''.$$

Лемма 4.13. *Если* $\hat\Pi^{(2)}_\varphi$ *реализовано согласно (4.20), то* $\Big[\mathcal{M}^{(\mathfrak{l})}\xi_0\Big]=\Big[\mathcal{M}^{(\mathfrak{r})}\xi_0\Big]=L^2\Big(\Lambda_{k(\varphi)},\nu_{k(\varphi)}\Big)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\Lambda_{k(\varphi)}(j)$ множество j-х столбцов матриц $\lambda\in\Lambda_{k(\varphi)}$. Тогда $\Lambda_{k(\varphi)}=\mathop{\times}\limits_{j=1}^{\infty}\Lambda_{k(\varphi)}(j)$. Обозначим через $\Lambda^m_{k(\varphi)}$ подмножество матриц из $\mathop{\times}\limits_{j=1}^{m}\Lambda_{k(\varphi)}(j)$, $\ m\geq k(\varphi)$, ранга $k(\varphi)$.

Принимая во внимание теорему Стоуна, для доказательства леммы 4.13 достаточно установить, что непрерывные функции из множества $\Big\{a\xi_0\Big\}_{a\in\mathcal{M}^{(m)}\,(\mathcal{M}^{(\mathfrak{r})})}$ разделяют точки $\Lambda^m_{k(\varphi)}$ при любом достаточно большом m.

Пусть ζ_1, ζ_2 — матрицы из $\Lambda^m_{k(\varphi)}$ со свойством: для любой непрерывной функции вида $a\xi_0$, зависящей только от первых m столбцов матриц $\lambda\in\Lambda_{k(\varphi)}$, справедливо соотношение

$$(a\xi_0)(\zeta)=(a\xi_0)(\varsigma).\tag{4.24}$$

Отсюда и из (4.20), (4.23) вытекает существование матрицы $u \in U(B, A)$, для которой

$$u\zeta = \varsigma. \tag{4.25}$$

Далее, учитывая утверждения лемм 4.9–4.10, удобно представить ζ, ς, A, B, u в блочной форме, соответствующей разложению $\Lambda^m_{k(\varphi)}$ в прямую сумму двух экземпляров Λ^m_l, $k(\varphi) = 2l$. Если $\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}$, $\varsigma = \begin{bmatrix} \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ X & 0 \end{bmatrix}$, $X \geq 0$, то $u = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned} C &= B^* D(I_{k(\varphi)} - B) + (I_{k(\varphi)} - B^*)DB \\ &= \begin{bmatrix} -2\Big(X^2 + 2i\,(A_{12}X + XA_{12}^* + 2XA_{22}X)\Big) & X + 2i\,(A_{12} + XA_{22}) \\ X + 2i\,(A_{12}^* + A_{22}X) & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Если m_1 — произвольная матрица из $M_\infty^{(l)}$, у которой столбцы с номерами, бо́льшими, чем m, нулевые, то из (4.20), (4.24), (4.25) вытекает

$$\exp\Big\{i\Re\, Tr[B\zeta m_1]\Big\} = \exp\Big\{i\Re\, Tr[B\,u\,\zeta m_1]\Big\}.$$

Следовательно, $\zeta_1 = (u\zeta)_1 = u_{11}\zeta_1$. Так как ранг ζ_1 равен l, то $u_{11} = I_l$. С другой стороны, $u \in U(B, A) \Rightarrow [u, C] = 0$. Записывая последнее соотношение в блочной форме и учитывая тот факт, что $u_{11} = I_l$, получаем

$$\begin{gathered} u_{11}\{X + 2i\,(A_{12} + XA_{22})\} \\ \{X + 2i\,(A_{12} + XA_{22})\}u_{22} = \{X + 2i\,(A_{12} + XA_{22})\}. \end{gathered}$$

Но в силу леммы 4.12 оператор $\{X + 2i\,(A_{12} + XA_{22})\}$ невырожден. Поэтому $u_{22} = I_l$. Следовательно, $\zeta = \varsigma$. Рассуждения в случае алгебры $\mathcal{M}^{(\mathfrak{r})}$ проводятся совершенно аналогично. Лемма 4.13 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о п р е д л о ж е н и я 4.11. Положим $\hat{\varphi}(g) = \left(\hat{\Pi}^{(2)}_\varphi(g \times \hat{e})\xi_0, \xi_0\right) = \left(\hat{\Pi}^{(\mathfrak{l})}_\varphi(g)\xi_0, \xi_0\right)$, где $g \in G(\mathbb{C}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})$, $\hat{e}$ — единица группы $G(\mathbb{C}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})$. Тот факт, что $\hat{\varphi}$ — КМШ-состояние на $G(\mathbb{C}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})$, вытекает из леммы 4.13. Далее, используя реализацию (4.20), легко показать неприводимость представления $\hat{\Pi}^{(2)}_\varphi$ группы $G(\mathbb{C}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C}) \times G(\mathbb{C}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})$. Следовательно, $\mathcal{M}^{(\mathfrak{l})} = \hat{\Pi}^{(\mathfrak{l})}_\varphi\left(G(\mathbb{C}) \ltimes M_\infty^{(l)}\right)''$ — фактор и поэтому состояние $\hat{\varphi}$ на $G(\mathbb{C}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})$ неразложимо. Предложение 4.11 доказано.

