Математическая физика, анализ, геометрия
2004, т. 11, № 1, с. 45–66

Антиподальные n-угольники, вписанные в правильный $(2n-1)$-угольник, и полуциркулянтные матрицы Адамара порядка $4n$

А.И. Медяник

*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, Харьков, 61103, Украина*
E-mail:medianik@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 23 января 2003 г.
Представлена А.А. Борисенко

Получены необходимые и достаточные условия существования полуциркулянтной матрицы Адамара порядка $4n$, притом в двух формах — геометрической и аналитической. Геометрические необходимые и достаточные условия сводятся к вопросу о существовании антиподальных n-угольников, вписанных в правильный $(2n-1)$-угольник, а аналитические — к разрешимости в поле вещественных чисел неоднородной системы из $5n-3$ квадратных уравнений с $4n-4$ неизвестными, тесно связанной с некоторой кубикой — неприводимой гладкой гиперповерхностью третьего порядка в $(2n-1)$-мерном проективном пространстве.

Одержано необхідні та достатні умови існування напівциркулянтної матриці Адамара порядку $4n$, до того ж у двох формах — геометричній та аналітичній. Геометричні необхідні і достатні умови зводяться до питання про існування антиподальних n-кутників, вписаних у правильний $(2n-1)$-кутник, а аналітичні — до розв'язуваності у полі дійсних чисел неоднорідної системи із $5n-3$ квадратних рівнянь з $4n-4$ невідомими, які тісно пов'язані з деякою кубікою — незвідною гладкою гіперповерхнею третього порядку у $(2n-1)$-вимірному проективному просторі.

1. Введение

Настоящая статья является продолжением исследований, начатых автором в статьях [1] и [2]. Основная цель — получение необходимых и достаточных условий существования матриц Адамара порядка $4n$ специального

Mathematics Subject Classification 2000: 05B20, 52B.
Работа частично поддержана Государственным фондом фундаментальных исследований Украины (проект № 01.07/00132).

класса — полуциркулянтных, который был введен в [1]. Предложенный в [2] метод построения таких матриц посредством нахождения порождающих их полиномов $t_1(z)$ и $t_2(z)$ степени $2n-2$ пригоден для любого натурального n, четного или нечетного, и поэтому является универсальным. Однако его реализация с помощью компьютерных программ с ростом n сопряжена с большими вычислительными трудностями, поскольку при этом не удается исключить полностью перебор. Не спасает положения и существенное его ограничение, благодаря установленным в [2] групповым свойствам полиномов t_1 и t_2 и очень сильному необходимому условию, которому должно удовлетворять разностное множество $\{d_k\}$ каждого из этих полиномов:

$$\sum_{k=1}^{n-1} d_k \cos\frac{2\pi mk}{2n-1} \leq 0,$$

где $m = 1, 2, \ldots, n-1$, $\sum_{k=1}^{n-1} d_k = n(n-1)/2$.

В связи с этим представляется целесообразным найти необходимые и достаточные условия существования полуциркулянтных матриц Адамара порядка $4n$, что и сделано в настоящей статье (разд. 3). При этом окончательный результат (теорема 5) желательно было получить в форме, не требующей решения системы уравнений в целых числах, поскольку именно это приводит к неизбежности перебора. Поставленной цели удалось достигнуть только благодаря детальному изучению свойств антиподальных n-угольников, вписанных в правильный $(2n-1)$-угольник, которые, как оказалось, теснейшим образом связаны с матрицами Адамара полуциркулянтного типа (теорема 4), что и позволило автору выделить такой класс выпуклых многоугольников (разд. 2). После правильных симплексов, вписанных в куб, связь которых с матрицами Адамара установил в 1933 г. Г.С.М. Коксетер, антиподальные многоугольники являются другим простым геометрическим объектом, связанным с ними столь же тесно.

2. Выпуклые n-угольники, вписанные в правильный $(2n-1)$-угольник

Рассмотрим выпуклый n-угольник, вписанный в окружность, каждая сторона которого видна из центра этой окружности под углом $\varphi_k = \frac{2\pi k}{2n-1}$, где k — натуральное число, меньшее n. Обозначим через a_k число сторон этого многоугольника, видных из центра под одним и тем же углом, равным $\frac{2\pi k}{2n-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Если центр окружности лежит внутри n-угольника, то, очевидно, $\sum_{k=1}^{n-1} ka_k = 2n-1$, а если не лежит, то все a_k, за исключением двух, равны нулю, причем $a_1 = n-1$, $a_{n-1} = 1$. Ясно, что наш n-угольник вписан не только в окружность, но и в некоторый правильный $(2n-1)$-угольник, вписанный в ту же окружность, поскольку каждую вершину n-угольника можно считать одной из вершин такого правильного многоугольника. Для чего достаточно каждую дугу окружности, стягиваемую стороной, видной под углом φ_k, разделить дополнительными вершинами на k равных частей. Всего существует C^n_{2n-1} выпуклых n-угольников, вписанных в данный правильный $(2n-1)$-угольник. И так как $n > (2n-1)/2$, то для любого такого многоугольника $a_1 \geq 1$, т.е. хотя бы две соседние вершины n-угольника являются соседними вершинами правильного $(2n-1)$-угольника, в который он вписан. Кроме того, очевидно, $a_1 < n$, причем случай $a_1 = n-1$, как следует из сказанного выше, реализуется.

Так как наш n-угольник вписан в правильный $(2n-1)$-угольник, то и все его диагонали обладают указанным свойством сторон, т.е. каждая из них видна из центра описанной окружности под одним из углов $\varphi_k, k = 1, 2, \ldots, n-1$. Обозначим через d_k число диагоналей и сторон нашего многоугольника, которые видны из центра окружности под углом φ_k. Поскольку в d_k включаются не только диагонали, но и стороны одинаковой с ними длины (хорды окружности, видные из ее центра под одним и тем же углом, имеют равные длины), то $\sum_{k=1}^{n-1} d_k = C^2_n = n(n-1)/2$. Непосредственно из определения d_k следует, что $d_k \geq a_k$ и, значит, $d_1 \geq 1$. Более того, в отличие от a_k, это неравенство справедливо для всех d_k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Действительно, перенумеруем числами от 0 до $2n-2$ все вершины правильного $(2n-1)$-угольника, в который вписан данный выпуклый n-угольник P, против хода часовой стрелки, начиная из какой-нибудь его вершины. Пусть при этом вершины P получат порядковые номера $i_1, i_2, \ldots, i_n$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_n)$. Допустим, что для некоторого значения k, $1 < k < n$, $d_k = 0$. Тогда вершина правильного $(2n-1)$-угольника с порядковым номером $i_1 + k$ не является вершиной P. Не является его вершиной и вершина с порядковым номером $|i_1 - k|$, равным наименьшему (неотрицательному) вычету числа $i_1 - k$ по модулю $2n-1$. Не являются его вершинами также все те вершины правильного $(2n-1)$-угольника, порядковыми номерами которых являются числа $|i_m \pm k|, m = 2, 3, \ldots, n$. А так как каждая из не принадлежащих данному выпуклому n-угольнику P вершин повторяется при этом не более двух раз, то получается, что общее их число не меньше n, что невозможно, т.к. только $n-1$ вершина правильного $(2n-1)$-угольника может не принадлежать вписанному в него n-угольнику.

Следовательно, для всех $1 \leq k \leq n-1$ $d_k \geq 1$. Кроме того, $d_k \leq n-1$, т.к. у чисел n и $2n-1$ нет общих делителей, бо́льших 1 (если $d_k = n$, то число nk должно делиться без остатка на $2n-1$). Это означает, что каждое d_k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, удовлетворяет двойному неравенству $1 \leq d_k \leq n-1$, причем $\sum_{k=1}^{n-1} d_k = n(n-1)/2$, т.е. среднее значение d_k равно $n/2$.

