Математическая физика, анализ, геометрия
2004, т. 11, № 1, с. 3–24

О восстановлении двумерной замкнутой поверхности в E^4 по заданному замкнутому грассманову образу

Ю.А. Аминов, В.А. Горькавый, А.В. Святовец

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины пр. Ленина, 47, Харьков, 61103, Украина

E-mail:aminov@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 15 апреля 2002 г.

Изучается задача восстановления двумерной замкнутой поверхности специального вида в четырехмерном евклидовом пространстве по заданному замкнутому грассманову образу.

Вивчається задача відновлення двовимірної замкненої поверхні спеціального вигляду в чотиривимірному євклідовому просторі за заданим замкненим грасмановим образом.

Введение

Работа посвящена проблеме восстановления подмногообразия в евклидовом пространстве по заданному грассманову образу. Ранее эта проблема рассматривалась либо локально, либо для односвязных областей. Например, в работе [1] было доказано, что если для регулярной поверхности Γ^2 в грассмановом многообразии $G_{2,4}$ секционная кривизна $\bar{K}$ многообразия $G_{2,4}$ вдоль касательной плоскости к Γ^2 в точке p отлична от 1, то тогда некоторая окрестность точки p на Γ^2 является грассмановым образом некоторой регулярной поверхности F^2 евклидова пространства E^4. Аналогичные результаты для односвязных областей получены в [2, 3], см. также [4]. Однако в том, что касается восстановления *замкнутой* поверхности по заданному *замкнутому* грассманову образу, то до нынешнего момента каких-либо общих утверждений доказано не было, т.к. здесь задача оказывается значительно сложнее. С аналитической точки зрения проблема восстановления сводится к решению системы линейных дифференциальных уравнений в частных

Mathematics Subject Classification 2000: 53A07.

*Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования и науки Украины.

производных или к одному линейному дифференциальному уравнению второго порядка в частных производных, коэффициенты которого определяются заданной поверхностью Γ^2. При этом замечательным является тот факт, что тип уравнения как раз характеризуется значением кривизны $\bar{K}$, и если $\bar{K} \neq 1$, то уравнение будет либо гиперболическим, либо эллиптическим. Если же рассматривать восстановление замкнутой поверхности, то в общем случае задача сводится к трудной проблеме нахождения решения "в целом" линейного дифференциального уравнения второго порядка смешанного типа.

В данной работе мы рассматриваем один специальный класс замкнутых поверхностей в $G(2,4)$. Поверхность Γ^2 из этого класса обладает такими особыми свойствами, что поиск замкнутой поверхности $F^2 \subset E^4$, для которой Γ^2 была бы грассмановым образом, сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям, что существенно облегчает анализ ситуации. Для того чтобы описать упомянутый класс поверхностей Γ^2, используем стандартное представление $G_{2,4}$ в виде произведения двух двумерных сфер $S_1^2 \times S_2^2$. Произвольную точку $p \in G_{2,4}$ запишем в виде (p_1, p_2), где $p_i \in S_i^2$. Поверхность Γ^2 естественно задавать с помощью ее проекций на сферы S_i^2. Предположим, что поверхность Γ^2 при проекции на S_2^2 отображается в линию — дугу некоторой большой окружности. Также будем предполагать, что если взять прообраз любой точки этой дуги, представляющий собой замкнутую кривую или набор замкнутых кривых на Γ^2, то при проекции на S_1^2 он отображается на малую окружность из фиксированного семейства параллельных окружностей. Назовем такую Γ^2 *поверхностью с вырожденной проекцией.* Отметим, что Γ^2 является поверхностью вращения.

Основным вопросом является построение *замкнутой поверхности* в E^4, для которой заданная *замкнутая поверхность с вырожденной проекцией* в $G(2,4)$ была бы грассмановым образом. Мы исследуем возможность восстановления поверхностей двух типов — гомеоморфных сфере и тору. В первом разделе работы представлено локальное решение задачи восстановления: *указываются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы заданная регулярная поверхность с вырожденной проекцией* Γ^2 *в* $G_{2,4}$ *была локально грассмановым образом некоторой регулярной поверхности вращения* F^2 *в* E^4*, причем найдено конкретное выражение радиус-вектора* F^2 *в терминах функций, задающих* Γ^2. Как один из выводов, отметим, что в ситуации общего положения поверхность с вырожденной проекцией в $G(2,4)$ локально является грассмановым образом некоторой поверхности вращения в E^4.

Во втором и третьем разделах работы в теоремах 2 и 3 устанавливается возможность распространить полученные локальные условия на случай восстановления "в целом" замкнутых поверхностей вращения в E^4, гомеоморфных сфере и тору, по заданному замкнутому грассманову образу с вырожденной проекцией. А именно, *доказываются необходимые и достаточные* *аналитические условия того, что заданная замкнутая регулярная поверхность с вырожденной проекцией Γ^2 в $G_{2,4}$ является грассмановым образом некоторой регулярной поверхности вращения F^2 в E^4, гомеоморфной сфере или тору.*

Если грассманов образ замкнутой поверхности $F^2 \subset E^4$ является поверхностью с вырожденной проекцией, то должны быть выполнены определенные топологические условия. В частности, если $F^2 \subset E^4$ гомеоморфна сфере, то ее грассманов образ должен обладать свойством "двулистности" и обязательно будет содержать особые точки "ветвления". Подобные факты являются следствием общих утверждений топологического характера, которые обсуждаются в заключительном, четвертом разделе работы.

1. Локальное решение

Грассманово многообразие $G_{2,4}$ состоит из ориентированных двумерных плоскостей, проходящих через фиксированную точку O в 4-мерном евклидовом пространстве E^4. Это — аналитическое многообразие, обладающее естественной римановой структурой глобально симметрического риманова пространства [4].

Рассмотрим стандартное вложение многообразия $G_{2,4}$ в 6-мерное евклидово пространство E^6. Именно, пусть $p^{12}, p^{13}, p^{14}, p^{23}, p^{24}, p^{34}$ — набор плюккеровых координат двумерной плоскости в E^4. Хорошо известно, что они удовлетворяют следующим двум уравнениям:

$$\sum_{i<j} (p^{ij})^2 = 1, \quad p^{12}p^{34} + p^{13}p^{42} + p^{14}p^{23} = 0. \tag{1}$$

Данные уравнения задают стандартное вложение $G_{2,4}$ в E^6. Введем в E^6 координаты ξ^i и η^i формулами

$$\begin{aligned} &\xi^1 = p^{12} + p^{34}, \quad \xi^2 = p^{13} + p^{42}, \quad \xi^3 = p^{14} + p^{23}, \\ &\eta^1 = p^{12} - p^{34}, \quad \eta^2 = p^{13} - p^{42}, \quad \eta^3 = p^{14} - p^{23}. \end{aligned} \tag{2}$$

Уравнения (1) с помощью введенных таким образом величин переписываются в следующем виде:

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 = 1, \quad (\eta^1)^2 + (\eta^2)^2 + (\eta^3)^2 = 1.$$

Эти уравнения задают единичные сферы S_i^2 в двух трехмерных, ортогональных друг другу подпространствах. Каждой точке из грассманова многообразия $G_{2,4}$ соответствует точка на каждой S_i^2, которую будем называть проекцией. Введем координаты на сферах S_i^2 следующими формулами:

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \sin\omega \\ \sin\theta \cos\omega \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi \cos\psi \\ \sin\psi \\ \sin\phi \cos\psi \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Величины $\theta, \omega, \phi, \psi$ можно принять за локальные координаты на $G_{2,4}$.