Пусть $\mathbf{1}$ — мультипликативный характер на группе $G(\mathfrak{A}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathfrak{A})$, тождественно равный единице, $\Pi^{\mathbf{1},0}_{A,\kappa,z}$ — сужение представления $\Pi^{\mathbf{1}}_{A,\kappa,z}$ (см. теорему 2.14) на подпространство $\left[\Pi^{\mathbf{1}}_{A,\kappa,z}(G(\mathfrak{A}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathfrak{A}))\xi_0\right]$.

Следующее утверждение является аналогом теоремы 4.7 для представлений $\Pi^{\mathbf{1},0}_{A,\kappa,z}$ группы $G(\mathfrak{A}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathfrak{A})$.

Теорема 4.14. *Для унитарной эквивалентности неприводимых представлений* $\Pi^{\mathbf{1},0}_{A_1,\kappa_1,z_1}$ *и* $\Pi^{\mathbf{1},0}_{A_2,\kappa_2,z_2}$, *действующих в* $L^2(\Lambda_k, \nu_k)$ *(см. теорему 2.14) и удовлетворяющих условию* $\kappa_1(\mathbf{1}_\mathfrak{A}) = \kappa_2(\mathbf{1}_\mathfrak{A}) = I_k$, *группы* $G(\mathfrak{A}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathfrak{A})$, *необходимо и достаточно существование унитарного оператора* $u \in U(k)$ *со свойствами*

$$uA_1u^* = A_2,\ u\kappa_1(\mathfrak{a})u^* = \kappa_2(\mathfrak{a})\ \forall\ a \in \mathfrak{A},\ z_1u^* = z_2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая утверждение теоремы 4.7, будем считать, что $A_1 = A_2 = A$, $\kappa_1(\mathfrak{a}) = \kappa_2(\mathfrak{a}) = \kappa(\mathfrak{a})\ \forall\ \mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$.

Пусть $M_\infty^{(l)}(k, \mathfrak{A})$ — множество матриц из $M_\infty^{(l)}(\mathfrak{A})$, у которых первые k строк нулевые. Отождествляя $G(k, \infty, \mathfrak{A})$ и $M_\infty^{(l)}(k, \mathfrak{A})$ с их естественными образами в $G(\mathfrak{A}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathfrak{A})$, обозначим через $G(k, \infty, \mathfrak{A}) \ltimes M_\infty^{(l)}(k, \mathfrak{A})$ подгруппу, порожденную $G(k, \infty, \mathfrak{A})$ и $M_\infty^{(l)}(k, \mathfrak{A})$. Положим

$$H_j = \left[\Pi^{\mathbf{1}}_{A,\kappa,z_j}(G(\mathfrak{A}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathfrak{A}))\xi_0\right],\ \Pi^{\mathbf{1},0}_{A,\kappa,z_j} = \Pi_j\,,\ j = 1, 2.$$

Проведем доказательство нашей теоремы в случае, когда ранги операторов z_1 и z_2 равны k.

В первую очередь, используя реализацию представлений $\Pi^{\mathbf{1}}_{A,\kappa,z_j}$, $j = 1, 2$, приведенную в условии теоремы 2.14, вычислим соответствующие сферические функции. Если $\left\{\mathfrak{a}_j\ \ (\mathfrak{a}_0 = \mathbf{1}_\mathfrak{A})\right\}_{j=0}^n$ — базис линейного пространства $\mathfrak{A}$, $h = \sum\limits_{j=0}^n \mathfrak{a}_j \mathfrak{H}_j \in M_\infty^{(l)}(\mathfrak{A}) \subset G(\mathfrak{A}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathfrak{A})$, $g = I + \sum\limits_{j=0}^n \mathfrak{a}_j \mathfrak{M}_j \in G(\mathfrak{A}) \subset G(\mathfrak{A}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathfrak{A})$ ($\mathfrak{H}_j \in M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})$, $\mathfrak{M}_j \in M_\infty(\mathbb{C})$), $\hat{g} = h \cdot g$ и $g_\kappa = I_k + \sum\limits_{j=0}^n \kappa(\mathfrak{a}_j) \otimes \mathfrak{M}_j$, то с помощью обычных вычислений можно показать, что

$$\varphi_j(\hat{g}) = \Big(\Pi_j(\hat{g})\xi_0,\, \xi_0\Big)$$

$$= \frac{\det(g_\kappa)}{\det\left[I + \frac{1}{2}\sum\limits_{s=0}^n] D\kappa(\mathfrak{a}_s) \otimes \mathfrak{M}_s + \kappa(\mathfrak{a}_s)^* D \otimes \mathfrak{M}_s^*] + \frac{1}{2}\sum\limits_{s,t=0}^n \kappa(\mathfrak{a}_s)^* D\kappa(\mathfrak{a}_t) \otimes \mathfrak{M}_s \mathfrak{M}_t^*\right]}$$

$$\times \exp\Big\{ -\tfrac{1}{4}\sum_{f,r=0}^{n} Tr\Big[z_j\kappa(\mathfrak{a}_r)\Big(1+\tfrac{1}{2}\sum_{s=0}^{n}[(\mathfrak{a}_s)\otimes\mathfrak{M}_s+\kappa(\mathfrak{a}_s)^*D\otimes\mathfrak{M}_s^*]$$
$$+\tfrac{1}{2}\sum_{s,t=0}^{n}\kappa(\mathfrak{a}_s)^*D\kappa(\mathfrak{a}_t)\otimes\mathfrak{M}_s\mathfrak{M}_t^*\Big)^{-1}[\kappa(a_f)^*z_j^*\mathfrak{H}_f^*]\mathfrak{H}_r\Big]\Big\}. \qquad (4.26)$$