В связи с этим возникает следующий естественный вопрос, представляющий особый интерес для всего дальнейшего изложения: *существуют ли* *такие выпуклые n-угольники P и P', вписанные в один и тот же правильный $(2n-1)$-угольник, что для всех значений $k = 1, 2, \ldots, n-1$ справедливо равенство $d_k + d'_k = n$?* Другими словами, *можно ли в правильный $(2n-1)$-угольник вписать два выпуклых n-угольника так, чтобы суммарное количество диагоналей и сторон одной и той же длины у них было равно n для всех допустимых длин?* Известно, что для многих значений n ответ на этот вопрос положительный. Например, при $n = 5$ для многоугольника P с вершинами, расположенными в вершинах правильного девятиугольника с номерами $0, 1, 2, 3$ и 5, $d_1 = 3$, $d_2 = 3$, $d_3 = 2$, $d_4 = 2$, а для многоугольника P' с вершинами, расположенными в вершинах с номерами $0, 1, 3, 5$ и 6, $d_1 = 2$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$, $d_4 = 3$, т.е. для любого $1 \le k \le 4$ $d_k + d'_k = 5$. Однако неизвестно, будет ли ответ на поставленный вопрос положительным для всех натуральных $n \ge 3$. Назовем выпуклые n-угольники P и P', обладающие указанным свойством, *антиподальными* (или просто антиподами) и приступим к их изучению.

Полагая, что вершины правильного $(2n-1)$-угольника перенумерованы в направлении против хода часовой стрелки числами $0, 1, 2, \ldots, 2n-2$, будем считать, что вершины вписанного в него выпуклого n-угольника P имеют в порядке возрастания номера $i_1, i_2, \ldots, i_n$, а выпуклого n-угольника P' — $i'_1, i'_2, \ldots, i'_n$. Очевидно, n-угольник P_1 с номерами вершин $i_1 + 1$, $i_2 + 1, \ldots, i_{n-1} + 1$, $|i_n + 1|$ равен многоугольнику P, поскольку получается из него поворотом против хода часовой стрелки на угол $\frac{2\pi}{2n-1}$. Аналогично, n-угольник P_m, $m < 2n-1$ с номерами вершин $|i_1 + m|$, $|i_2 + m|, \ldots, |i_n + m|$ также равен P и получается из него поворотом на угол $\frac{2\pi m}{2n-1}$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $i_1 = 0$, $i_2 = 1$ (по доказанному выше у P есть сторона, которая равна стороне правильного $(2n-1)$-угольника, описанного около него). Аналогично, не ограничивая общности, можно считать, что $i'_1 = 0$, $i'_2 = 1$. Свойство антиподальности при этом, разумеется, сохраняется.

Полагая теперь $i_1 = i'_1 = 0$, рассмотрим нетривиальные преобразования P и P', при которых также сохраняется их антиподальность.

Пусть m — натуральное число, меньшее $2n-1$ и взаимно простое с ним, т.е. $(m,\ 2n-1) = 1$. Рассмотрим выпуклый n-угольник P_m, вершинами которого являются вершины правильного $(2n-1)$-угольника с номерами, равными по модулю $2n-1$ произведениям номеров вершин n-угольника P на m: $mi_0, |mi_1|, \ldots, |mi_n|$, которые в силу условия $(m,\ 2n-1) = 1$ являются различными. Обозначим это преобразование через V_m. Так как $i_1 = 0$, то при любом допустимом m вершина с номером 0 будет вершиной P_m, т.е. все образы $V_m(P)$ будут иметь общую вершину. При этом сам многоугольник P_m является границей выпуклой оболочки всех своих вершин, а соответствие между сторонами и диагоналями P и P_m индуцируется соответствием между их вершинами, причем стороны P могут переходить в диагонали P_m, и наоборот, диагонали — в стороны.

Положим $z = e^{i\theta}$, где $\theta = \frac{2\pi}{2n-1}$, и сопоставим вершинам нашего правильного $(2n-1)$-угольника одночлены z^k в соответствии с их порядковыми номерами $k = 0, 1, 2, \dots, 2n-2$, что естественно, т.к. z^k задают в комплексной плоскости вершины этого $(2n-1)$-угольника, если радиус окружности, описанной около него, считать равным 1. А значит, вписанный в него выпуклый n-угольник P можно задавать следующим *производящим* полиномом $p(z)$: $p = \sum_{k=0}^{N-1} x_k z^k$, где $x_k = 1$, если соответствующая вершина принадлежит P, и $x_k = 0$ — в противном случае, причем $N = 2n-1$. Последнее обозначение используется и ниже, но только в индексах и пределах суммирования.

Так как P — n-угольник, то $\sum_{k=0}^{N-1} x_k = n$. Для того чтобы найти полином $p_m(z)$, задающий n-угольник P_m, который получается из P преобразованием V_m, заметим сначала, что по свойству IV [3, с. 49] существует, и притом единственное, натуральное число $s < 2n-1$ такое, что $m \cdot s \equiv 1 \pmod{2n-1}$. По определению P_m (с учетом, что $z^{2n-1} = 1$) имеем

$$p_m(z) = p(z^m) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k (z^m)^k = \sum_{r=0}^{N-1} x_r z^{|rm|} = \sum_{k=0}^{N-1} x_{|ks|} z^k. \tag{1}$$

Лемма 1. *Если $d_k, k = 1, 2, \dots, n-1$ — число диагоналей и сторон выпуклого n-угольника P, вписанного в правильный $(2n-1)$-угольник, которые видны из его центра под углом $\frac{2\pi k}{2n-1}$, то квадрат модуля полинома $p(z)$, задающего этот n-угольник, удовлетворяет равенству*

$$|p|^2 = n + 2 \sum_{k=1}^{n-1} d_k \cos k\theta, \quad \text{где} \quad \theta = \frac{2\pi}{2n-1}. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $p = \sum_{k=0}^{N-1} x_k z^k$ — полином, задающий n-угольник P. Воспользовавшись решением задачи 39 [3, с. 92, 294] для случая вещественных коэффициентов x_k, получим

$$|p|^2 = |\sum_{k=0}^{N-1} x_k z^k|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} x_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} (\sum_{j=0}^{N-1-k} x_j x_{j+k}) \cos k\theta.$$

Учитывая, что $\sum_{k=0}^{N-1} x_k^2 = n$ и что для любого $k < n$ имеет место тождество

$$\sum_{j=0}^{N-1-k} x_j x_{j+k} + \sum_{j=0}^{k-1} x_j x_{j+N-k} \equiv \sum_{j=0}^{N-1} x_j x_{|j+k|},$$

после попарного объединения слагаемых с $\cos k\theta$ и $\cos(2n-1-k)\theta$ находим

$$|p|^2 = n + 2\sum_{k=1}^{n-1}(\sum_{j=0}^{N-1} x_j x_{|j+k|})\cos k\theta.$$

Поскольку каждое x_j равно 1 или 0, то произведение $x_j x_{|j+k|} \neq 0$ только в случае, когда вершины правильного $(2n-1)$-угольника z^j и $z^{|j+k|}$ являются вершинами n-угольника P, и значит, он имеет диагональ (или сторону), которая видна из центра описанной окружности под углом $\frac{2\pi k}{2n-1}$. Таким образом, $\sum_{j=0}^{N-1} x_j x_{|j+k|} = d_k$, откуда и следует утверждение леммы.

Теорема 1. *Если полиномы* $p = \sum_{k=0}^{N-1} x_k z^k$ *и* $p' = \sum_{k=0}^{N-1} x'_k z^k$ *задают антиподальные* n*-угольники* P *и* P'*, которые вписаны в правильный* $(2n-1)$*-угольник с вершинами* z^k, $k = 0, 1, 2, \dots, 2n-2$*, то при любом натуральном* $m < 2n-1$*, являющимся взаимно простым с числом* $2n-1$*, полиномы* $p_m = \sum_{k=0}^{N-1} x_{|ks|} z^k$ *и* $p'_m = \sum_{k=0}^{N-1} x'_{|ks|} z^k$*, для которых* $m \cdot s \equiv 1 \pmod{2n-1}$*, задают также антиподальные* n*-угольники* P_m *и* P'_m*, вписанные в тот же правильный* $(2n-1)$*-угольник.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть d_k, d'_k и d_k^m, $d_k^{m'}$ — число диагоналей и сторон n-угольников P, P' и P_m, P'_m, соответственно, видных из центра описанной вокруг них окружности под углом $\frac{2\pi k}{2n-1}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$. Из антиподальности n-угольников P и P' следует, что $d_k + d'_k = n$ для всех k. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что $d_k^m + d_k^{m'} = n$, $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Пусть $s < 2n-1$ — решение сравнения $m \cdot s \equiv 1 \pmod{2n-1}$ и пусть $p_m = \sum_{k=0}^{N-1} \bar{x}_k z^k$, где $\bar{x}_k = x_{|ks|}$ — полином, задающий согласно равенству (1) n-угольник P_m. Тогда, как следует из доказательства леммы 1, $d_k^m = \sum_{j=0}^{N-1} \bar{x}_j \bar{x}_{|j+k|}$. Значит,

$$d_k^m = \sum_{j=0}^{N-1} x_{|js|} x_{|(j+k)s|} = \sum_{j=0}^{N-1} x_{|js|} x_{||js|+|ks||}.$$