Рассмотрим специальную поверхность $\Gamma^2 \subset G_{2,4}$, задавая ее с помощью проекций на сферы S_i^2. Во-первых, будем предполагать, что Γ^2 при проекции в сферу S_2^2 отображается в некоторую большую окружность $C^1 \subset S_2^2$. Во-вторых, предположим, что набор кривых и изолированных точек на Γ^2, составляющих прообраз точки окружности C^1, при проекции в S_1^2 отображаются в некоторую окружность из фиксированного семейства параллельных окружностей на S_1^2 (см. рис. 1). Поверхность Γ^2 с такими специальными свойствами будем называть *поверхностью с вырожденной проекцией.*

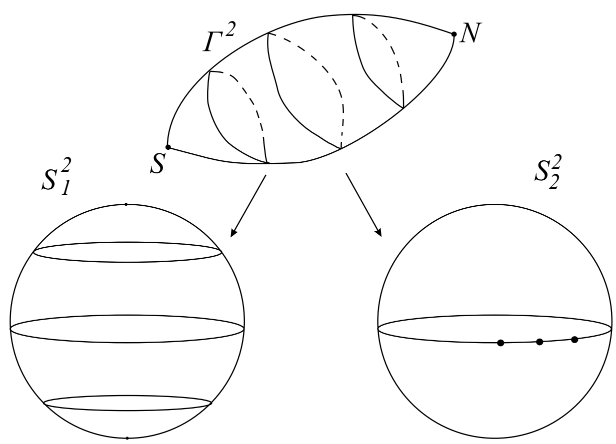

Рис.1

Выясним, как поверхность с вырожденной проекцией задается аналитически в терминах $\theta, \omega, \phi, \psi$. Не уменьшая общности можно считать, что окружность $C^1 \subset S_2^2$ задается уравнением $\eta^2 = 0$, т.е. $\psi = 0$. Точке этой окружности соответствует значение параметра ϕ. В свою очередь, можно считать, что фиксированное выше семейство параллельных окружностей на S_1^2 задается уравнением $\theta = const$. Тогда задание нашей поверхности Γ^2 сводится к заданию ϕ как функции от θ, либо, более общо, заданию θ и ϕ как функций одного параметра $t \in (a, b)$:

$$\theta = \theta(t), \quad \phi = \phi(t).$$

Как следствие, радиус-вектор поверхности с вырожденной проекцией Γ^2 запишется так:

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t)\ \sin\omega \\ \sin\theta(t)\ \cos\omega \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi(t) \\ 0 \\ \sin\phi(t) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Несложно убедиться в том, что условие регулярности заданной таким образом Γ^2 будет иметь вид

$$\left((\theta')^2 + (\phi')^2\right)\sin^2\theta \neq 0. \tag{5}$$

Отметим также, что поверхность $\Gamma^2 \subset G_{2,4}$ получается вращением кривой $L \subset E^6$ с радиус-вектором

$$\begin{array}{ll} \xi^1 = \cos\theta(t), & \eta^1 = \cos\phi(t), \\ \xi^2 = \sin\theta(t), & \eta^2 = 0, \\ \xi^3 = 0, & \eta^3 = \sin\phi(t), \end{array} \tag{6.1}$$

где соответствующую вращению в E^6 матрицу из $SO(6)$ можно записать относительно $\xi^1, \dots, \eta^3$ в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\omega & -\cos\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

Рассмотрим теперь локальное решение задачи восстановления поверхности по заданному грассманову образу с вырожденной проекцией, т.е. найдем регулярную поверхность F^2 в E^4, чей грассманов образ локально совпадал бы с заданной выше $\Gamma^2 \subset G_{2,4}$. Так как поверхность Γ^2 имеет специальный вид, то искомую поверхность F^2 в E^4 естественно искать тоже в некотором специальном классе поверхностей. А именно, будем искать поверхность F^2, имеющую следующее параметрическое представление:

$$r(t,\alpha) = \begin{pmatrix} f(t)\cos\alpha \\ f(t)\sin\alpha \\ g(t)\cos\alpha \\ g(t)\sin\alpha \end{pmatrix}, \quad t_a < t < t_b, \quad \alpha_a \le \alpha \le \alpha_b, \tag{7}$$

где $f(t)$ и $g(t)$ — некоторые C^2-гладкие функции. Обозначим

$$\lambda^2 = ((f^{'})^2 + (g^{'})^2)(f^2 + g^2).$$

Легко проверить, что поверхность F^2 регулярна тогда и только тогда, когда $\lambda \neq 0$.

Обозначим через l кривую в плоскости с координатами x^1, x^3, заданную радиус-вектором $x^1 = f(t), x^3 = g(t)$; в качестве параметра t можем взять, например, длину дуги s кривой l. Тогда поверхность F^2 с геометрической точки зрения получается вращением кривой l в E^4 вокруг начала координат O, а вращение задается следующей матрицей из $SO(4)$:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Если l сделает полный оборот на 2π, получим цилиндрическую поверхность в E^4, граница которой будет состоять из двух окружностей радиусов $\sqrt{f^2(a)+g^2(a)}$ и $\sqrt{f^2(b)+g^2(b)}$ с центром в точке O.

Найдем грассманов образ такой поверхности. Радиус-вектор грассманова образа будем искать в виде

$$\vec{p} = \frac{[\partial_t r, \partial_\alpha r]}{|[\partial_t r, \partial_\alpha r]|}.$$

Находим выражения для производных касательных векторов поверхности F^2:

$$\partial_t r = \begin{pmatrix} f' \cos\alpha \\ f' \sin\alpha \\ g' \cos\alpha \\ g' \sin\alpha \end{pmatrix}, \quad \partial_\alpha r = \begin{pmatrix} -f\sin\alpha \\ f\cos\alpha \\ -g\sin\alpha \\ g\cos\alpha \end{pmatrix}$$

и далее получаем, что

$$p^{12} = \frac{f' f}{\lambda}, \quad p^{13} = \frac{fg' - f'g}{\lambda}\cos\alpha\sin\alpha,$$

$$p^{14} = \frac{f'g\cos^2\alpha + g'f\sin^2\alpha}{\lambda}, \quad p^{23} = -\frac{f'g\sin^2\alpha + g'f\cos^2\alpha}{\lambda},$$

$$p^{24} = \frac{f'g - fg'}{\lambda}\cos\alpha\sin\alpha, \quad p^{34} = \frac{g'g}{\lambda}.$$

Введем два угла γ и σ с помощью следующих равенств:

$$\frac{f}{\sqrt{f^2+g^2}} = \cos\gamma, \quad \frac{g}{\sqrt{f^2+g^2}} = \sin\gamma, \tag{8.1}$$

$$\frac{f'}{\sqrt{f'^2+g'^2}} = \cos\sigma, \quad \frac{g'}{\sqrt{f'^2+g'^2}} = \sin\sigma. \tag{8.2}$$

Очевидно, γ и σ — углы, которые составляют соответственно радиус-вектор и касательный вектор кривой l с осью x^1 (см. рис. 2). С помощью этих углов радиус-вектор грассманова образа можно записать в следующем виде:

$$p^{12} = \cos\sigma\cos\gamma, \quad p^{14} = \cos\sigma\sin\gamma\cos^2\alpha + \sin\sigma\cos\gamma\sin^2\alpha,$$

$$p^{34} = \sin\sigma\sin\gamma, \quad p^{23} = -\cos\sigma\sin\gamma\sin^2\alpha - \sin\sigma\cos\gamma\cos^2\alpha,$$
$$p^{13} = \sin(\sigma-\gamma)\cos\alpha\sin\alpha, \quad p^{24} = \sin(\gamma-\sigma)\cos\alpha\sin\alpha.$$

Найдем проекции грассманова образа на сферы S_1^2 и S_2^2. После элементарных вычислений, используя (2), получаем

$$\xi = \begin{pmatrix} \cos(\gamma-\sigma) \\ \sin(\gamma-\sigma)\sin(-2\alpha) \\ \sin(\gamma-\sigma)\cos(-2\alpha) \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \cos(\sigma+\gamma) \\ 0 \\ \sin(\sigma+\gamma) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Легко видеть, что грассманов образ F^2 является как раз поверхностью с вырожденной проекцией. Более того, сравнивая выражения (9) векторов ξ и η с выражениями (4), получаем, не уменьшая общности, что грассманов образ рассматриваемой поверхности F^2 совпадет с заданной поверхностью Γ^2 в том и только в том случае, когда

$$\gamma - \sigma = \theta, \quad \sigma + \gamma = \phi, \tag{10.1}$$

$$\omega = -2\alpha. \tag{10.2}$$

Эти равенства, связывающие углы γ, σ, α и θ, ϕ, ω, являются выражением двойственности между поверхностями $F^2 \subset E^4$ и $\Gamma^2 \subset G(2,4)$. Заметим, что угол $-\theta$ равен углу между радиус-вектором и касательным вектором кривой l.