Из унитарной эквивалентности Π_1 и Π_2 следует, что $\varphi_1(\hat{g}) = \varphi_2(\hat{g})$ $\forall\,\hat{g} \in G(\mathfrak{A})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathfrak{A})$. Поэтому из (4.26), учитывая произвольность $\mathfrak{H}_f$ $(f = 0, 1, 2, \ldots, n)$, при $g = I$ получаем

$$z_1\kappa(\mathfrak{a}_r)\kappa(\mathfrak{a}_f)^*z_1^* = z_2\kappa(\mathfrak{a}_r)\kappa(\mathfrak{a}_f)^*z_2^* \ \forall\ r, f = 0, 1, 2, \ldots, n. \qquad (4.27)$$

Пусть $z_1 = \sqrt{z_1z_1^*}\,v_1$, $z_2 = \sqrt{z_2z_2^*}v_2$ — полярные разложения z_1 и z_2, соответственно. Так как $\kappa(\mathbf{1}_\mathfrak{A}) = I_k$ и $\mathfrak{a}_0 = \mathbf{1}_\mathfrak{A}$, то из (4.27) получаем $z_1z_1^* = z_2z_2^*$. Отсюда, учитывая тот факт, что ранги z_1 и z_2 равны k, имеем

$$v = v_1^*v_2 \in U(k),\ z_1v = z_2. \qquad (4.28)$$

Далее замечаем, что соотношение $v_1\kappa(\mathfrak{a}_r)\kappa(\mathfrak{a}_f)^*v_1^* = v_2\kappa(\mathfrak{a}_r)\kappa(\mathfrak{a}_f)^*v_2^*$ $\forall\, r, f = 0, 1, 2, \ldots, n$, вытекающее из (4.27), эквивалентно условию

$$[v, \kappa(\mathfrak{a})] = 0 \quad \forall\,\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}. \qquad (4.29)$$

При $g = I + \mathbf{1}_\mathfrak{A}\mathfrak{M}_0$ и $h = \mathbf{1}_\mathfrak{A}\mathfrak{H}_0$ из (4.26), рассматривая слагаемые первого порядка по $\mathfrak{M}_0$, получаем

$$z_1Dz_1^*\mathfrak{H}_0^*\mathfrak{M}_0\mathfrak{H}_0 + z_1Dz_1^*\mathfrak{H}_0^*\mathfrak{M}_0^*\mathfrak{H}_0 = z_2Dz_2^*\mathfrak{H}_0^*\mathfrak{M}_0\mathfrak{H}_0 + z_2Dz_2^*\mathfrak{H}_0^*\mathfrak{M}_0^*\mathfrak{H}_0.$$

Отсюда и из (4.28), учитывая произвольность $\mathfrak{H}_0$ и $\mathfrak{M}_0$, имеем

$$z_1Dz_1^* = z_2Dz_2^* \ \Rightarrow\ [v, A] = 0. \qquad (4.30)$$

Теперь утверждение нашей теоремы при условии, что ранги z_1 и z_2 равны k, вытекает из соотношений (4.28)–(4.30).

Наметим доказательство теоремы 4.14 для произвольных матриц z_1 и z_2. Пусть $(g, h) \in G(\mathfrak{A})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathfrak{A})$, где $g \in G(\mathfrak{A})$, $h = \begin{bmatrix}\mathfrak{h} & \mathfrak{O}\end{bmatrix}$, $\mathfrak{h}$ — матрица из l столбцов и бесконечного числа строк, $\mathfrak{O}$ — нулевая матрица. Для наглядности отождествим элемент (g, h) с матрицей $\begin{bmatrix} I_l & 0\\ \mathfrak{h} & g\end{bmatrix}$. При этом подгруппе $G(r, \infty, \mathfrak{A})\ltimes M_\infty^{(l)}(r, \mathfrak{A})$, введенной в начале доказательства, соответствует множество матриц вида $\begin{bmatrix} I_l & 0 & 0\\ 0 & I_r & 0\\ \mathfrak{m} & 0 & g\end{bmatrix}$, $g \in G(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{m}$ — матрица над $\mathfrak{A}$ из l столбцов и бесконечного числа строк. Обозначим, наконец, через $G_r^{(l)}(\mathfrak{A})$ подгруппу группы $G(\mathfrak{A}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathfrak{A})$, состоящую из матриц $\gamma(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}, g) = \begin{bmatrix} I_l & 0 & 0 \\ 0 & I_r & 0 \\ \mathfrak{m} & \mathfrak{h} & g \end{bmatrix}$.