Если j пробегает значения от 0 до $2n-2$, то $|js|$ пробегает те же значения, но в другом порядке, поскольку число s взаимно простое с $2n-1$. А значит, при $|ks| < n$ правая часть равенства равна $d_{|ks|}$. Если же $|ks| \geq n$, то поменяв в правой части последнего равенства сомножители местами и преобразовав индекс второго из них, получим

$$d_k^m = \sum_{j=0}^{N-1} x_{||js|+|ks||} x_{|||js|+|ks||+(N-|ks|)|}.$$

При этом индекс первого сомножителя пробегает, очевидно, все значения от 0 до $2n-2$. Поэтому $d_k^m = d_{N-|ks|}$.

Таким образом, $d_k^m = d_{|ks|'}$, где $|ks|' = |ks|$, если $|ks| < n$, и $|ks|' = N - |ks|$ — в противном случае. Аналогично устанавливается, что $d_k^{m'} = d'_{|ks|'}$ для n-угольника P'_m. Следовательно, для всех $k = 1, 2, \dots, n-1$

$$d_k^m + d_k^{m'} = d_{|ks|'} + d'_{|ks|'} = n.$$

Теорема доказана.

Заметим, что для преобразования V_m, переводящего n-угольник P в P', существует обратное преобразование V_s, $s \cdot m \equiv 1 \pmod{2n-1}$, которое переводит P_m в P. Действительно, если $\sum_{r=0}^{N-1} \bar{x}_r z^r$— полином, задающий P_m, то n-угольник $V_s(P_m)$ задается согласно (1) полиномом $\sum_{r=0}^{N-1} \bar{x}_{|rm|} z^r$, который с учетом того, что $\bar{x}_r = x_{|rs|}$, принимает вид $\sum_{r=0}^{N-1} x_{|rsm|} z^r = \sum_{r=0}^{N-1} x_r z^r$, т.е. является полиномом, задающим n-угольник P. Таким образом, преобразования V_s и V_m являются взаимно обратными: $V_s \cdot V_m = V_m \cdot V_s = V_1$. И значит, все возможные преобразования V_m, $(m, 2n-1) = 1$, образуют группу по умножению, порядок которой равен числу Эйлера $\varphi(2n-1)$, а ее единицей служит преобразование V_1, переводящее любой n-угольник P, вписанный в правильный $(2n-1)$-угольник, в себя.

Если существует одна пара антиподальных n-угольников, то согласно доказанной теореме существуют и другие пары, которые получаются из исходной пары с помощью преобразований V_m, образующих группу. Однако число различных пар может быть меньше порядка этой группы, совпадая с одним из делителей числа $\varphi(2n-1)$.

В частности, это имеет место, если число $2n-1$ простое. Обозначим через Q и Q' выпуклые n-угольники, вписанные в правильный $(2n-1)$-угольник, первый из которых будем называть *квадратичным*, а второй — *аквадратичным*, что связано с особенностями их построения. А именно, будем считать, что номера вершин Q и Q', кроме их общей вершины с номером 0, являются соответственно квадратичными вычетами и невычетами по модулю $2n-1$. Такие n-угольники действительно существуют, поскольку $2n-1$ — простое число и, значит, имеется $n-1$ квадратичных вычетов по этому модулю и столько же — квадратичных невычетов. При этом любое натуральное $m < 2n-1$ не имеет с этим числом общих делителей, бóльших 1. Поэтому для всех $m = 1, 2, \dots, 2n-2$ существуют выпуклые n-угольники Q_m и Q'_m и задающие их производящие полиномы q_m и q'_m, аналогичные фигурирующим в теореме 1.

Теорема 2. *Если $2n-1$ — простое число, то квадратичный и аквадратичный n-угольники Q и Q', вписанные в правильный $(2n-1)$-угольник,* *являются антиподальными. Причем, если натуральное число $m < 2n-1$ является квадратичным вычетом по простому модулю $2n-1$, то $Q_m = Q$ и $Q'_m = Q'$, а если m — квадратичный невычет, то $Q_m = Q'$, $Q'_m = Q$.*

Доказательство. Второе утверждение является непосредственным следствием теоремы 1, т.к., если $m \cdot s \equiv 1 \pmod{2n-1}$, то числа m и s являются одновременно либо квадратичными вычетами по модулю $2n-1$, либо квадратичными невычетами. Но тогда коэффициенты полиномов $q_m = \sum_{k=0}^{N-1} x_{|ks|} z^k$ и $q'_m = \sum_{k=0}^{N-1} x'_{|ks|} z^k$ совпадают с коэффициентами полиномов $q = \sum_{k=0}^{N-1} x_k z^k$ и $q' = \sum_{k=0}^{N-1} x'_k z^k$, соответственно, если s — квадратичный вычет по простому модулю $2n-1$, и наоборот — в противном случае, откуда и следует второе утверждение теоремы.

Для доказательства основного утверждения теоремы случаи четного и нечетного n рассмотрим отдельно, обозначив через $j_1, j_2, \dots, j_{n-1}$ в возрастающем порядке квадратичные вычеты по модулю $2n-1$.

Если n — четное, то $2n-1 \equiv -1 \pmod 4$, и значит, по свойству II [3, с. 157] квадратичные вычеты и невычеты по простому модулю $2n-1$ располагаются кососимметрично относительно $(2n-1)/2$, т.е. числа $2n-1-j_r$, $r = 1, 2, \dots, n-1$, являются квадратичными невычетами по модулю $2n-1$. Очевидно, у n-угольника Q_{j_r} при $j_r < n$, а значит, и у равного ему n-угольника Q : $d_{j_r} = d_1$. При $j_s \geq n$ из равенства n-угольников Q_{j_s} и Q следует, что $d_{N-j_s} = d_1$. Тем самым у квадратичного n-угольника Q все d_k, $k = 1, 2, \dots, n-1$, равны между собой и равны $C_n^2/(n-1) = \frac{n}{2}$. То же самое верно и для аквадратичного n-угольника Q': $d'_k = \frac{n}{2}, k = 1, 2, \dots, n-1$. А значит, для любого k $d_k + d'_k = n$, и, следовательно, Q и Q' являются антиподальными.

Если же n — нечетное число, то $2n-1 \equiv 1 \pmod{2n-1}$, и значит, по свойству II [3, с. 157] вычеты по простому модулю $2n-1$ расположены симметрично относительно $(2n-1)/2$, т.е. числа $2n-1-j_s$, $s = 1, 2, \dots, n-1$, также являются квадратичными вычетами по модулю $2n-1$, повторяющими вычеты j_s в обратном порядке. Поэтому в отличие от случая четного n равенство $d_r = d_1$ имеет место не для всех d_k, $k = 1, 2, \dots, n-1$, а только для половины из них с $r = j_1, j_2, \dots, j_{(n-1)/2}$, поскольку числа d_r с индексом, равным квадратичному вычету по модулю $2n-1$, при нечетном n могут переходить только друг в друга. То же самое справедливо и для чисел $d_{\bar r}$ с индексом, равным квадратичносму невычету по модулю $2n-1$, которые в силу этого тоже должны быть равными между собой. Так как тех и других поровну (по $\frac{n-1}{2}$), то $d_r + d_{\bar r} = \frac{C_{n-1}^2}{n-1} = n$. Аналогично доказывается, что у n-угольника Q' $d'_r + d'_{\bar r} = n$, где r и $\bar r$ имеют тот же смысл, что и для n-угольника Q. Далее, если $m = \bar r$, то по доказанному выше $Q_m = Q'$ и $Q'_m = Q$, а значит, $d_r = d'_{\bar r}$ и $d_{\bar r} = d'_r$, поскольку при этом d_1 переходит в $d_{\bar{r}}$. Следовательно, для любого $k = 1, 2, \dots, n-1$ $d_k + d'_k = n$, т.е. и в случае нечетного n n-угольники Q и Q' являются антиподальными. Теорема доказана.