Из (10.2) получаем, что $\alpha = -\omega/2$. Что касается условий (10.1), то они приобретают вид

$$\gamma = \frac{\theta+\phi}{2}, \quad \sigma = \frac{\phi-\theta}{2}. \tag{11}$$

Правые стороны этих равенств являются заданными функциями от θ (или, в более общем случае, от t). Подставляя найденные выражения для γ и σ в (8), получим набор из четырех уравнений для нахождения функций $f(t)$ и $g(t)$. Первые два уравнения системы (8) разрешаются следующим образом:

$$f = \rho\cdot\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right), \quad g = \rho\cdot\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right), \tag{12}$$

где $\rho = \rho(t)$ – произвольная функция. Условия на ρ накладывают третье и четвертое уравнения системы (8), имеющие вид:

$$\frac{f'}{\sqrt{f'^2+g'^2}} = \cos\left(\frac{\phi-\theta}{2}\right), \quad \frac{g'}{\sqrt{f'^2+g'^2}} = \sin\left(\frac{\phi-\theta}{2}\right). \tag{13}$$

Подставляя выражения (12) в уравнения (13), после несложных вычислений получаем, что функция $\rho(t)$ должна удовлетворять системе

$$\frac{\rho'}{\sqrt{(\rho')^2 + \rho^2\left(\frac{\theta'+\phi'}{2}\right)^2}} = \cos\theta, \tag{14.1}$$

$$\frac{\rho\left(\dfrac{\theta'+\phi'}{2}\right)}{\sqrt{(\rho')^2+\rho^2\left(\dfrac{\theta'+\phi'}{2}\right)^2}} = -\sin\theta. \tag{14.2}$$

В результате получаем, что искомая функция ρ должна удовлетворять следующему уравнению:

$$\rho'\sin\theta+\rho\left(\frac{\theta'+\phi'}{2}\right)\cos\theta = 0. \tag{15}$$

Кроме того, необходимо учитывать и условие регулярности восстанавливаемой поверхности, $\lambda\neq 0$, которое вследствие (12) принимает вид

$$\rho^2\left((\rho')^2+\rho^2\left(\frac{\theta'+\phi'}{2}\right)^2\right)\neq 0. \tag{16}$$

В случае, когда $\sin\theta$ и $\theta'+\phi'$ не обращаются в нуль при $t\in(a,b)$, решением уравнения (15) будет функция

$$\rho = C\,e^{-\int\limits_{t_0}^{t} ctg\theta\,\gamma'\,dt}, \quad \text{где} \quad \gamma=\frac{(\theta+\phi)}{2};$$

здесь C — отличная от нуля постоянная, а t_0 — произвольно зафиксированная точка из (a,b). Такая функция ρ будет решением и системы (14), если постоянная C выбрана так, что $sign\left(C(\theta'+\phi')\right) = -sign(\sin\theta)$. Заметим, что интеграл в выражении для ρ является определенным при любом $t\in(a,b)$, поэтому функция ρ не обращается в нуль. Как следствие, будет выполнено условие регулярности (16).

Подставляя найденную функцию ρ в (12), получаем следующее представление для локального решения рассматриваемой задачи:

$$f = C\,e^{-\int\limits_{t_0}^{t} ctg\theta\,\frac{\phi'+\theta'}{2}dt}\cos\frac{\phi+\theta}{2}, \tag{17.1}$$

$$g = C\,e^{-\int\limits_{t_0}^{t} ctg\theta\,\frac{\phi'+\theta'}{2}dt}\sin\frac{\phi+\theta}{2}. \tag{17.2}$$

Очевидно, что если $\theta(t), \phi(t)$ являются гладкими класса C^k, то найденные функции f и g тоже будут C^k гладкими.

Итак, по заданным функциям $\theta(t)$ и $\phi(t)$ мы восстановили функции $f(t)$ и $g(t)$. Кроме того, $\alpha = -\omega/2$. Подставляя найденные функции в (7), получаем C^k-гладкое параметрическое представление регулярной поверхности вращения $F^2 \subset E^4$, чей грассманов образ совпадает с заданной поверхностью с вырожденной проекцией $\Gamma^2 \subset G_{2,4}$. Выбор постоянной C соответствует гомотетии F^2 в E^4. Таким образом, для рассматриваемой задачи восстановления поверхности по заданному грассманову образу с вырожденной проекцией получено локальное решение.

Теорема 1. *Пусть имеется регулярная поверхность с вырожденной проекцией $\Gamma^2 \subset G_{2,4}$, заданная радиус-вектором (4), где $\psi = 0$, $\omega \in (\omega_a, \omega_b)$, а $\theta(t), \phi(t) : (a,b) \to R$ — гладкие класса $C^k, k \geq 2$, функции. Предположим, что $\theta(t), \phi(t)$ удовлетворяют следующим условиям:*

1) $\sin\theta(t) \neq 0 \quad \forall t \in (a,b)$*;*

2) $\theta'(t) + \phi'(t) \neq 0 \quad \forall t \in (a,b)$.

Тогда существует C^k-регулярная поверхность $F^2 \subset E^4$, для которой Γ^2 будет грассмановым образом. Эта поверхность задается радиус-вектором (7), где функции f, g имеют вид (17), а $\alpha = -\omega/2$.

Отметим, что если ω пробегает отрезок $[0, 4\pi]$, то $\alpha \in [-2\pi, 0]$, а значит, с топологической точки зрения восстановленная поверхность F^2 представляет собой цилиндр $S^1 \times (a,b)$, который C^k-гладко погружен в E^4. Как отмечалось выше, граница этой цилиндрической поверхности представляет собой две окружности с центром в начале координат $O \in E^4$, радиусы которых равны соответственно $\sqrt{f(a)^2 + g(a)^2}$ и $\sqrt{f(b)^2 + g(b)^2}$.

Выясним геометрический смысл аналитических условий, представленных в теореме 1. Во-первых, из (3) очевидно, что условие $\sin\theta(t) \neq 0$ эквивалентно тому, что поверхность с вырожденной проекцией $\Gamma^2 \subset G(2,4)$ при проекции на S_1^2 не содержит точек, являющихся полюсами соответствующего семейства параллельных окружностей на S_1^2.

Далее, обратимся к условию $\theta'(t) + \phi'(t) \neq 0$. Для каждой точки поверхности Γ^2 найдем секционную кривизну $\overline{K}$ многообразия $G(2,4)$ по площадке, касательной к Γ^2. Прямым вычислением с помощью формул из [3, §8.7] несложно получить, что

$$\overline{K}(t,\omega) = \frac{2(\theta')^2}{(\theta')^2 + (\phi')^2}. \tag{18}$$

Из этой формулы вытекает, что значения $\overline{K}$ зависят только от t, лежат в интервале $[0,2]$ и при этом $\overline{K} = 1$ тогда и только тогда, когда $(\theta')^2 - (\phi')^2 = 0$. Поэтому из условия $\overline{K} \neq 1$ сразу будет следовать, что $\theta'(t) + \phi'(t) \neq 0$.