Пусть $\Pi_j^{(k)}$ — сужение Π_j на $G_k^{(l)}(\mathfrak{A})$, действующее в

$$H_j^{(k)} = \left[\Pi_j(G_k^{(l)}(\mathfrak{A}))\xi_0\right] \subset H_j,$$

$\mathcal{C}_j$ — центр $\Pi_j^{(k)}(G_k^{(l)}(\mathfrak{A}))''$, $j = 1, 2$. Рассмотрим разложение представления $\Pi_j^{(k)}$ в прямой интеграл неприводимых сферических представлений (см. теорему 2.14), соответствующий $\mathcal{C}_l$, $l = 1, 2$:

$$\left(\Pi_j^{(k)}, H_j^{(k)}, \xi_0\right) = \int\limits_{s \in S(\mathcal{C}_j)} \left(\Pi_{j,s}^{(k)}, H_{j,s}^{(k)}, \xi_{0,s}\right) d\,\mu_j(s),$$

где $S(\mathcal{C}_j)$ — спектр $\mathcal{C}_j$, μ_j — вероятностная мера на $\mathcal{C}_j$, $||\xi_{0,s}|| = 1$ для μ_j — п.в. $s \in S(\mathcal{C}_j)$. Пусть подгруппа $G_k^{(l)}(r, \infty, \mathfrak{A})$ состоит из матриц вида $\begin{bmatrix} I_l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & 0 \\ \mathfrak{m} & \mathfrak{h} & 0 & g \end{bmatrix}$.

Свойства *a)–d)*, приведенные далее, можно обосновать, используя общие методы, которые изложены при доказательстве лемм 2.4, 2.6 и предложения 2.5. Кроме этого, их можно вывести независимо с помощью разложения конкретной реализации $\Pi_j^{(k)}$ (см. теорему 2.13) в прямой интеграл неприводимых сферических представлений на основе методов, разработанных в разделе 3:

a) $\mathcal{C}_j = \bigcap\limits_{r=1}^{\infty} \Pi_j^{(k)}(G_k^{(l)}(r, \infty, \mathfrak{A}))'' = \bigcap\limits_{r=1}^{\infty} \Pi_j^{(k)}(G_k^{(l)}(r, \infty, \mathfrak{A}) \cap G(\mathfrak{A}))''$;

b) представление $\Pi_{j,s}^{(k)}$ *для* μ_j *— п.в.* $s \in S(\mathcal{C}_j)$ *унитарно эквивалентно в силу теоремы 2.13* $\Pi^{1,0}_{A,\kappa,z_j(s)}$, *где* $z_j(s)$ *— матрица из* k *столбцов и* $(l+k)$ *строк вида* $\begin{bmatrix} z_j \\ z_j^{(k)}(s) \end{bmatrix}$, *(*$z_j^{(k)}(s)$ *— верхняя треугольная* $(k \times k)$*-матрица с неотрицательными элементами на диагонали)*;

c) если $rang\,(z)$ *— ранг матрицы* z, *то* $\mu_j(\{s \in S(\mathcal{C}_j) : \ rang\,(z_j^{(k)}(s)) = k\}) = 1$;

d) так как действия операторов $\Pi_j(g)$, $j = 1, 2$, *при* $g \in G(\mathfrak{A})$ *совпадают, то в силу свойства a)* $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$. *Поэтому* $S(\mathcal{C}_1) = S(\mathcal{C}_2) = S$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ *и для*

μ — п.в. $s \in S$ справедливы соотношения

$$\varphi_{1,s}(\gamma(\mathfrak{m},\mathfrak{h},g)) = \varphi_{2,s}(\gamma(\mathfrak{m},\mathfrak{h},g)) \ \forall \gamma(\mathfrak{m},\mathfrak{h},g) \in G_k^{(l)}(\mathfrak{A});$$
$$\varphi_{1,s}(\gamma(\mathfrak{m},0,g)) = \varphi_{2,s}(\gamma(\mathfrak{m},0,g)) = \varphi_j(\gamma(\mathfrak{m},0,g)),\ j=1,2,$$
$$\forall \gamma(\mathfrak{m},0,g) \in G(k,\infty,\mathfrak{A}) \ltimes M_\infty^{(l)}(k,\mathfrak{A}),\ \text{где}\ \ \varphi_{j,s}(h) = \left(\Pi_{j,s}^{(k)}(h)\xi_{0,s}\,\xi_{0,s}\right).$$

Таким образом, согласно *d)* представления $\Pi^{1,0}_{A,\kappa,z_1(s)}$ и $\Pi^{1,0}_{A,\kappa,z_2(s)}$ (см. *b)*) группы $G_k^{(l)}(\mathfrak{A})$ унитарно эквивалентны. В силу свойства *c)* $rang\,(z_1(s)) = rang\,(z_2(s)) = k$. Следовательно, мы попадаем в условия, при которых теорема уже доказана.

Так как в силу леммы 4.13 $\left[\mathcal{M}^{(\mathfrak{l})}\xi_0\right] = \left[\mathcal{M}^{(\mathfrak{r})}\xi_0\right] = L^2\left(\Lambda_{k(\varphi)},\nu_{k(\varphi)}\right)$, то отображение $\hat{S}:\ m\xi_0 \leftarrow m^*\xi_0\ \ (m \in \mathcal{M}^{(\mathfrak{l})})$ расширяется до антилинейного замкнутого оператора с плотной в $L^2\left(\Lambda_{k(\varphi)},\nu_{k(\varphi)}\right)$ областью определения. Поэтому согласно общей конструкции модулярной теории Томита (см. [14]) можно построить антиунитарную изометрию $\mathcal{J}_{\hat\varphi}$ и модулярный оператор $\Delta_{\hat\varphi}$, определяющие полярное разложение $\hat S:\ \hat S = \mathcal{J}_{\hat\varphi}\Delta_{\hat\varphi}^{\frac12}$.