Из теоремы 2 следует, что фактор-группа группы преобразований V_m по подгруппе преобразований, переводящих n-угольник Q в Q' или в себя, состоит из единичного элемента. Отметим еще, что если число $2n-1$ — простое, то это не означает, что нет других антиподальных n-угольников P и P', отличных от квадратичного и аквадратичного. Например, при $n = 7$ полиномы $q(z)$ и $q'(z)$ имеют вид

$$q = 1 + z + z^3 + z^4 + z^9 + z^{10} + z^{12},$$

$$q' = 1 + z^2 + z^5 + z^6 + z^7 + z^8 + z^{11}.$$

И тем не менее полином $p = 1 + z + z^2 + z^3 + z^5 + z^6 + z^9$ вместе с полиномом q' также задают пару антиподальных n-угольников, причем n-угольник P не является квадратичным даже в более широком смысле, т.к. никаким поворотом его нельзя совместить с Q.

Из леммы 1 следует, что квадрат модуля полинома $p(z)$, задающего n-угольник P, зависит только от величин d_k, т.е. значение для него имеют не сами номера вершин P, а их разность с точностью до $2n-1$. В связи с этим в [2] величины d_k, $k = 1, 2, \dots, n-1$, были названы нами *разностным множеством полинома*, описывающего в данном случае n-угольник P. Благодаря этому можно пользоваться установленными в [2] свойствами величин d_k как элементов разностного множества полинома $p(z)$ или более общего полинома $p_m = \sum_{k=0}^{N-1} x_k z^k$, где $z = e^{i\theta_m}, \theta_m = \frac{2\pi m}{2n-1}$, который получается из полинома $p(z)$ заменой $\theta = \frac{2\pi}{2n-1}$ на θ_m и имеет с ним одно и то же разностное множество. Действительно, непосредственно из доказательства леммы 1 следует, что

$$|p_m|^2 = n + 2\sum_{k=1}^{n-1} d_k \cos k\theta_m, \tag{3}$$

причем равенство это имеет место независимо от того, является ли число m взаимно простым с $2n-1$ или нет (на ход доказательства леммы 1 это обстоятельство никак не влияет). Отсюда при $m = 1$, в частности, следует, что $|p_1|^2 = |p|^2$, т.е. равенство (2) является частным случаем равенства (3). Тем самым коэффициенты d_k в (3) равны числам диагоналей и сторон n-угольника P, вписанного в правильный $(2n-1)$-угольник, которые видны из его центра под углом $\frac{2\pi k}{2n-1}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Заметим, что при этом аргумент функции косинус равен $\frac{2\pi km}{2n-1}$. Если $(m, 2n-1) = 1$, то существует такое натуральное $s < 2n-1$, причем единственное, что $s \cdot m \equiv 1 \pmod{2n-1}$. Тогда, пользуясь четностью функции косинус и ее периодичностью, равенство (3) можно преобразовать следующим образом, учитывая, что число $|ks|'$, равное $|ks|$ при $|ks| < n$ и $2n-1-|ks|$ в противном случае, пробегает те же значения, что и число k, но в другом порядке:

$$|p_m|^2 = n + 2\sum_{k=1}^{n-1} d_{|ks|'} \cos\frac{2\pi m|ks|}{2n-1} = n + 2\sum_{k=1}^{n-1} d_{|ks|'} \cos\frac{2\pi k}{2n-1}. \qquad (4)$$

И так как в доказательстве теоремы 1 установлено, что число $d_{|ks|'}$ равно числу d_k^m диагоналей и сторон n-угольника P_m, получающегося из P преобразованием V_m, которые видны из центра описанной окружности под углом $\frac{2\pi k}{2n-1}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, то равенство (3) при $(m, 2n-1) = 1$ представляет фактически квадрат модуля полинома $p_m(z)$, задающего n-угольник P_m, что оправдывает его обозначение p_m в равенстве (3). Но при этом следует иметь в виду, что соотношение (3) справедливо для всех значений m, в том числе и для тех, которые не являются взаимно простыми с $2n-1$ и для которых не существует n-угольника P_m, вписанного в правильный $(2n-1)$-угольник (представление (4) в этом случае места не имеет).

Теорема 3. *Если выпуклые n-угольники P и P', вписанные в правильный $(2n-1)$-угольник, являются антиподальными, то производящие их полиномы $p_m = \sum_{k=0}^{N-1} x_k z^k$ и $p'_m = \sum_{k=0}^{N-1} x'_k z^k$, где $z = e^{i\theta_m}$, $\theta_m = \frac{2\pi m}{2n-1}$, удовлетворяют при любом $m = 1, 2, \dots, 2n-2$ равенству*

$$|p_m|^2 + |p'_m|^2 = n. \qquad (5)$$

И наоборот, если при любом $m = 1, 2, \dots, 2n-2$ полиномы p_m и p'_m удовлетворяют равенству (5), то выпуклые n-угольники P и P', порождаемые полиномами $p = p_1(z)$ и $p' = p'_1(z)$, являются антиподальными.

Доказательство. По аналогии с (3) квадрат модуля полинома p'_m равен:

$$|p'_m|^2 = n + 2\sum_{k=1}^{n-1} d'_k \cos k\theta_m,$$

где d'_k — число диагоналей и сторон n-угольника P', видных из центра описанной окружности под углом $\frac{2\pi k}{2n-1}, k = 1, 2, \dots, n-1$. Комбинируя это равенство с (3), получаем

$$|p_m|^2 + |p'_m|^2 - n = n + 2\sum_{k=1}^{n-1} (d_k + d'_k) \cos k\theta_m. \qquad (6)$$

Замечая, что согласно [4, с. 88]

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\cos k\theta_m=\frac{\sin(\frac{2n-1}{2}\cdot\theta_m)}{2\sin\frac{\theta_m}{2}}=\frac{\sin m\pi}{2\sin\frac{\pi m}{2n-1}}=0,$$

видим, что если n-угольники P и P' — антиподальные, т.е. для всех значений k по определению $d_k+d'_k=n$, то правая часть (6) обращается в нуль. А тогда равна нулю и левая часть, причем при любом $m=1,2,\dots,2n-2$, откуда и следует первое утверждение теоремы.

Наоборот, если при любом m левая часть равенства (6) обращается в нуль, то это же справедливо и для его правой части. По доказанному выше это заведомо имеет место, если для всех $k=1,2,\dots,n-1$ $d_k+d'_k=n$, что соответствует случаю антиподальных n-угольников P и P'. Докажем, что других решений получившаяся система линейных уравнений (относительно неизвестных $d_k+d'_k$) не имеет.

Учитывая, что $\cos k\theta_{N-m}=\cos k\theta_m$, для этого достаточно рассмотреть $n-1$ уравнений системы (с $m<n$). Пусть $D=|a_{km}|$ — определитель получающейся системы линейных уравнений, где $a_{km}=\cos k\theta_m=\cos\frac{2\pi km}{2n-1}$. Поскольку квадрат симметрической матрицы (a_{km}) является *матрицей с доминирующей диагональю*, то согласно утверждению 3 [5, с. 200] матрица $(a_{km})^2$ — неособая. Действительно,

$$\sum_{k=1}^{n-1}a_{km}^2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(1+\cos\frac{4\pi mk}{2n-1})=\frac{2n-3}{4}+\frac{1}{2}\,(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\cos 2k\theta_m)=\frac{2n-3}{4},$$

т.е. все элементы главной диагонали матрицы $(a_{km})^2$ равны $\frac{2n-3}{4}$. Ее остальные элементы $\bar{a}_{ms}$, $m\neq s$, также равны друг другу:

$$\bar{a}_{ms}=\sum_{k=1}^{n-1}a_{mk}a_{ks}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(\cos\frac{2\pi(m-s)k}{2n-1}+\cos\frac{2\pi(m+s)k}{2n-1})=-\frac{1}{2}.$$

И так как $\frac{2n-3}{4}>\sum_{s\neq m}|\bar{a}_{ms}|=\frac{n-2}{2}$, то $(a_{km})^2$ — матрица с доминирующей диагональю, и, значит, определитель D не равен нулю, т.е. наша (неоднородная) система имеет единственное решение $d_k+d'_k=n$, $k=1,2,\dots,n-1$. А поскольку при $(m,2n-1)=1$ полиномы p_m и p'_m задают выпуклые n-угольники P_m и P'_m, то по лемме 2 величины d_k и d'_k для любого k равны соответственно числу диагоналей (и сторон) n-угольников $P_1=P$ и $P'_1=P'$, которые видны из центра описанной окружности под углом $\frac{2\pi k}{2n-1}$, т.е. P и P' являются антиподальными n-угольниками. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Утверждение теоремы 3 справедливо не только при естественном условии $n\geq 3$, но и при $n=2$, если под двуугольником понимать отрезок (одномерный симплекс).