В свою очередь, сравнение $\overline{K}$ с 1 лежит в основе следующей классификации. А именно, если в точке $P \in \Gamma^2$ кривизна многообразия $G(2,4)$ по площадке, касательной к Γ^2, больше (меньше либо равна) 1, то точка P называется эллиптической (гиперболической либо параболической, соответственно) [1, 3]. Эта общая классификация играет важную роль при изучении различных свойств грассманова образа. В применении к задаче, исследуемой в настоящей работе, получаем, что если поверхность с вырожденной проекцией Γ^2 не содержит параболических точек ($\overline{K} = 1$), то тогда $\theta'(t) + \phi'(t)$ не обращается в нуль.

Таким образом, мы можем дать новую (несколько ослабленную) формулировку теоремы 1.

Теорема 1*. *Пусть имеется регулярная поверхность с вырожденной проекцией* $\Gamma^2 \subset G_{2,4}$, *гладкая класса* C^k, $k \geq 2$. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

1) поверхность Γ^2 *при проекции на* S_1^2 *не содержит точек — полюсов соответствующего семейства параллельных окружностей на* S_1^2*;*

2) поверхность Γ^2 *не содержит параболических точек.*

Тогда существует C^k*-регулярная поверхность вращения* $F^2 \subset E^4$, *для которой* Γ^2 *будет грассмановым образом.*

В завершение этого раздела, найдем выражение для длины дуги s восстанавливаемой кривой l в терминах функций ϕ', θ'. Так как $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{(f')^2 + (g')^2}$, то, принимая во внимание (17), получаем

$$\left|\frac{ds}{dt}\right| = \left|\rho\,\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\theta' + \phi'}{2}\right|. \tag{19}$$

Поэтому, если выполнены условия $\sin\theta(t) \neq 0$ и $\theta'(t) + \phi'(t) \neq 0 \quad \forall t \in (a,b)$, то l регулярно параметризуется параметром t, а сама восстановленная поверхность F^2 регулярно параметризуется координатами t, ω, перенесенными с грассманова образа Γ^2. Напротив, в исключенном нами из рассмотрения случае, когда $\sin\theta$ или $\theta'+\phi'$ обращаются в каких-то точках в нуль, возникают определенные сложности с восстановлением кривой l: может случиться так, что эту кривую уже нельзя будет регулярно параметризовать с помощью t, т.е. ситуация требует дополнительного анализа, который частично и проведем.

Предположим, что $\sin\theta$ и $\theta' + \phi'$ не обращаются в нуль при $t \in (a,b)$, но при приближении к граничной точке выполняется $\lim\limits_{t\to a+0} \sin\theta(t) = 0$ и $\lim\limits_{t\to a+0} \theta' + \phi' \neq 0$. Выясним поведение функции $\rho(t) = Ce^{-\int\limits_{t_0}^{t} ctg\theta\,\frac{\phi'+\theta'}{2}\,dt}$ вблизи

$t = a$. Ясно, что в расматриваемом случае интеграл $\int\limits_{t_0}^{a} ctg\theta \, \frac{\phi'+\theta'}{2} dt$ будет уже расходящимся. Если $\operatorname{sign}\left(ctg\theta\,(\phi'+\theta')\right) \to 1$ при $t \to a$, то этот интеграл будет равен $-\infty$, а значит, $\lim\limits_{t\to a+0} \rho(t) = \pm\infty$. Если же $\operatorname{sign}\left(ctg\theta\,(\phi'+\theta')\right) \to -1$ при $t \to a$, то интеграл будет равен $+\infty$, и следовательно, $\lim\limits_{t\to a+0} \rho(t) = 0$. Таким образом, при сделанном предположении получаем, что начальная точка восстановленной кривой l будет либо на бесконечности, либо в начале координат.

Предположим теперь, что $\sin\theta$ и $\theta'+\phi'$ не обращаются в нуль при $t \in (a,b)$, но $\lim\limits_{t\to a+0} \sin\theta(t) \neq 0$ и $\lim\limits_{t\to a+0} \theta'+\phi' = 0$ при $t \to a+0$. Снова выясним поведение функции $\rho(t) = Ce^{-\int\limits_{t_0}^{t} ctg\theta\,\frac{\phi'+\theta'}{2}\,dt}$ вблизи $t = a$. В расматриваемом случае интеграл $\int\limits_{t_0}^{a} ctg\theta\,\frac{\phi'+\theta'}{2} dt$ будет уже определенным, а значит, $\lim\limits_{t\to a+0} \rho(t)$ равен некоторому числу, отличному от нуля. В то же время, т.к. $\rho' = -\rho\, ctg\theta \left(\dfrac{\theta'+\phi'}{2}\right)$, то в результате сделанных предположений получаем $\lim\limits_{t\to a+0} \rho' = 0$.

Следовательно, и в первом, и во втором рассмотренных случаях в предельной точке $t = a$ будет нарушаться условие регулярности (16).

Предположим, наконец, что $\sin\theta$ и $\theta'+\phi'$ не обращаются в нуль при $t \in (a,b)$, но $\lim\limits_{t\to a+0} \sin\theta(t) = 0$ и $\lim\limits_{t\to a+0} \theta'+\phi' = 0$ одновременно. Поведение функции $\rho(t) = Ce^{-\int\limits_{t_0}^{t} ctg\theta\,\frac{\phi'+\theta'}{2}\,dt}$ вблизи $t = a$ теперь будет зависеть от $\lim\limits_{t\to a+0} \dfrac{\theta'+\phi'}{\sin\theta}$. Если этот предел расходится либо равен нулю, то мы оказываемся в одной из описанных ситуаций. Если же предел конечен и не равен нулю, то интеграл $\int\limits_{t_0}^{a} ctg\theta\,\frac{\phi'+\theta'}{2}\,dt$ будет определенным, а значит, при $t \to a$ функция ρ стремится к некоторому числу $\rho(a)$, отличному от нуля. Кроме того, $\lim\limits_{t\to a+0} \rho' = \lim\limits_{t\to a+0} -\rho\, ctg\theta \left(\frac{\theta'+\phi'}{2}\right)$ тоже будет отличен от нуля. Легко видеть, что в этом случае условие регулярности при $t = a$ уже будет выполнено.

Аналогичным образом можно проанализировать и поведение функции ρ при $t \to b-0$. Единственным отличием является необходимость учитывать, что $a < t_0$, тогда как $b > t_0$.

Как следствие, теорему 1 можно обобщить. А именно, можно допускать, что на интервале (a,b) есть изолированные точки $a = t_1 < \ldots < t_j = b$, в которых $\sin\theta$ и/или $\theta'+\phi'$ обращаются в нуль. Разобьем (a,b) этими точками на меньшие интервалы и на каждом из них восстановим кривую l_i с радиус-вектором вида (17). Таким образом, получим набор кривых. Контролируя поведение этих кривых в начальных и конечных точках, можно попытаться склеить из них регулярную класса C^1 кривую l, которая и давала бы решение задачи для всего интервала (a, b). Проведенный анализ показывает, что допустимым является лишь тот вариант, когда отношение $\dfrac{\theta' + \phi'}{\sin\theta}$ имеет конечный, отличный от нуля, предел при $t \to t_i$. В противном случае, либо кривая будет проходить через начало координат ($\rho = 0$), либо будет разрываться, уходя на бесконечность, либо будет нарушена ее регулярность ($\rho' = 0$). Дополнительная сложность заключается в обеспечении для "склеенной" кривой l регулярности более высокого класса, чем C^1.