Далее заметим, что по построению $\left[\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(G(\mathbb{C}))\xi_0\right] = \left[\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{r})}(G(\mathbb{C}))\xi_0\right]$ (см. (4.20)). Следовательно,

$$\mathcal{J}_\varphi\eta = \mathcal{J}_{\hat\varphi}\eta,\ \Delta_\varphi\eta = \Delta_{\hat\varphi}\eta\ \ \forall\ \eta \in \left[\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(G(\mathbb{C}))\xi_0\right]. \tag{4.31}$$

Рассмотрим представление $\widetilde\Pi^{(2)}$ группы

$$G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C}) \times G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C}),$$

определенное в $L^2\left(\Lambda_{k(\varphi)},\nu_{k(\varphi)}\right)$ согласно соотношению

$$\widetilde\Pi^{(2)}\Big((g_1,g_2)\Big) = \hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(g_1)\mathcal{J}_{\hat\varphi}\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(g_2)\mathcal{J}_{\hat\varphi}\ \ (g_1,g_2 \in G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})). \tag{4.32}$$

Отождествляя $G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C}) \times G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})$ с группой функций на $X_2 = \{0,1\}$ со значениями в $G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})$ и применяя теорему 2.14, получаем, что существуют проектор $B' \in M_j(\mathbb{C})$, самосопряження матрица $A' \in M_j(\mathbb{C})$ и матрица z' из l строк и j столбцов, для которых представление $\widetilde\Pi^{(2)}$ унитарно эквивалентно представлению Π', действующему в подпространстве $\left[\Pi'\Big(G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})\ \times\ G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})\Big)\xi_0\right] \subset L^2(\Lambda_j,\nu_j)$ согласно формулам

$$\Big(\Pi'(g\times e)\xi\Big)(\lambda) = \alpha_{B',A'}(\lambda,g)\xi((I-B')\lambda + B'\lambda g),$$
$$\Big(\Pi'(e\times g)\xi\Big)(\lambda) = \alpha_{B',A'}(\lambda,g)\xi((I-B')\lambda g + B'\lambda). \tag{4.33}$$

Здесь e — единица $G(\mathbb{C})$, $g \in G(\mathbb{C})$ и $G(\mathbb{C})$ отождествляется с соответствующей подгруппой в $G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})$.

Далее, используя обозначения, принятые в (4.20), действие операторов $\Pi'(\widehat{m}_1)$ и $\Pi'(\widehat{m}_2)$ можно задать соотношениями

$$\begin{gathered}\Big(\Pi'(\widehat{m}_1)\xi\Big)(\lambda) = \exp\Big\{i\,\Re Tr[z'B'\lambda m_1]\Big\}\xi(\lambda),\\ \Big(\Pi'(\widehat{m}_2)\xi\Big)(\lambda) = \exp\Big\{i\,\Re Tr[z'(I_j - B')\lambda m_2]\Big\}\xi(\lambda).\end{gathered} \tag{4.34}$$

Затем антиунитарную изометрию $\mathcal{J}_\varphi$, определенную в условии леммы 4.8, будем рассматривать на всем пространстве $L^2(\Lambda_{k(\varphi)}, \nu_{k(\varphi)})$. Вообще говоря, $\mathcal{J}_\varphi$ и $\mathcal{J}_{\hat\varphi}$ не совпадают (см. (4.31)). Справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.15. *В пространстве $L^2(\Lambda_{k(\varphi)}, \nu_{k(\varphi)})$ для всех $g_1, g_2 \in G(\mathbb{C}) \subset G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})$ имеют место следующие свойства:*

$$\begin{gathered}\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(g_1)\mathcal{J}_\varphi\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(g_2)\mathcal{J}_\varphi = \hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(g_1)\mathcal{J}_{\hat\varphi}\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(g_2)\mathcal{J}_{\hat\varphi} = \hat\Pi_\varphi^{(2)}(g_1, g_2),\\ \mathcal{J}_\varphi\mathcal{J}_{\hat\varphi} \in \Big\{\hat\Pi_\varphi^{(2)}(G(\mathbb{C})\,\times\,G(\mathbb{C}))\Big\}'.\end{gathered} \tag{4.35}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Принимая во внимание утверждение леммы 4.13 и используя обозначения, принятые в (4.20), достаточно проверить соотношение (4.35) на векторах вида $\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(g)\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}((e, m_1))\xi_0$, где $g \in G(\mathbb{C})$, $(e, m_1) \in e\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})$.

Так как $\mathcal{J}_{\hat\varphi}\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(g_2)\mathcal{J}_{\hat\varphi} \in \Big\{\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}\Big(G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})\Big)\Big\}'$, то

$$\begin{aligned}&\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(g_1)\mathcal{J}_{\hat\varphi}\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(g_2)\mathcal{J}_{\hat\varphi}\Big\{\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(g)\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}((e, m_1))\xi_0\Big\}\\ &= \hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(g_1)\Big\{\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(g)\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}((e, m_1))\Big\}\mathcal{J}_{\hat\varphi}\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(g_2)\mathcal{J}_{\hat\varphi}\xi_0\\ &\overset{(4.31)}{=} \hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(g_1)\Big\{\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(g)\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}((e, m_1))\Big\}\mathcal{J}_\varphi\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(g_2)\mathcal{J}_\varphi\xi_0\\ &= \hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(g_1)\mathcal{J}_\varphi\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(g_2)\mathcal{J}_\varphi\Big\{\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(g)\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}((e, m_1))\xi_0\Big\}.\end{aligned}$$

Последнее равенство в этих соотношениях проверяется непосредственно с использованием (4.13), (4.20) и вида $\mathcal{J}_\varphi$ (см. условие леммы 4.8).