З а м е ч а н и е 2. Поскольку $z = e^{\frac{2\pi m i}{2n-1}}$, $m = 1, 2, \ldots, 2n-2$ — корни из единицы степени $2n-1$, то $1 + \sum_{k=1}^{N-1} z^k = 0$, как сумма всех корней из единицы. И значит, равенство (5) справедливо для полиномов $\bar{p}_m$ и $\bar{p}'_m$, содержащих те слагаемые суммы $1+\sum_{k=1}^{N-1} z^k$, которые не входят в полиномы p_m и p'_m, соответственно. А это значит, что для $n \geq 3$ существуют также $(n-1)$-угольники — антиподы, которые характеризуются тем, что для любого $k = 1, 2, \ldots, n-1$ $\bar{d}_k + \bar{d}'_k = n-2$.

3. Необходимые и достаточные условия существования полуциркулянтной матрицы Адамара порядка $4n$

Понятие полуциркулянтной матрицы Адамара было введено нами в [1, с. 460–461]. Для удобства изложения напомним его. Вводится оно для матриц H порядка $4n$ и вида

$$H = \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A. \end{pmatrix}$$

При этом подматрицы A и B имеют порядок $2n$ и задаются равенствами

$$A = W + \sum_{k=1}^{N} a_k U^k, \quad B = W + \sum_{m=1}^{N} b_m U^m V,$$

где каждый коэффициент a_k и b_m равен $+1$ или -1, причем $\sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{m=1}^{N} b_m = 1$, а U, V и W являются специальными матрицами порядка $2n$, все элементы которых, за исключением указанных в фигурных скобках, равны нулю:

$$U = (u_{ij}) = \{e_{00}, e_{k|k-1|}\},\ V = (v_{ij}) = \{e_{00}, e_{|1-k|k}\},\ W = (w_{ij}) = \{e_{0k}, -e_{k0}\},$$

где индексы i, j пробегают значения от 0 до $2n-1$, а k — от 1 до $2n-1$, причем знак модуля означает, как и прежде, положительный вычет по модулю $2n-1$, в частности, при $k = 1$ $|k-1| = 2n-1$, а индексы при e указывают местоположение элемента, отличного от нуля, при этом сама буква e означает его равенство $+1$ (если перед e стоит минус, то -1). Три последние матрицы обладают следующими свойствами:

$$U^{2n-1} = I, \quad V^2 = I, \quad W^2 = -\sum_{k=1}^{N} U^k,$$

и, кроме того, матрицы U^k и $U^k V$ без нулевых строки и столбца являются *циркулянтами* (правым и левым, соответственно) в том смысле, что они получаются последовательной циклической перестановкой элементов их первых строк (вправо или влево на одну позицию, причем последний элемент при смещении вправо переходит каждый раз на первую позицию, а первый элемент при смещении влево — на последнюю позицию в строке). Поскольку матрица W вносит ненулевой вклад только в нулевые строки и столбцы матриц A и B, то их подматрицы, не содержащие оных, также являются циркулянтами — правым и левым, соответственно, а сама матрица H с такими подматрицами A и B называется *полуциркулянтной.*

Если H — матрица Адамара, то по определению $HH' = 4nI_{4n}$, где I_{4n} — единичная матрица порядка $4n$. Для полуциркулянтной матрицы Адамара, как установлено в [1, с. 462], справедливо равенство

$$-2W^2 + \sum_{k=1}^{N} a_k U^k \cdot \sum_{k=1}^{N} a_k U^{-k} + \sum_{m=1}^{N} b_m U^m \cdot \sum_{m=1}^{N} b_m U^{-m} = 4n\, I_{2n},$$

где $U^{-k} = U^{2n-1-k}$. Если сумму тех членов $\sum_{k=1}^{N} a_k U^k$ (соответственно $\sum_{m=1}^{N} b_m U^m$), для которых $a_k = +1$ ($b_m = +1$), обозначить через $T_1(T_2)$ и положить $S = \sum_{k=1}^{N} U^k$, то последнее равенство можно упростить:

$$T_1\bar{T}_1 + T_2\bar{T}_2 = n(S + I_{2n}),$$

где $\bar{T}_1(\bar{T}_2)$ получается из $T_1(T_2)$ заменой $U^k(U^m)$ на $U^{-k}(U^{-m})$. Поскольку в этом соотношении фигурирует только матрица U и ее степени, причем по определению $U^{2n-1} = I$, то его можно рассматривать как соотношение между элементами группового кольца $R(C)$ над целыми числами, где C — циклическая группа. Поэтому справедливо следующее утверждение [1, с. 463].

Основная лемма. *Пусть* C *— циклическая группа порядка $2n-1$ с порождающим элементом u $(u^{2n-1} = 1)$ и $s = 1+\sum_{k=1}^{N-1} u^k$. Если существуют такие полиномы $t_1 = \sum_{r=1}^{n} u^{i_r}$ и $t_2 = \sum_{r=1}^{n} u^{j_r}$, где $\{i_r\}$ и $\{j_r\}$ — наборы различных натуральных чисел, не превосходящих $2n-1$, что для них и сопряженных им полиномов $\bar{t}_1 = \sum_{r=1}^{n} u^{2n-1-i_r}, \bar{t}_2 = \sum_{r=1}^{n} u^{2n-1-j_r}$ в групповом кольце $R(C)$ над целыми числами выполняется соотношение*

$$t_1\bar{t}_1 + t_2\bar{t}_2 = n(1+s), \tag{7}$$

то существует матрица Адамара порядка $4n$ полуциркулянтного типа.

Для построения матрицы Адамара, существование которой утверждается этой леммой, достаточно от объектов, обозначенных в ней малыми буквами, перейти к объектам, обозначенным выше соответствующими большими буквами, и воспользоваться определениями матриц A, B и H. Учитывая, что все элементы нулевого столбца матрицы W, кроме w_{00}, равны -1, домножим все строки матрицы Адамара, существование которой утверждается основной леммой, кроме нулевой и $2n$-й, на -1. Получим *нормализованную* матрицу Адамара

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & \cdots \\ \vdots & \bar{A} & \vdots & \bar{B} \\ 1 & \cdots & -1 & \cdots \\ \vdots & \bar{B} & \vdots & -\bar{A} \end{pmatrix},$$

где $\bar{A}$ и $\bar{B}$ — матрицы порядка $2n-1$, являющиеся циркулянтами, правым и левым, соотвественно.

В [2] было доказано (лемма 1, с. 60), что для того, чтобы в групповом кольце $R(C)$ выполнялось соотношение (7), необходимо и достаточно, чтобы для всех $m = 1, 2, \ldots, 2n-2$ и $u = e^{\frac{2\pi m i}{2n-1}}$ полиномы $t_1(u)$ и $t_2(u)$ удовлетворяли в комплексной плоскости равенству $|t_1|^2 + |t_2|^2 = n$ (сопряженные полиномы t_1 и $\bar{t}_1$ (t_2 и $\bar{t}_2$) при этом являются комплексно-сопряженными). Обозначим полином $t_1(u)$, соответствующий данному числу m, через $p_m(u)$, а $t_2(u)$ — через $p'_m(u)$ и сопоставим полиномам $p = p_1(u)$ и $p' = p'_1(u)$ выпуклые n-угольники P (P'), вписанные в правильный $(2n-1)$-угольник. А именно, отнесем к вершинам n-угольника P (P') те вершины правильного $(2n-1)$-угольника, номера которых совпадают с показателями степени i_r $(j_r), r = 1, 2, \ldots, n$, полинома t_1 (t_2). Тогда из теоремы 3 вытекает следующий результат.