2. Восстановление поверхностей, гомеоморфных сфере

Теперь обратимся к задаче восстановления *замкнутых поверхностей* F^2 в E^4 по заданному *замкнутому грассманову образу с вырожденной проекцией.* Сразу отметим, что, с топологической точки зрения, среди рассматриваемых нами поверхностей вращения с радиус-вектором вида (7) любая замкнутая поверхность будет либо тором, либо сферой. Если кривая l, в результате вращения которой получается F^2, замкнута и не проходит через начало координат O, то F^2 будет представлять собой тор. Если же кривая l замкнута и проходит через начало координат O, то F^2 будет представлять собой погруженную в E^4 сферу, для которой точка O станет точкой самопересечения. Поверхностей иного топологического типа мы получить не можем. Восстановление торических поверхностей обсудим в следующем разделе, сейчас же остановимся на сферическом случае.

Вращением кривой l можно получить погруженную в E^4 сферу, если l проходит через начало координат. Мы ограничимся рассмотрением того случая, когда кривая l подходит к началу координат O вдоль отрезков OA и OB, т.е. имеет форму, изображенную на рис. 2.

В этом случае OA и OB при вращении опишут два плоских диска D_A и D_B с центром O, а оставшаяся часть $\tilde{l} = AB$ кривой l при вращении опишет цилиндрическую поверхность $\tilde{F}^2$. Поверхность F^2, которая получается вращением кривой l, состоит, очевидно, из цилиндра $\tilde{F}^2$, к которому "подклеены" диски D_A и D_B. Таким образом, F^2 действительно представляет собой погруженную в E^4 сферу, для которой точка O будет точкой самопересечения. Описание построения подобных поверхностей в частном случае дано в работе [5]. Интересно отметить, что такие поверхности имеют ненулевой инвариант Уитни.

Ясно, что грассманов образ Γ^2 поверхности F^2, в свою очередь, будет состоять из грассманова образа $\tilde{\Gamma}^2$ цилиндрической поверхности $\tilde{F}^2$, компактифицированного двумя точками — грассмановыми образами плоских дисков

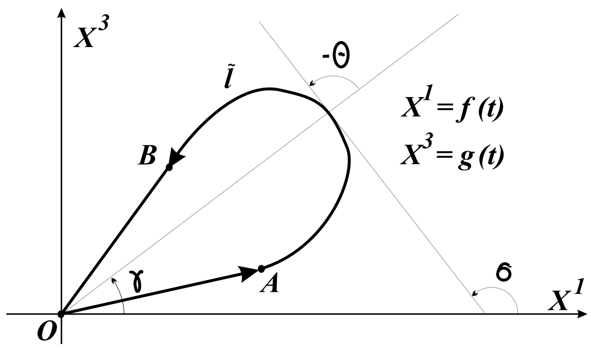

Рис.2

D_A и D_B. Поэтому для восстановления поверхности F^2 по ее грассманову образу Γ^2 мы должны восстановить сначала поверхность $\tilde{F}^2$, воспользовавшись теоремой 1, а затем суметь "заклеить" $\tilde{F}^2$ двумя плоскими дисками, причем сделать это необходимо так, чтобы была обеспечена регулярность соответствующего порядка поверхности F^2.

Итак, какими же свойствами должна обладать замкнутая поверхность с вырожденной проекцией $\Gamma^2 \subset G_{2,4}$, чтобы восстанавливаемая кривая l была бы описанной формы (рис. 2), а поверхность F^2, как следствие, представляла бы собой погруженную в E^4 сферу?

Теорема 2. *Пусть имеется поверхность с вырожденной проекцией* $\Gamma^2 \subset G_{2,4}$, *которая задана радиус-вектором (4), где* $\psi = 0$, $\omega \in [0, 4\pi]$, *а* $\theta(t)$, $\phi(t) : [a, b] \to R$ *— гладкие класса* C^k, $k \geq 2$, *функции, удовлетворяющие следующим условиям:*

1) $\sin\theta(t) \neq 0 \quad \forall t \in (a, b)$;

2) $\theta'(t) + \phi'(t) \neq 0 \quad \forall t \in (a, b)$;

3) $\theta(a) = 0, \quad \theta(b) = -\pi$;

4) $\lim\limits_{t\to a+0} \dfrac{\phi' + \theta'}{\sin\theta}$ *и* $\lim\limits_{t\to b-0} \dfrac{\phi' + \theta'}{\sin\theta}$ *существуют и отличны от нуля;*

5) $(\phi' + \theta')/\sin\theta < 0 \quad \forall t \in [a, b]$;

6) при $t \to a+0$ *и* $t \to b-0$ *имеют место равенства* $\theta' = 0, \dots, \theta^{(k-1)} = 0$.

Тогда существует C^k*-регулярная замкнутая поверхность* F^2 *в* E^4*, являющаяся погруженной сферой, для которой* Γ^2 *будет грассмановым образом.*

Прежде чем доказать эту теорему, сделаем несколько замечаний. Из свойств функций $\theta(t), \phi(t)$ прямо следует, что поверхность Γ^2 действительно является замкнутой и, кроме того, регулярной всюду, за исключением двух особых точек $\bar{S}(t = b)$ и $\bar{N}(t = a)$, проектирующихся на S_1^2 в полюса $S(\theta = -\pi)$ и $N(\theta = 0)$. При проекции $\Gamma^2 \to S_1^2$ сфера S_1^2 покрывается полностью, а т.к. $\omega \in [0, 4\pi]$, то при любом фиксированном $t \in (a, b)$ соответствующая параллель на S_1^2 будет накрыта дважды, как и ее кривая-прообраз на Γ^2. То есть вполне уместно употребить к рассматриваемой в теореме 2 поверхности Γ^2 термин "двулистная", а две ее особые точки $\bar{S}$ и $\bar{N}$ естественно называть "точками ветвления". Условие двулистности является необходимым для того, чтобы поверхность с вырожденной проекцией Γ^2 была грассмановым образом погруженной в E^4 сферы, как это следует из нижеследующих в четвертом разделе общих результатов.

Доказательство теоремы. Будем следовать доказательству теоремы 1. Рассмотрим регулярную незамкнутую поверхность $\tilde{\Gamma}^2$, которая получается из Γ^2 удалением двух особых точек ветвления $\bar{S}$ и $\bar{N}$, т.е. разрешим t меняться в открытом интервале (a, b). Все условия теоремы 1 для $\tilde{\Gamma}^2$ выполнены, поэтому можем построить регулярную класса C^k цилиндрическую поверхность $\tilde{F}^2 \subset E^4$ с радиус-вектором вида (7), для которой $\tilde{\Gamma}^2$ будет грассмановым образом. По построению, $\tilde{F}^2$ получается вращением регулярной класса C^k плоской кривой $\tilde{l}$ с радиус-вектором (17). При этом $\tilde{l}$ делает один полный оборот $\alpha \in [-2\pi, 0]$, т.к. $\omega \in [0, 4\pi]$ по предположению и $\alpha = -\omega/2$ по построению. Кроме того, как уже отмечалось в конце предыдущего раздела, кривая $\tilde{l}$ регулярно класса C^k параметризована переменной t. Зафиксируем на $\tilde{l}$ соответствующую t ориентацию.

Задача состоит теперь в доказательстве того факта, что к кривой $\tilde{l}$ можно добавить отрезки OA и BO так, чтобы полученная замкнутая кривая $l = OA \cup \tilde{l} \cup BO$ была бы регулярной класса C^k.

Напомним, что $-\theta$ является углом между радиус-вектором кривой $\tilde{l}$ и касательным вектором. Поэтому условие 3) в формулировке теоремы как раз говорит о том, что в начальной точке A радиус-вектор сонаправлен с касательным вектором, а в конечной точке B — противоположно направлен. Поэтому, если у радиус-вектора и касательного вектора существуют отличные от нуля предельные значения в точках $A(t = a)$ и $B(t = b)$, то вследствие условия 3) теоремы можем добавить к $\tilde{l}$ отрезки OA и BO и получить C^1-регулярную кривую l.