Отсюда, полагая $g_1 = e$, получаем $\mathcal{J}_\varphi\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(g_2)\mathcal{J}_\varphi = \mathcal{J}_{\hat\varphi}\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(g_2)\mathcal{J}_{\hat\varphi}\ \forall\, g_2 \in G(\mathbb{C})$. Так как $\mathcal{J}_\varphi^2 = I$ (см. лемму 4.10) и $\mathcal{J}_{\hat\varphi}^2 = I$ по определению, то

$$\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(g_2) = \mathcal{J}_\varphi\mathcal{J}_{\hat\varphi}\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(g_2)\mathcal{J}_{\hat\varphi}\mathcal{J}_\varphi = \mathcal{J}_{\hat\varphi}\mathcal{J}_\varphi\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(g_2)\mathcal{J}_\varphi\mathcal{J}_{\hat\varphi}.$$

Следовательно, $\mathcal{J}_\varphi\mathcal{J}_{\hat\varphi}$, $\mathcal{J}_{\hat\varphi}\mathcal{J}_\varphi \in \left\{\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(G(\mathbb{C}))\right\}'$. Отсюда легко вытекают включения

$$\mathcal{J}_\varphi\Big\{\mathcal{J}_\varphi\mathcal{J}_{\hat\varphi}\Big\}\mathcal{J}_\varphi = \mathcal{J}_{\hat\varphi}\mathcal{J}_\varphi \in \Big\{\mathcal{J}_\varphi\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(G(\mathbb{C}))\mathcal{J}_\varphi\Big\}', \tag{4.36}$$

$$\mathcal{J}_\varphi\Big\{\mathcal{J}_{\hat\varphi}\mathcal{J}_\varphi\Big\}\mathcal{J}_\varphi = \mathcal{J}_\varphi\mathcal{J}_{\hat\varphi} \in \Big\{\mathcal{J}_\varphi\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}(G(\mathbb{C}))\mathcal{J}_\varphi\Big\}'. \tag{4.37}$$

Теперь утверждение леммы 4.15 следует из определения представлений $\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{l})}$, $\hat\Pi_\varphi^{(\mathfrak{r})}$, и $\hat\Pi_\varphi^{(2)}$ (см. (4.2)–(4.4), (4.13), (4.20)).

Из леммы 4.15 и теоремы 4.7 получаем важное

Следствие 4.16. *Переходя в случае необходимости к унитарно эквивалентному представлению, можно считать, что для параметров представления Π' (см. (4.33)–(4.34)) справедливы соотношения $j = k(\varphi) = 2l$, $A' = A$, $B' = B$ и $z' = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12}\end{bmatrix}$, где z_{11} и z_{12} — $l \times l$-матрицы.*

Лемма 4.17. *Существует унитарная матрица $w \in U(B, A) = \big\{u \in U(k(\varphi)) : [u, B] = [u, A] = 0\big\}$ такая, что*

$$z'Bw = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_l & 0 \\ X & 0\end{bmatrix} w = \begin{bmatrix} I_l & 0\end{bmatrix}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $X_2 = \{0, 1\}$, $F(X_2)$ — множество комплексных функций на X_2 и $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x = 1.\end{cases}$ Если отождествить естественно $G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C}) \times G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})$ с группой $G(F(X_2))\ltimes M_\infty^{(l)}(F(X_2))$ функций на $X_2 = \{0, 1\}$ со значениями в $G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})$, то простая проверка показывает, что $\hat\Pi_\varphi^{(2)} = \Pi^{\hat\chi}_{A,\hat\kappa,\hat z}$, где $\hat\kappa(f) = 2B - I_{k(\varphi)}$, $\hat z = \left[I_l + \frac{vX}{\sqrt{I_l + X^2}} \quad -\frac{v}{\sqrt{I_l + X^2}}\right]$, $\hat\chi = \chi_\varphi$ (см. теорему 2.14, (4.13), (4.20)).

Обозначим через ϱ гомоморфизм $G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C}) \times G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})$ на свою подгруппу, определяемый отображением:

$$(g_1, h_1) \times (g_2, h_2) \xrightarrow{\varrho} (g_1, h_1) \times (g_2, 0).$$

В силу леммы 4.15 представления $\hat\Pi_\varphi^{(2)} \circ \varrho$ (см. (4.20)) и $\widetilde\Pi^{(2)} \circ \varrho$ группы $G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C}) \times G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})$ совпадают. Отсюда и из унитарной эквивалентности $\widetilde\Pi^{(2)}$ и Π' следует унитарная эквивалентность $\hat\Pi_\varphi^{(2)} \circ \varrho$ и $\Pi' \circ \varrho$. Но $\hat\Pi_\varphi^{(2)} \circ \varrho = \Pi^{\hat\chi}_{A,\hat\kappa,\hat zB}$ и $\Pi' \circ \varrho = \Pi^{\hat\chi}_{A,\hat\kappa,z'B}$. Теперь, применяя к представлениям $\Pi^{\hat\chi}_{A,\hat\kappa,\hat zB}$ и $\Pi^{\hat\chi}_{A,\hat\kappa,z'B}$ утверждение теоремы 4.14, получаем существование $w \in U(B, A)$, для которого $z'Bw = \hat zB = \begin{bmatrix} I_l & 0\end{bmatrix}$. Лемма 4.17 доказана.