Теорема 4. *Для того чтобы существовала полуциркулянтная матрица Адамара порядка $4n$, необходимо и достаточно, чтобы существовали антиподальные n-угольники, вписанные в правильный $(2n-1)$-угольник.*

Для доказательства достаточно заметить, что если для всех $m = 1, 2, \ldots, 2n-2$ $|t_1|^2 + |t_2|^2 = n$, то для любого m $|p_m|^2 + |p'_m|^2 = n$, и значит, n-угольники P и P', задаваемые полиномами $p = p_1(u)$ и $p' = p'_1(u)$, являются антиподальными, и наоборот.

Из теоремы 4 следует, в частности, что если $2n-1$ — простое число, то согласно теореме 2 матрица Адамара порядка $4n$ полуциркулянтного типа всегда существует. Кроме того, учитывая упомянутый во введении результат Коксетера, отсюда получается достаточное условие существования вписанного в $(4n-1)$-мерный куб правильного симплекса той же размерности.

Следствие. *Для того чтобы в куб размерности $4n-1$ можно было вписать правильный симплекс той же размерности, достаточно чтобы существовали вписанные в правильный $(2n-1)$-угольник выпуклые n-угольники — антиподы.*

В связи со всем этим особый интерес приобретает вопрос о существовании вписанного в правильный $(2n-1)$-угольник n-угольника P, число диагоналей и сторон которого, видных из центра описанной окружности под углом $\frac{2\pi k}{2n-1}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, равно d_k. Разумеется, при естественном условии, что $\sum_{k=1}^{n-1} d_k = C_n^2 = n(n-1)/2$. Пусть $p = \sum_{k=0}^{N-1} x_k z^k$ — полином, порождающий n-угольник P. Тогда, как следует из доказательства леммы 1, этот вопрос эквивалентен вопросу о существовании целочисленного решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{N-1} x_i & = & n; \\ \sum\limits_{i=0}^{N-1} x_i^2 & = & n; \\ \sum\limits_{i=0}^{N-1} x_i x_{|i+k|} & = & d_k, \\ k & = & 1, 2, \dots, n-1. \end{cases} \tag{8}$$

Поскольку матрица D_k каждой квадратичной формы, соответствующей последним $n-1$ уравнениям системы (8), представляет собой циркулянт порядка $n-1$ [6, с. 272–273], то все они имеют одни и те же собственные векторы $t_i = \{1, z_i, z_i^2, \dots, z_i^{N-1}\}$, где z_i, $i = 1, 2, \dots, 2n-1$ — корни из единицы степени $2n-1$ $(z^{2n-1} = 1)$. И значит, приводятся к диагональному виду одним и тем же линейным преобразованием $x = Ty$, где T — ортогональная матрица, столбцами которой являются нормированные собственные векторы, которые в силу симметрии данных квадратичных форм можно выбрать вещественными. В результате, "квадратичная" часть системы (8) сводится к следующему виду [2, с. 69]:

$$\begin{cases} y_0^2 & + & \sum\limits_{j=1}^{n-1} (y_j^2 + y_{N-j}^2) = n, \\ y_0^2 & + & \sum\limits_{j=1}^{n-1} (y_j^2 + y_{N-j}^2) \cos \frac{2\pi kj}{2n-1} = d_k, \\ k & = & 1, 2, \dots, n-1, \end{cases} \tag{8'}$$

где коэффициенты при y_0^2, $y_1^2, \dots, y_{N-1}^2$ в каждом из последних $n-1$ уравнений являются собственными значениями соответствующей матрицы D_k. Решение этой системы для $j = 1, 2, \dots, n-1$, найденное в [2], имеет вид

$$y_0^2 = \frac{n^2}{2n-1},\ y_j^2 + y_{N-j}^2 = \frac{2}{2n-1}\Big(n + 2\sum_{k=1}^{n-1} d_k \cos \frac{2\pi kj}{2n-1}\Big). \tag{9}$$

При этом, учитывая что $x = Ty$, решение исходной смешанной системы (8) в развернутом виде можно записать следующим образом [2]:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \frac{1}{\sqrt{2n-1}}(y_0 + \sqrt{2}\sum_{j=1}^{n-1} y_j),\\
x_m &= \frac{1}{\sqrt{2n-1}}[y_0 + \sqrt{2}\sum_{j=1}^{n-1}(y_j \cos\theta_m j + y_{N-j}\sin\theta_m j)],\\
x_{N-m} &= \frac{1}{\sqrt{2n-1}}[y_0 + \sqrt{2}\sum_{j=1}^{n-1}(y_j \cos\theta_m j - y_{N-j}\sin\theta_m j)],
\end{aligned}
\tag{10}
$$

где $\theta_m = \frac{2\pi m}{2n-1}$, $m = 1, 2, \dots, n-1$, причем, чтобы удовлетворить первому (линейному) уравнению системы (8), надо положить $y_0 = \frac{n}{\sqrt{2n-1}}$.

Отсюда следует, что для того чтобы решение (10) системы (8) было целочисленным, правые части d_k уравнений системы (8) прежде всего должны быть такими, чтобы при любом $j = 1, 2, \dots, n-1$ правая часть (9) была неотрицательной. Но даже тогда произвол в выборе координат $y_1, y_2, \dots, y_{N-1}$ вектора $y = T'x$ (т.к. по определению матрица T — ортогональная, то $y = T^{-1}x = T'x$) остается настолько большим, что, будучи вещественным, решение (10) может быть заведомо не целочисленным. Поэтому координаты вектора y должны удовлетворять дополнительным условиям.

Обозначив правые части равенств (10) через W_0, W_m и W_{N-m}, положим $W = W_0^3 + \sum_{m=1}^{n-1}(W_m^3 + W_{N-m}^3)$ и рассмотрим следующую (*идемпотентную*) систему уравнений для координат вектора y:

$$
y = T'(\frac{1}{3}\,\bar{\nabla} W),
\tag{11}
$$

где $\bar{\nabla} W$ — вектор, координатами которого являются производные $\frac{\partial W}{\partial W_0}$, $\frac{\partial W}{\partial W_m}$ и $\frac{\partial W}{\partial W_{N-m}}$, $m = 1, 2, \dots, n-1$. Так как $T' \cdot T = I$, то, решая (11) относительно $W_i^2 = \frac{1}{3}\frac{\partial W}{\partial W_i}$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, получаем $\frac{1}{3}\bar{\nabla} W = Ty = x$, и, следовательно, $W_i^2 = x_i = W_i$. А значит, каждое x_i, $i = 0, 1, \dots, N-1$, равно нулю или единице. В связи с этой особенностью система уравнений (11) и названа нами идемпотентной. В частности, отсюда следует, что любое решение системы (11) как системы уравнений относительно координат y_0, $y_1, \dots, y_{N-1}$ вектора y — вещественное, причем $y_0 = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\sum_{i=0}^{N-1} x_i \ge 0$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Для того чтобы решение (10) системы уравнений (8) было целочисленным, необходимо и достаточно, чтобы координаты $y_0, y_1, \dots, y_{N-1}$ вектора y, удовлетворяющие условиям (9) с $y_0 = n/\sqrt{2n-1}$, удовлетворяли* *дополнительно и условиям (11). Все решения системы уравнений (11) — вещественные, причем общее их число равно* 2^{2n-1}.

Заметим, что последнее утверждение леммы следует из того, что общее число комбинаций наборов $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$, каждое из которых равно 0 или 1, есть в точности 2^{2n-1}. Среди них имеется C_{2n-1}^n комбинаций таких, что $\sum_{i=0}^{N-1} x_i = n$, т.е. отвечающих выпуклым n-угольникам, которые вписаны в правильный $(2n-1)$-угольник.

Далее, поскольку координаты y_j и y_{N-j}, $j = 1, 2, \dots, n-1$, вектора y удовлетворяют соотношениям (9), которые, с точностью до обозначений, отличаются от представления (3) для квадрата модуля полинома p_m только множителем $\frac{2}{2n-1}$, то для антиподальных n-угольников P и P' получаем следующее необходимое и достаточное условие, которое непосредственно следует из теоремы 3.