По формуле (17) радиус-вектор кривой $\tilde{l}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix}, \quad t \in (a, b),$$

где

$$\rho = C\, e^{-\int\limits_{t_0}^{t} ctg\theta\, \gamma'\, dt}, \quad \gamma = \frac{\phi + \theta}{2},$$

C — константа, $t_0 \in (a, b)$.

Рассмотрим предельное поведение функции ρ при $t \to a+0$. Так как $\theta \to 0$ при $t \to a$, то интеграл $\int\limits_{t_0}^{a} ctg\theta\, \gamma'\, dt$ будет несобственным. С другой стороны, в условии 4) теоремы предполагается, что $\lim\limits_{t\to a+0} \dfrac{\gamma'}{\sin\theta}$ существует и отличен от нуля. Поэтому можно утверждать, что указанный интеграл сходится, а значит, существует отличный от нуля предел функции ρ при $t \to a+0$, который обозначим $\rho(a)$. Таким образом, начальная точка A кривой $\tilde{l}$ отлична от начала координат O.

Далее, так как

$$\rho' = -\rho\, ctg\theta\, \gamma', \tag{20}$$

то легко видеть, что предел ρ' при $t \to a$ также существует и отличен от нуля. Учитывая, что $\gamma' \to 0$ по предположению, получаем, что у касательного вектора (f', g') существует предельное положение при $t \to a$:

$$\lim_{t\to a+0} \begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = \lim_{t\to a+0} \begin{pmatrix} \rho' \cos\gamma - \rho\gamma' \sin\gamma \\ \rho' \sin\gamma + \rho\gamma' \cos\gamma \end{pmatrix} = \rho'(a) \begin{pmatrix} \cos\gamma(a) \\ \sin\gamma(a) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что это предельное положение касательного вектора коллинеарно самому радиус-вектору кривой в начальной точке A. Кроме того, радиус-вектор и касательный вектор будут сонаправлены, если знаки $\rho(a)$ и $\rho'(a)$ совпадают, и противоположно направлены, если знаки отличаются. Принимая во внимание (20), из условия 5) теоремы следует, что знаки $\rho(a)$ и $\rho'(a)$ совпадают, т.е. касательный вектор кривой $\tilde{l}$ будет коллинеарен радиус-вектору в точке A. Таким образом, благодаря предположениям 3)–5) теоремы, мы действительно можем добавить к кривой $\tilde{l}$ отрезок OA и получить гладкую класса C^1 регулярную кривую.

Установим теперь, используя условия 6) теоремы, что такая "склейка" будет не только C^1, но и C^k гладкой, $k > 1$. Для этого покажем, что векторы $(f^{(2)}, g^{(2)}), \ldots, (f^{(k)}, g^{(k)})$ все имеют предельные положения при $t \to a$, коллинеарные радиус-вектору $(f(a), g(a))$.

Вторая производная радиус-вектора

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}^{(2)} = (\rho^{(2)} + \rho(\gamma')^2) \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix} - (2\rho'\gamma' + \rho\gamma^{(2)}) \begin{pmatrix} -\sin\gamma \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$$

при $t \to a$ будет иметь следующее предельное положение:

$$\lim_{t\to a} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}^{(2)} = \lim_{t\to a} \rho^{(2)} \begin{pmatrix} \cos\gamma(a) \\ \sin\gamma(a) \end{pmatrix} - \rho(a) \lim_{t\to a} \gamma^{(2)} \begin{pmatrix} -\sin\gamma(a) \\ \cos\gamma(a) \end{pmatrix},$$

т.к. предполагается, что $\gamma' \to 0$, а $\rho(a)$ и $\rho'(a)$ конечны. Этот предел существует и коллинеарен радиус-вектору при $t \to a$ лишь в том случае, когда $\gamma^{(2)} \to 0$, а для $\rho^{(2)}$ существует конечный предел. Что касается второй производной функции $\rho(t)$, то для нее получаем

$$\rho^{(2)} = \rho \left(ctg^2\theta(\gamma')^2 + \gamma' \frac{\theta'}{\sin^2\theta} - ctg\theta\gamma^{(2)} \right). \tag{21}$$

Первое слагаемое в скобках в (21) имеет отличный от нуля предел по предположению 4) теоремы. Покажем, что сумма второго и третьего слагаемых в пределе стремится к нулю. По правилу Лопиталя

$$\lim_{t\to a} \frac{\gamma'}{\sin\theta} = \lim_{t\to a} \frac{\gamma^{(2)}}{\theta' \cos\theta} = \lim_{t\to a} \frac{\gamma^{(2)}}{\theta'}. \tag{22}$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to a} \left(\gamma' \frac{\theta'}{\sin^2\theta} - ctg\theta\gamma^{(2)} \right) = \lim_{t\to a} \left(\frac{\gamma^{(2)}}{\theta'} \frac{\theta'}{\sin\theta} - ctg\theta\gamma^{(2)} \right)$$

$$= \lim_{t\to a} \left(\frac{\gamma^{(2)}}{\sin\theta}(1-\cos\theta) \right) = \lim_{t\to a} \gamma^{(2)} \left(\frac{2\sin^2(\theta/2)}{\sin\theta}(1-\cos\theta) \right) = 0.$$

Поэтому

$$\lim_{t\to a} \rho^{(2)} = \rho(a) \lim_{t\to a} ctg^2\theta(\gamma')^2,$$

а значит, предельное значение $\rho^{(2)}(a)$ существует и отлично от нуля.

Итак, остается лишь условие $\gamma^{(2)} \to 0$ при $t \to a$. Если оно выполнено, то у второй производной радиус-вектора действительно существует предел, коллинеарный самому радиус-вектору, и в результате в точке A отрезок OA приклеивается к кривой $\tilde{l}$ гладко класса C^2. Действуя тем же методом, не составляет особого труда показать, что если выполнены условия $\gamma^{(2)} \to 0$, $\ldots$, $\gamma^{(k)} \to 0$ при $t \to a$, то отрезок OA приклеивается к кривой $\tilde{l}$ гладко класса C^k.

Покажем, что условия $\gamma^{(2)} \to 0, \ldots, \gamma^{(k)} \to 0$ эквивалентны условиям 6) в формулировке теоремы. Действительно, принимая во внимание (22), т.к. предел существует и отличен от нуля, то $\gamma^{(2)} \to 0$ тогда и только тогда, когда $\theta' \to 0$. Далее, применяя к (22) правило Лопиталя, получаем, что $\gamma^{(i)} \to 0$ тогда и только тогда, когда $\theta^{(i-1)} \to 0$, $i = \overline{2,k}$. Следовательно, условия на функцию γ можем заменить эквивалентными условиями на функцию θ, которые как раз и составляют предположение 6) в формулировке теоремы.

Аналогичный анализ имеет место и для конечной точки $B(t \to b)$ кривой $\tilde{l}$.