Пусть w — унитарная матрица, удовлетворяющая лемме 4.17. В пространстве $L^2(\Lambda_{k(\varphi)},\nu_{k(\varphi)})$ рассмотрим унитарный оператор W, индуцированный левым умножением на w: $(W\xi)(\lambda)=\xi(w\lambda)$. Положим $\Pi'_w(g)=W\Pi'(g)W^*$ $\forall\, g\in G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})\times G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})$ (см. (4.33)–(4.34)).

Лемма 4.18. *Пусть параметры представления* Π' *удовлетворяют условиям утверждения 4.16. Тогда* $\widetilde{\Pi}^{(2)}(g)=\Pi'_w(g)$ $\forall\, g\in G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})\times G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соотношений (4.31)–(4.32), опираясь на утверждение леммы 4.17, получаем, что

$$\widetilde{\Pi}^{(2)}(g)=\Pi'_w(g)\ \ \forall\, g\in G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})\ \times\ G(\mathbb{C})\ltimes 0\ \Leftrightarrow\ \Pi'_w\circ\varrho=\widetilde{\Pi}^{(2)}\circ\varrho.$$

Теперь, используя теорему 3.4 и лемму 4.12, легко проверяем, что коммутант представления $\Pi'_w\circ\varrho=\widetilde{\Pi}^{(2)}\circ\varrho$ тривиален. Отсюда и из унитарной эквивалентности Π'_w и $\widetilde{\Pi}^{(2)}$ вытекает утверждение леммы 4.18.

В силу лемм 4.17, 4.18 $\widetilde{\Pi}^{(2)}=\Pi^{\hat{\chi}}_{A,\hat{\kappa},z'w}$, где параметры $\hat{\kappa}$ и $\hat{\chi}$ определены в доказательстве леммы 4.17. Поэтому, опираясь на утверждение теоремы 4.14 и используя метод обоснования лемм 4.8 и 4.10, можно получить следующее

Предложение 4.19. *Существует унитарная матрица* $u_{\hat{\varphi}}\in U_{k(\varphi)}(\mathbb{C})$ *со свойствами:*

a) $(\mathcal{J}_{\hat{\varphi}}\xi)(\lambda)=\bar{\xi}(u_{\hat{\varphi}}\lambda)$;

b) $u_{\hat{\varphi}}=\begin{bmatrix}-\frac{v'X}{\sqrt{I+X^2}} & \frac{v'}{\sqrt{I+X^2}}\\ \frac{v'}{\sqrt{I+X^2}} & \frac{v'X}{\sqrt{I+X^2}}\end{bmatrix}$, *где* $v'\in U_l(\mathbb{C})$, $(v')^2=I_l$, $[v',X]=0$;

c) $u_{\hat{\varphi}}Au_{\hat{\varphi}}^*=-A$, $u_{\hat{\varphi}}Bu_{\hat{\varphi}}^*=I_{k(\varphi)}-B$, $z'wu_{\hat{\varphi}}=-z'w$.

В заключение сформулируем утверждение, которое будет играть важную роль в следующем разделе.

Теорема 4.20. *Пусть* φ *— н.у.и. КМШ-состояние на* $G(\mathbb{C})$. *Тогда существует четное натуральное число* $k(\varphi)=2l$, *однозначно определяемое по* φ, *со свойствами:*

a) φ *расширяется до н.у.и. КМШ-состояния* $\hat{\varphi}$ *на* $G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})$;

b) если $\Pi_{\hat{\varphi}}$ *— ГНС-представление группы* $G(\mathbb{C})\ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})$, *построенное по* $\hat{\varphi}$, $\mathcal{J}_{\hat{\varphi}}$ *и* $\Delta_{\hat{\varphi}}$ *— соответствующие антиунитарная изометрия и модулярный оператор, то сферическое неприводимое представление* $\widetilde{\Pi}^{(2)}$ *группы*

$G(\mathbb{C}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C}) \times G(\mathbb{C}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})$, *определяемое операторами* $\Pi_{\hat\varphi}(g_1)\mathcal{J}_{\hat\varphi}\Pi_{\hat\varphi}(g_2)\mathcal{J}_{\hat\varphi}$, *унитарно эквивалентно представлению* $\Pi^{\hat\chi}_{A,\hat\kappa,\hat z}$, *где*

$$\hat z = z'w = \left[I_l + \frac{v'X}{\sqrt{I+X^2}} \quad -\frac{v'}{\sqrt{I+X^2}} \right],$$

а $\hat\kappa$ *и* $\hat\chi$ *определены в доказательстве леммы 4.17;*

c) $\left[\Pi^{\hat\chi}_{A,\hat\kappa,\hat z}\left(G(\mathbb{C}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C}) \times e\right)\xi_0\right] = L^2\left(\Lambda_{k(\varphi)}, \nu_{k(\varphi)}\right)$, *где* e *— единица группы* $G(\mathbb{C}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})$;

d) подпространство $\left[\Pi^{\hat\chi}_{A,\hat\kappa,\hat z}(G(\mathbb{C}) \times e)\,\xi_0\right] = \left[\Pi^{\hat\chi}_{A,\hat\kappa,\hat z}(e \times G(\mathbb{C}))\,\xi_0\right]$ *инвариантно относительно* $\mathcal{J}_{\hat\varphi}$ *и* $\Delta_{\hat\varphi}$;

e) существует унитарная матрица $u_{\hat\varphi} \in U_{k(\varphi)}(\mathbb{C})$ *вида*

$$u_{\hat\varphi} = \begin{bmatrix} -\frac{v'X}{\sqrt{I+X^2}} & \frac{v'}{\sqrt{I+X^2}} \\ \frac{v'}{\sqrt{I+X^2}} & \frac{v'X}{\sqrt{I+X^2}} \end{bmatrix},$$