Лемма 3. *Для того чтобы вписанные в правильный* $(2n-1)$*-угольник выпуклые n-угольники P и P', порождаемые полиномами* $p = \sum_{k=0}^{N-1} x_k z^k$ *и* $p' = \sum_{k=0}^{N-1} x'_k z^k$, *были антиподальными, необходимо и достаточно, чтобы определяемые равенством $y = T'x$ (или $y' = T'x'$) координаты $y_1, y_2, \dots, y_{N-1}$ и $y'_1, y'_2, \dots, y'_{N-1}$ соответствующих им векторов y и y' удовлетворяли условиям*

$$y_j^2 + y_{N-j}^2 + {y'_j}^2 + {y'}_{N-j}^2 = \frac{2n}{2n-1}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \tag{12}$$

Докажем теперь основной результат нашего исследования.

Теорема 5. *Для того чтобы существовала полуциркулянтная матрица Адамара порядка $4n$, необходимо и достаточно, чтобы система уравнений (11) имела два таких решения $y = \{y_0, y_1, \dots, y_{N-1}\}$ и $y' = \{y'_0, y'_1, \dots, y'_{N-1}\}$, что $y_0 = y'_0 = n/\sqrt{2n-1}$, и чтобы остальные координаты векторов y и y' удовлетворяли условиям (12).*

Доказательство. Согласно теореме 4 существование полуциркулянтной матрицы Адамара порядка $4n$ влечет существование антиподальных n-угольников P и P', задаваемых некоторыми полиномами $p = \sum_{k=0}^{N-1} x_k z^k$ и $p' = \sum_{k=0}^{N-1} x'_k z^k$. Коэффициенты этих полиномов определяются посредством векторных равенств $y = T'x$ и $y' = T'x'$, где T' — транспонированная матрица коэффициентов системы (10), $y = \{y_0, y_1, \dots, y_{N-1}\}$ и $y' = \{y'_0, y'_1, \dots, y'_{N-1}\}$ — два решения системы (11). При этом, очевидно, $y_0 = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \sum_{k=0}^{N-1} x_k = \frac{n}{\sqrt{2n-1}}$, $y'_0 = \frac{n}{\sqrt{2n-1}}$. И кроме того, в силу антиподальности P и P' для них по лемме 3 выполняются и условия (12).

Для доказательства достаточности заметим сначала, что если система уравнений (11) имеет два решения $y = \{y_0, y_1, \dots, y_{N-1}\}$ и $y' = \{y'_0, y'_1, \dots, y'_{N-1}\}$, то по лемме 2 соответствующие им решения (10) системы уравнений (8) являются целочисленными. Поэтому, если $y_0 = y'_0 = \frac{n}{\sqrt{2n-1}}$, то $\sum_{k=0}^{N-1} x_k = \sum_{k=0}^{N-1} x'_k = n$ и, значит, данные решения порождают вписанные в правильный $(2n-1)$-угольник n-угольники P и P', задаваемые полиномами $p = \sum_{k=0}^{N-1} x_k z^k$ и $p' = \sum_{k=0}^{N-1} x'_k z^k$. В силу (12) эти n-угольники являются по лемме 3 антиподальными. Следовательно, согласно теореме 4 существует полуциркулянтная матрица Адамара порядка $4n$. Теорема доказана.

Пусть $\nabla W(y)$ — вектор с координатами $\frac{\partial W}{\partial y_i}$, $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Тогда идемпотентную систему уравнений (11) можно записать в виде

$$y = \frac{1}{3}\,\nabla W. \tag{13}$$

Действительно, для любого допустимого значения i : $\frac{1}{3}\sum_{s=0}^{N-1} W_s^2\,\frac{\partial W_s}{\partial y_i}$, где $\frac{\partial W_s}{\partial y_i}$ при изменении s от 0 до $N-1$ пробегает все элементы i-го столбца матрицы T системы (10) и, значит, элементы i-й строки транспонированной матрицы T', входящей в уравнение (11). Непосредственные вычисления показывают, что вектор ∇W имеет следующие координаты:

$$\frac{\partial W}{\partial y_0} = \frac{3}{\sqrt{2n-1}}\sum_{i=0}^{N-1} y_i^2,\ \frac{\partial W}{\partial y_k} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2n-1}}\Bigg[\sqrt{2}y_0 y_k + \sum_{j=1}^{n-k-1}(y_j y_{j+k}$$

$$+y_{N-j}y_{N-j-k}) + \frac{1}{2}\sum_{r=1-k}^{k-1}\left(y_{[(k+r)/2]}y_{[(k-r)/2]} - y_{N-[(k+r)/2]}y_{N-[(k-r)/2]}\right)\Bigg], \tag{14}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y_{N-k}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2n-1}}\left[(\sqrt{2}-1)y_0 y_{N-k} + \sum_{s=n}^{N-1}(y_{|s+k|'} - y_{|s-k|'})y_s\right],$$

где $k = 1, 2, \dots, n-1$, $|s \pm k|' = \min(|s \pm k|,\ N - |s \pm k|)$, а $[(k \pm r)/2]$ равно $\frac{k \pm r}{2}$, если это — число целое или $\frac{N-(k \pm r)}{2}$ — в противном случае.

Заметим, что выражения для производных $\frac{\partial W}{\partial y_{N-k}}$ представляют собой однородные функции первой степени как относительно переменных y_j, $j < n$, так и относительно переменных y_s, $s \geq n$, причем коэффициенты $\frac{\partial W}{\partial y_{N-k}}$ и $\frac{\partial W}{\partial y_s}$ при y_s и y_{N-k} соответственно равны. Что касается выражения для $\frac{\partial W}{\partial y_k}$, то оно вообще не содержит слагаемых с $y_j y_s$, $0 < j < n$, $s \geq n$, зато в него входит (при $r = 0$) разность квадратов $\frac{1}{2}(y^2_{[k/2]} - y^2_{N-[k/2]})$. Кроме того, пары индексов в первой и второй суммах, если рассматривать все $\frac{\partial W}{\partial y_k}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, пробегают одни и те же значения, что следует из соотношения $\sum_{j=k+1}^{n-1} y_{[(j+k)/2]}y_{[(j-k)/2]} = \sum_{j=1}^{n-k-1} y_j y_{j+k}$, справедливого для каждого $k = 1, 2, \dots, n-2$. Поэтому

$$\frac{\sqrt{2n-1}}{3\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial W}{\partial y_k}=\sqrt{2}\,y_0\sum_{k=1}^{n-1}y_k+2\sum_{j<s<n}y_jy_s+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}(y_j^2-y_{N-j}^2)$$

$$=\frac{1}{2}\Bigl[(y_0+\sqrt{2}\sum_{k=1}^{n-1}y_k)^2-\sum_{i=0}^{N-1}y_i^2\Bigr].$$

А с учетом первого равенства из (14)

$$\frac{\partial W}{\partial y_0}+\sqrt{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial W}{\partial y_k}=\frac{3}{\sqrt{2n-1}}(y_0+\sqrt{2}\sum_{k=1}^{n-1}y_k)^2.$$

Поскольку функция $W=W(y)$ является по определению однородным многочленом степени 3, то по правилу Эйлера

$$\sum_{i=0}^{N-1}y_i\,\frac{\partial W}{\partial y_i}=3W.$$

А значит, умножив уравнения системы (13) на соответствующие переменные y_i и складывая их, получим, учитывая, что квадрат длины вектора y равен n (см. первое уравнение системы (8′)): $W=n$. Это уравнение определяет в аффинном пространстве A^{2n-1} некоторую гиперповерхность H. Если перейти к однородным координатам $y_0, y_1, \dots, y_{N-1}, y_N$, то данное уравнение примет вид $W-ny_N^3=0$ и H можно рассматривать в качестве гиперповерхности проективного пространства P^{2n-1}.