Таким образом, кривая $\tilde{l}$ вместе с отрезками OA и BO образуют гладкую класса C^k кривую l. При вращении кривой l получаем замкнутую поверхность $F^2 \subset E^4$, представляющую собой регулярно класса C^k погруженную сферу. Из рассуждений, предваряющих теорему, легко видеть, что грассманов образ построенной замкнутой поверхности вращения $F^2 \subset E^4$ как раз и есть заданная замкнутая поверхность $\Gamma^2 \subset G(2,4)$. ■

З а м е ч а н и е о б о с о б ы х т о ч к а х. Остановимся еще раз на форме рассматриваемой замкнутой поверхности с вырожденной проекцией Γ^2. Как уже было отмечено, эта поверхность получается вращением кривой с радиус-вектором (6.1), матрица вращения имеет вид (6.2), при этом кривая делает два полных оборота, т.к. по условию теоремы $\omega \in [0, 4\pi]$. Поверхность Γ^2 регулярна всюду, за исключением двух точек ветвления $\bar{S}(t=b)$ и $\bar{N}(t=a)$:

$$\begin{aligned}\bar{S}(\xi^1 = -1,\, \xi^2 = 0,\, \xi^3 = 0,\, \eta^1 = \cos\phi(b),\, \eta^2 = 0,\, \eta^3 = \sin\phi(b)),\\ \bar{N}(\xi^1 = 1,\, \xi^2 = 0,\, \xi^3 = 0,\, \eta^1 = \cos\phi(b),\, \eta^2 = 0,\, \eta^3 = \sin\phi(b)),\end{aligned}$$

которые при вращении (6.2) остаются на месте. Легко вычислить, что при $t \to a$ касательная прямая вращаемой кривой займет предельное положение, направляющим вектором которого будет

$$\left(\xi^1 = 0, \xi^2 = \cos A, \xi^3 = 0, \eta^1 = -\sin\sin\phi(a), \eta^2 = 0, \eta^3 = \sin\cos\phi(a)\right),$$

где $\cos A = \lim\limits_{t\to a} \dfrac{\theta'}{\sqrt{(\theta')^2 + (\phi')^2}}$, $\sin A = \lim\limits_{t\to a} \dfrac{\phi'}{\sqrt{(\theta')^2 + (\phi')^2}}$. Соответственно при вращении (6.2) получим дважды покрытый конус, касательный к Γ^2 в сингулярной точке $\bar{N}$. Аналогично, в нерегулярной точке ветвления $\bar{S}$ у поверхности Γ^2 вместо касательной плоскости также будет дважды покрытый касательный конус.

3. Восстановление поверхностей, гомеоморфных тору

Поверхность вращения $F^2 \subset E^4$ с радиус-вектором вида (7) будет гомеоморфной тору, если вращаемая кривая l замкнута и не проходит через начало координат. Поэтому можем воспользоваться доказанной теоремой 1, но добавив дополнительное условие на грассманов образ, обеспечивающее гладкую "склейку" начальной и конечной точек восстанавливаемой кривой l.

Теорема 3. *Пусть имеется регулярная поверхность с вырожденной проекцией* $\Gamma^2 \subset G_{2,4}$*, заданная радиус-вектором (4), где* $\psi = 0$*,* $\omega \in [0, 4\pi]$*, а* $\theta(t)$*,* $\phi(t) : [a,b] \to R$ *— гладкие класса* C^k*,* $k \geq 2$*, функции. Предположим, что* $\theta(t), \phi(t)$ *удовлетворяют следующим условиям:*

1) $\sin\theta(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a,b]$;

2) $\theta'(t) + \phi'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$*;*

3) $\int\limits_a^b ctg\theta(\phi' + \theta')dt \,=\, 0;$

4) $\theta(b) = \theta(a), \quad \phi(b) = \phi(a) + 4\pi k, k \in Z;$
$\theta'(b) = \theta'(a), \quad \phi'(b) = \phi'(a),$
$\dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots$
$\theta^{(k-1)}(b) = \theta^{(k-1)}(a), \quad \phi^{(k-1)}(b) = \phi^{(k-1)}(a);$
$\phi^{(k)}(b) + \theta^{(k)}(b) = \phi^{(k)}(a) + \theta^{(k)}(a).$

Тогда существует C^k*-регулярная замкнутая поверхность* F^2 *в* E^4*, гомеоморфная тору, для которой* Γ^2 *будет грассмановым образом. Эта поверхность задается радиус-вектором (7), где функции* f*,* g *имеют вид (17), а* $\alpha = -\omega/2$*.*

Доказательство. Применяем теорему 1 и восстанавливаем кривую l (см. разд. 1). Осталось доказать, что начальная и конечная точки кривой l совпадают, т.е. $f(a) = f(b)$, $g(a) = g(b)$, и кроме того, совпадают все производные до k-й включительно, т.е.

$$f'(a) = f'(b), \dots, f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b); \quad g'(a) = g'(b), \dots, g^{(k)}(a) = g^{(k)}(b).$$

По формуле (17) имеем

$$f = \rho\cos\gamma, \quad g = \rho\sin\gamma,$$

где

$$\rho = C\, e^{-\int\limits_{t_0}^{t} ctg\theta\, \gamma'\, dt}, \quad \gamma = \frac{\phi + \theta}{2},$$

C — константа, $t_0 \in (a, b)$. Поэтому условие $f(a) = f(b), g(a) = g(b)$ перепишем следующим образом:

$$\rho(b) = \rho(a), \tag{23}$$

$$\gamma(b) = \gamma(a) + 2\pi m, m \in Z. \tag{24}$$

Далее находим первые производные

$$f' = \rho'\cos\gamma - \rho\gamma'\sin\gamma,$$

$$g' = \rho'\sin\gamma + \rho\gamma'\cos\gamma;$$

Теперь, принимая во внимание (23)–(24), легко видеть, что $f'(a) = f'(b)$, $g'(a) = g'(b)$ тогда и только тогда, когда

$$\rho'(b) = \rho'(a), \tag{25}$$

$$\gamma'(b) = \gamma'(a). \tag{26}$$

Продолжая аналогичным образом, можно получить, что значения оставшихся производных функций f и g, со второй по k-ю, совпадают при $t = a$ и $t = b$ тогда и только тогда, когда

$$\rho''(b) = \rho''(a), \quad \dots \quad \rho^{(k)}(b) = \rho^{(k)}(a), \tag{27}$$

$$\gamma''(b) = \gamma''(a), \quad \dots \quad \gamma^{(k)}(b) = \gamma^{(k)}(a). \tag{28}$$

Перепишем условия (23)–(28) в терминах функций $\theta(t)$, $\phi(t)$. Равенства (24), (26), (28) приобретают следующий вид:

$$\theta(b) + \phi(b) = \theta(a) + \phi(a) + 4\pi m, \quad m \in Z; \tag{29}$$

$$\theta^{(i)}(b) + \phi^{(i)}(b) = \theta^{(i)}(a) + \phi^{(i)}(a), \quad i = \overline{1,k}. \tag{30}$$

Обратимся к условиям (23), (25), (27), воспользовавшись выписанным ранее выражением для функции ρ. Легко видеть, что (23) выполняется, т.е. $\rho(a)$ совпадет с $\rho(b)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_a^b ctg\theta \frac{\phi' + \theta'}{2} dt \; = \; 0. \tag{23'}$$

Находим теперь первую производную: $\rho' = -\rho\, ctg\theta\, \gamma'$. Следовательно, если имеют место равенства (23) и (26), условие $\rho'(b) = \rho'(a)$ будет выполнено тогда и только тогда, когда $ctg\theta(b) = ctg\theta(a)$. Так как $\sin\theta$ не обращается в нуль, получаем

$$\theta(b) = \theta(a). \tag{25'}$$

Далее находим вторую производную:

$$\rho^{(2)} = -\rho'\, ctg\theta\, \gamma' \; + \; \rho\, \frac{\theta'}{\sin^2\theta}\, \gamma' \; - \; \rho\, ctg\theta\, \gamma^{(2)}.$$

Следовательно, если имеют место равенства (3.1)–(3.4) и также $\gamma^{(2)}(b) = \gamma^{(2)}(a)$, то условие $\rho^{(2)}(b) = \rho^{(2)}(a)$ будет выполнено тогда и только тогда, когда $\theta'(b) = \theta'(a)$. Аналогично, продолжая дифференцировать функцию ρ

и применяя уже найденные условия на функции ϕ и θ, получим, что условие (27) будет выполнено тогда и только тогда, когда

$$\theta'(b) = \theta'(a), \quad \dots \quad \theta^{(k-1)}(b) = \theta^{(k-1)}(a). \tag{27$'$}$$

Таким образом, условия (23)–(28) на функции ρ, γ эквивалентны условиям (23$'$), (25$'$), (27$'$) и (29)–(30) на функции θ, ϕ. Теперь, воспользовавшись равенствами (25$'$) и (27$'$), можем переписать и условия (29)–(30):

$$\phi(b) = \phi(a) + 4\pi m, \quad m \in Z, \tag{29$'$}$$

$$\phi'(b) = \phi'(a), \quad \dots \quad \phi^{(k-1)}(b) = \phi^{(k-1)}(a), \tag{30$'$}$$

$$\phi^{(k)}(b) + \theta^{(k)}(b) = \phi^{(k)}(a) + \theta^{(k)}(a). \tag{30$''$}$$

Итак, возможность гладкой класса C^k "склейки" начальной и конечной точек кривой l аналитически описывается условиями (23$'$), (25$'$), (27$'$), (29$'$), (30$'$), (30$''$) на функции $\phi(t)$ и $\theta(t)$, задающие грассманов образ. Эти условия как раз и составляют содержание предположений 3)–4) теоремы.