где $v' \in U_l(\mathbb{C})$, $(v')^2 = I_l$, $[v', X] = 0$, $X \geq 0$, *для которой* $(\mathcal{I}_{\hat\varphi}\xi)(\lambda) = \bar\xi(u_{\hat\varphi}\lambda)\ \forall\, \xi \in L^2\left(\Lambda_{k(\varphi)}, \nu_{k(\varphi)}\right)$;

f) если отождествить естественно $G(\mathbb{C}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C}) \times G(\mathbb{C}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})$ *с группой* $G(F(X_2)) \ltimes M_\infty^{(l)}(F(X_2))$ *функций на* $X_2 = \{0,1\}$ *со значениями в* $G(\mathbb{C}) \ltimes M_\infty^{(l)}(\mathbb{C})$ *и положить* $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0 \\ -1, & \text{если } x = 1 \end{cases}$, $B = \frac{\hat\kappa(f) + I_{k(\varphi)}}{2}$, *то* $u_{\hat\varphi} A u_{\hat\varphi}^* = -A$, $u_{\hat\varphi} B u_{\hat\varphi}^* = I_{k(\varphi)} - B$.

Список литературы

[1] *А.А. Кириллов*, Представления бесконечномерной унитарной группы. — *Докл. АН СССР* (1973), т. 212, с. 288–290.

[2] *Г.И. Ольшанский*, Унитарные представления бесконечномерных классических групп $U(p,\infty)$, $SO_0(p,\infty)$, $Sp(p,\infty)$ и соответствующих групп движений. — *Функц. анализ и его прил.* (1978), т. 12, № 3, с. 32–44.

[3] *Г.И. Ольшанский*, Унитарные представления бесконечномерных пар (G,K) и формализм Р. Хау. — *Докл. АН СССР* (1983), т. 269, № 3, с. 33–36.

[4] *Г.И. Ольшанский*, Конструкция унитарных представлений бесконечномерных классических групп. — *Докл. АН СССР* (1980), т. 250, № 3, с. 284–288.

[5] *Г.И. Ольшанский*, Метод голоморфрых расширений в теории унитарных представлений бесконечномерных классических групп. — *Функц. анализ и его прил.* (1988), т. 22, № 4, с. 23–37.

[6] *А.М. Вершик, С.В. Керов*, Характеры и фактор представления бесконечной унитарной группы. — *Докл. АН СССР* (1982), т. 267, № 2, с. 272–276.

[7] *Н.И. Нессонов*, Описание представлений группы обратимых операторов гильбертова пространства, содержащих единичное представление унитарной подгруппы. — *Функц. анализ и его прил.* (1983), т. 17, № 1, с. 79–80.

[8] *Н.И. Нессонов*, Полная классификация представлений $GL(\infty)$, содержащих единичное представление унитарной подгруппы. — *Мат. сб.* (1986), т. 130, № 2, с. 131–150.

[9] *Н.И. Нессонов*, Полное описание неразложимых сферических функций на бесконечномерной группе движений. — *Докл. АН СССР* (1987), т. 6, с. 7–9.

[10] *Н.И. Нессонов*, Описание допустимых представлений бесконечномерных матричных групп с коэффициентами в конечномерной алгебре. — *Функц. анализ и его прил.* (1992), т. 26, с. 2.

[11] *N.I. Nessonov*, Representations of infinite-dimensional matrix groups and associated dynamical systems. Operator algebras and operator theory. In: Proc. OATE 2 Conf., Romania (1989); Longman Group UK Limited 1992.

[12] *N.I. Nessonov*, A complete classification of the admissible representations of infinite-dimensional classical matrix groups. Preprint, Internet, http://xxx.lanl.gov/find./funct-an./9704002

[13] *O. Brateli and D.W. Robinson*, Operator algebras and quantum statistical mechanics. V. 2. States in Quantum Statistical Mechanics. Models of Quantum Statistical Mechanics. Springer-Verlag, Berlin (1987).

[14] *Takesaki M.*, Tomitas theory of modular Hilbert algebras and its applications. — *Lect. Notes Math.* v. 128. Springer-Verlag, Berlin (1972).

Factor-representation of the group $GL(\infty)$ and admissible representations $GL(\infty)^X$

N.I. Nessonov

This article is the second part of the work in which classification of factor-representations of group $GL(\infty)$ is given. The criterium of unitary equivalence of spherical representations of the group $\left(GL(\infty)^X\right)$ functions on finite set X with values in $GL(\infty)$ in terms of their parameters is received here. A conformity between factor-representations of group $GL(\infty)$ and spherical representations of group $\left(GL(\infty)^X\right)$ is constructed. The design of continuation on the group of motions which corresponds to group $\left(GL(\infty)^X\right)$ is given for the received spherical representations.