Теорема 6. *Кубика H, задаваемая уравнением $W=n$, является неприводимой гладкой поверхностью в P^{2n-1}.*

Доказательство. Пусть H — приводима, и значит, левая часть ее уравнения разлагается на множители. Не ограничивая общности, можно считать, положив $y_N=1$, что она представима в виде произведения квадратичного и линейного сомножителей, т.е.

$$W-n=(\sum_{i,j=0}^{N-1}a_{ij}y_iy_j+\sum_{i=0}^{N-1}a_iy_i+a)(\sum_{i=0}^{N-1}b_iy_i+1).$$

Поскольку W — однородный полином степени 3, т.е. не содержит слагаемых меньшей степени, то $a_i=ab_i$, $a_{ij}=ab_ib_j$. А значит, предполагаемое разложение приводится к виду

$$a[(\sum_{i=0}^{N-1}b_iy_i)^2-\sum_{i=0}^{N-1}b_iy_i+1](\sum_{i=0}^{N-1}b_iy_i+1)=a((\sum_{i=0}^{N-1}b_iy_i)^3+1).$$

Но тогда любая производная $\frac{\partial W}{\partial y_{N-k}}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, должна содержать хотя бы одно слагаемое с квадратом одной из переменных $y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}$, что невозможно, т.к. согласно (14) такие производные содержат лишь члены вида $y_j y_s$, где $j < n$, а $s \geq n$. А значит, гиперповерхность H — неприводимая.

Чтобы доказать гладкость H, надо установить, что эта гиперповерхность не имеет особых точек, а именно, точек, в которых производные от левой части ее уравнения по всем переменным одновременно обращаются в нуль [7, с. 113–115]. Но так как координата y_N входит в уравнение H только в третьей степени, то в особых точках $\frac{\partial W}{\partial y_N} = 0$. А значит, существование на H в P^{2n-1} особых точек равносильно существованию нетривиального решения следующей системы уравнений:

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial y_i} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1,$$

что невозможно. Действительно, в силу однородности W первое уравнение является следствием остальных. Что касается последних, то они представляют собой не что иное как идемпотентную систему уравнений (11) с нулевой левой частью, а значит, $W_i^2 = W_i = 0, i = 0, 1, \ldots, N-1$. Отсюда следует, что все координаты вектора y обязательно равны нулю.

Итак, рассматриваемая система уравнений имеет только нулевое решение, а значит, кубика H не имеет особых точек, т.е. является гладкой гиперповерхностью. Теорема доказана.

Лемма 4. *Все стационарные точки функции Лагранжа*

$$W - \lambda(\sum_{i=0}^{N-1} y_i^2 - n)$$

при $\lambda = \frac{3}{2}$ являются точками соприкосновения сферы S, задаваемой уравнением $\sum_{i=0}^{N-1} y_i^2 = n$, и кубики H.

Доказательство. Стационарные точки данной функции Лагранжа находятся из следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial W}{\partial y_i} - 2\lambda y_i = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1,$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} y_i^2 = n.$$

Последнее уравнение задает сферу S радиуса $\sqrt{n}$. Умножая первые уравнения на $y_0, y_1, \dots, y_{N-1}$ и складывая их, в силу однородности полинома W получим

$$3W - 2\lambda \sum_{i=0}^{N-1} y_i^2 = 0.$$

Отсюда при $\lambda = \frac{3}{2}$ находим $W = n$, т.е. все стационарные точки с $\lambda = \frac{3}{2}$ являются общими точками кубики H и сферы S. Докажем, что H и S имеют в этих точках общую касательную плоскость.

Касательная плоскость H в стационарной точке $\bar{y}_0$, $\bar{y}_1, \dots$, $\bar{y}_{N-1}$ задается уравнением

$$\sum_{i=0}^{N-1} (y_i - \bar{y}_i) \frac{\partial \bar{W}}{\partial y_i} = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{i=0}^{N-1} y_i \frac{\partial \bar{W}}{\partial y_i} - 3n = 0,$$

где $\frac{\partial \bar{W}}{\partial y_i}$ — значение этой производной в данной стационарной точке. И так как $\frac{\partial \bar{W}}{\partial y_i} = 2\lambda \bar{y}_i = 3\bar{y}_i$, то имеем $\sum_{i=0}^{N-1} y_i \bar{y}_i = n$. А это есть уравнение касательной плоскости сферы S в той же точке. Лемма доказана.

Как следует из теоремы 5, вопрос о существовании матрицы Адамара порядка $4n$ полуциркулянтного типа сводится к вопросу о разрешимости в поле вещественных чисел системы уравнений, в которой число уравнений, равное $5n-3$, значительно превышает число неизвестных $(4n-4)$, из-за чего утвердительный ответ на него кажется весьма проблематичным. Однако, если судить по результатам предыдущей статьи [2] — теоретическим (доказательство существования бесконечных серий полуциркулянтных матриц Адамара) и практическим (положительные результаты компьютерного счета для всех $n \le 20$), то напрашивается совсем другой вывод. Поэтому необходимо дальнейшее изучение особенностей получающейся при этом системы уравнений.

В связи с этим представляет интерес доказательство следующей теоремы существования для полуциркулянтных матриц Адамара порядка $4n$.

Пусть $W = W(y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ — левая часть уравнения кубики H в A^{2n-1}. Обозначим через W' полином относительно переменных $y'_0, y'_1, \dots$, y'_{N-1}, аналогичный W, и рассмотрим следующую систему из $4n-2$ уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial W}{\partial y_i} = 3y_i, \qquad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ (y_0 + \sqrt{2}\sum\limits_{j=1}^{n-1} y_j - \sqrt{2n-1})^4 + (y'_0 - \frac{n}{\sqrt{2n-1}})^4 \\ \quad + \sum\limits_{j=1}^{n-1} (y_j^2 + y_{N-j}^2 + y_j'^2 + y_{N-j}'^2 - \frac{2n}{2n-1})^2 \qquad = \quad 0, \\ \frac{\partial W'}{\partial y'_i} = 3y'_i, \qquad i = 0, 1, \dots, N-1. \end{array}\right. \tag{15}$$

Теорема 7. *Система $4n-2$ неоднородных алгебраических уравнений (15) от $4n-2$ неизвестных $y_0, y_0', \dots, y_{2n-2}, y_{2n-2}'$ имеет при любом натуральном $n > 1$, с учетом кратности, 2^{4n-1} решений. Если хотя бы в одном из этих решений y_0 принимает вещественное значение, то тогда существует полуциркулянтная матрица Адамара порядка $4n$ и в $(4n-1)$-мерный куб можно вписать правильный симплекс той же размерности.*

Первое утверждение следует из известной теоремы Безу об индексе пересечения для произведения проективных пространств [7, с. 268–269] и теоремы 6, а второе — из идемпотентности системы (11) и теоремы 5.

Список литературы

[1] *А.И. Медяник*, Вписанный в куб правильный симплекс и матрица Адамара полуциркулянтного типа. — *Мат. физ., анализ, геом.* (1997), т. 4, № 4, с. 458–471.

[2] *А.И. Медяник*, Вписанный в куб правильный симплекс, полуциркулянтные матрицы Адамара и гауссовы суммы. — *Мат. физ., анализ, геом.* (2001), т. 8, № 1, с. 58–81.

[3] *Г. Хассе*, Лекции по теории чисел. Изд-во иностр. лит., Москва (1953).

[4] *Г. Полиа, Г. Сеге*, Задачи и теоремы из анализа. Ч. II. Наука, Москва (1978).

[5] *П. Ланкастер*, Теория матриц. Наука, Москва (1982).

[6] *Р. Беллман*, Введение в теорию матриц. Наука, Москва (1969).

[7] *И.Р. Шафаревич*, Основы алгебраической геометрии. Наука, Москва (1972).

Antipodal n-angles inscribed into the regular $(2n-1)$-angle and half-circulant Hadamard matrices of order $4n$

A.I. Medianik

It's discovered a necessary and sufficient conditions for existence the half-circulant Hadamard matrix of order $4n$ and besides in two forms — geometric and analitic ones. The geometrical necessary and sufficient conditions are being reduced to a question of existence antipodal n-angles inscribed into the regular $(2n-1)$-angle while the analitical one — to solvability in the field of real numbers a nonhomogeneous system square $5n-3$ equations with $4n-4$ unknown quantities, which closely connect with a some cubic nonreducible smoth hypersurface in $(2n-1)$-dimensional projective space.