Таким образом, можем восстановить регулярную класса C^k замкнутую кривую l. При ее вращении получаем замкнутую поверхность $F^2 \subset E^4$, гомеоморфную тору, грассманов образ которой совпадает с заданной замкнутой поверхностью с вырожденной проекцией $\Gamma^2 \subset G_{2,4}$. ■

П р и м е р. Положим $\theta \equiv \pi/2$. Условия 1), 3) и частично 4) теоремы 3 будут выполнены, а неравенство 2) и оставшиеся равенства 4) запишутся в виде условий для ϕ. А именно, $\phi' \neq 0$, $\phi(b) - \phi(a) = 4\pi k, k \in Z$, $\phi'(b) = \phi'(a), \dots, \phi^{(k)}(b) = \phi^{(k)}(a)$. Легко видеть, что класс функций $\phi : [a, b] \to R$ с такими свойствами достаточно широк. Из (17) следует, что в этом случае восстанавливаемая кривая l в плоскости x^1, x^3 будет окружностью с центром в начале координат O. При вращении l получим плоский тор T^2 в E^4. Заметим, принимая во внимание (18), что кривизна $\overline{K}$ многообразия $G(2, 4)$ вдоль площадок, касательных к грассманову образу Γ^2, тождественно равна 0.

З а м е ч а н и е. Теоремы 2 и 3 можно обобщить по аналогии с предложенной в разд. 1 возможностью обобщения теоремы 1. А именно, можно допустить существование на интервале (a, b) изолированных точек $a = t_1 < \dots < t_j = b$, в которых $\sin\theta$ и $\theta' + \phi'$ обращаются в нуль. На каждом из интервалов (t_i, t_{i+1}) мы можем воспользоваться теоремой 1 и восстановить кривую $\tilde{l}_i$ с радиус-вектором вида (17). Затем необходимо будет обеспечить возможность объединения этих кривых в одну C^k-гладкую регулярную кривую $\tilde{l}_i$, после чего можно будет действовать, как при доказательстве теорем 2 и 3, соответственно. Усложнение доказательства и увеличение объема выкладок компенсируется увеличением класса допускаемых в теоремах 2 и 3 функций

θ, ϕ, а значит, существенно расширит класс восстанавливаемых поверхностей вращения, гомеоморфных сфере или тору.

4. Топология грассманова образа

В завершающем разделе статьи мы докажем несколько утверждений "в целом", представляющих топологические ограничения на грассманов образ с вырожденной проекцией замкнутой поверхности $F^2 \subset E^4$.

Для двумерных поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве классическим результатом является тот факт, что элемент площади сферического образа к элементу площади самой поверхности равен гауссовой кривизне поверхности. Аналогичный факт имеет место и для $F^2 \subset E^4$. А именно, построим грассманов образ Γ в $G(2,4)$, затем спроектируем его на сферы-сомножители S_1^2 и S_2^2. Для построенных отображений введем обозначения $G_i : F^2 \to \Gamma^2 \to S_i^2$. Тогда имеют место соотношения

$$\frac{d\Omega_i}{dA} = |K \pm \kappa|, \tag{31}$$

где $d\Omega_i$ — элементы площади сфер S_i^2, dA — элемент площади самой поверхности F^2, K и κ — ее гауссова кривизна и гауссово кручение [3]. Если ориентировать сферы S_i^2 так, чтобы соответствующие нормали были направлены наружу, и рассмотреть ориентированные элементы площади, то знак модуля в (31) можно снять.

Применяя эти формулы, докажем следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть $F^2 \subset E^4$ — замкнутая ориентируемая C^2-регулярная поверхность рода m. Предположим, что ее грассманов образ $\Gamma^2 \subset G(2,4)$ при проекции на S_2^2 отображается в линию или точку. Тогда степень отображения $G_1 : F^2 \to \Gamma^2 \to S_1^2$ равна эйлеровой характеристике $\chi = 2 - 2m$ поверхности F^2.*

Доказательство. Так как проекция грассманова образа $\Gamma^2 \subset G(2,4)$ на S_2^2 вырождена, т.е. Γ^2 отображается в линию или точку, то $d\Omega_2 \equiv 0$. Поэтому, принимая во внимание (31), получаем, что гауссова кривизна поверхности F^2 совпадает с ее гауссовым кручением, $K = \kappa$. Следовательно, в свою очередь, $d\Omega_1 = 2K$. Находим теперь степень отображения G_1 — проекции F^2 на S_1^2:

$$\begin{aligned} \text{степень}\, G_1 &= \frac{1}{\text{площадь}\,(S_1^2)} \int\limits_{G_1(F^2)} d\Omega_1 = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{F^2} 2K \cdot dA \\ &= \frac{1}{4\pi} \cdot 2 \cdot 2\pi \cdot \chi(F^2) = \chi(F^2). \end{aligned}$$

■

Следствие. *В условиях теоремы 4, если F^2 гомеоморфно сфере ($\chi = 2$), то степень отображения $G_1 : F^2 \to S_1^2$ равна 2. В частности, образ $G_1(F^2)$ покрывает всю сферу S_1^2 и обязательно имеет особые точки.*

Следствие. *В условиях теоремы 4, если F^2 гомеоморфно тору ($\chi = 0$), то степень отображения $G_1 : F^2 \to S_1^2$ равна 0.*

Рассмотренный выше грассманов образ с вырожденной проекцией удовлетворяет условиям теоремы 4, поэтому в сферическом случае будет выполнено и сформулированное только что следствие. Это объясняет, почему грассманов образ с вырожденной проекцией в случае погруженной сферы $F^2 \subset E^4$ обязан быть двулистным и должен иметь особые точки.

Список литературы

[1] *Ю.А. Аминов*, Восстановление поверхности в E^4 по заданному грассманову образу. — *Мат. сб.* (1982), т. 117, № 2, с. 147–160.

[2] *К.О. Кизбикенов*, 2-мерные поверхности в E^4 с заданным грассмановым образом. — Ленинград (1983). Деп. ВИНИТИ 12.83, № 6568-83.

[3] *Yu.A. Aminov*, The geometry of submanifolds. Gordon and Breach Sci. Publishers, Amsterdam (2001).

[4] *А.А. Борисенко, Ю.А. Николаевский*, Грассмановы многообразия и грассманов образ подмногообразий. — *Успехи мат. наук* (1991), т. 42, № 2, с. 41–83.

[5] *Ю.А. Аминов, Н.В. Манжос*, Замкнутые поверхности в E^4 с ненулевым инвариантом Уитни. — *Мат. физ., анализ, геом.* (1998), т. 5, № 3/4, с. 139–148.

On the reconstruction of a two-dimensional closed surface in E^4 from a given closed Grassmann image

Yu.A. Aminov, V.O. Gorkavyy and A.V. Sviatovets

The problem of reconstruction of a two-dimensional closed surface of particular form in four-dimensional Euclidean space from a given closed Grassmann image is studied.