Математическая физика, анализ, геометрия
2004, т. 11, № 2, с. 127–134

О точности многочленной асимптотики субгармонической функции с массами в параболе

П.З. Агранович

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины пр. Ленина, 47, Харьков, 61103, Украина

E-mail:agranovich@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 12 февраля 2003 г.
Представлена И.В. Островским

Установлена точность условий теоремы о восстановлении многочленной асимптотики меры Рисса по заданному асимптотическому представлению субгармонической функции с массами в параболе.

Встановлено точність умов теореми про відновлення многочленної асимптотики міри Рісса по заданому асимптотичному зображенню субгармонічної функції з масами у параболі.

Пусть $f(t)$, $t > 0$ — заданная функция. Многочленной (полиномиальной) асимптотикой функции $f(t)$ при $t \to \infty$ называется выражение следующего вида:

$$f(t) = \Delta_1 t^{\rho_1} + \Delta_2 t^{\rho_2} + \ldots + \Delta_n t^{\rho_n} + \kappa(t),$$

где Δ_j — вещественные константы; $0 < [\rho_1]^\star < \rho_n < \ldots < \rho_1$, а последнее слагаемое справа, т.е. функция $\kappa(t)$, мaлó в некотором смысле по сравнению с предыдущим членом. Аналогично понимается и выражение "многочленная асимптотика функции $f(z)$, $z \to \infty$". В этом случае коэффициенты Δ_j, $j = 1, \ldots, n$, являются функциями от $\theta = \arg z$, а $t = |z|$.

В работе продолжено изучение асимптотической зависимости между ростом субгармонической функции $u(z)$ и ее меры Рисса μ в терминах многочленных асимптотик. Как известно (см. [2, 3]), представление Вейерштрасса–Адамара–Брело дает возможность восстановления многочленной асимптотики субгармонической функции по заданной асимптотике функции распределения ее меры Рисса. Обратная задача, как показали Ю. Любарский и М. Содин в [5], разрешима, вообще говоря, не всегда. Они построили пример

Mathematics Subject Classification 2000: 30D20, 30D35.

Работа выполнена при поддержке INTAS (грант № 99-00089).

* Как обычно принято, [a] означает целую часть числа a.

© П.З. Агранович, 2004

субгармонической функции, мера Рисса которой "равномерно" распределена в плоскости, а не сосредоточена в какой-нибудь параболе. Эта функция всюду в плоскости имеет "хорошую" двучленную асимптотику, а функция распределения ее меры Рисса соответствующим представлением не обладает.

Отметим, что этот эффект имеет место для $n \geq 2$, т.к. в случае одночленных асимптотических представлений (функций вполне регулярного роста) наличие асимптотики субгармонической функции дает возможность восстановить асимптотику функции распределения ее меры Рисса вне некоторого исключительного множества [7].

Следовательно, возникает вопрос об описании классов функций, для которых существует тесная зависимость между многочленными асимптотиками. Так в [1] установлен следующий факт.

Теорема А.* *Пусть $u(z)$ — субгармоническая во всей плоскости $\mathbb{C}$ функция нецелого порядка ρ_1, имеющая в плоскости следующего вида представление:*

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{j=1}^{2} \frac{\pi r^{\rho_j}}{\sin \pi\rho_j} \int\limits_{\theta-2\pi}^{\theta} \cos \rho_j(\theta - \vartheta - \pi) d\Delta_j(\vartheta)$$

$$+\psi(re^{i\theta}), \quad z = re^{i\theta}, \tag{1}$$

где $p = [\rho_1] < \rho_2 < \rho_1$; функции $\Delta_j(\vartheta)$, $j = 1, 2, \ldots$, таковы, что существуют интегралы в представлении (1); и для функции $\psi(z)$ справедлива асимптотическая оценка

$$\int\limits_{T}^{2T} \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |\psi(re^{i\theta})|^q = o(T^{\rho_2 q+1}), \quad T \to \infty,\ q > 1. \tag{2}$$

Если носитель меры Рисса функции $u(z)$ сосредоточен в области

$$G = \{z : z = re^{i\theta}, r > 0, |\theta| < \beta(r)\} \bigcup \{0\},$$

где функция $\beta(r)$ непрерывна на полуоси $(0, \infty)$, $\beta(r) \leq r^\tau$, $\tau < 1/q - 1 - (\rho_1 - \rho_2)$, то

$$\mu(t) := \mu(\{z : |z| < t\}) = \Delta_1(2\pi)t^{\rho_1} + \Delta_2(2\pi)t^{\rho_2} + \varphi(t), \tag{3}$$

причем остаточный член $\varphi(t)$ удовлетворяет следующей оценке:

$$\int\limits_{T}^{2T} |\varphi(t)|^q dt = o(T^{\rho_2 q+1}), \quad T \to \infty. \tag{4}$$

* Случай двучленных асимптотических представлений рассматривается в работе лишь для простоты изложения, т.к. для многочленных асимптотик с $\rho_1 > \rho_2 > \ldots > \rho_n > [\rho_1]$ справедливы те же рассуждения.

Отметим, что, как нам известно, изучение асимптотического поведения целых функций с корнями в параболе впервые было дано в работах М.А. Субханкулова и его учеников (см. [6]). Однако в вопросах, которые ими были исследованы, асимптотическое поведение функции задавалось только на одном луче.

Покажем, что фактически теорема A описывает общую ситуацию, гарантирующую восстановление многочленной асимптотики функции распределения меры Рисса субгармонической функции. Это означает, что если носитель меры субгармонической функции нельзя поместить в параболу указанного вида, то, вообще говоря, нельзя гарантировать восстановление "хорошего" многочленного асимптотического представления меры Рисса по заданной многочленной асимптотике функции. Итак, имеет место следующая

Теорема. *Пусть $\rho_1 > 0$ и ρ_2 — произвольные числа, такие что $[\rho_1] < \rho_2 < \rho_1 < [\rho_1] + 1$. Тогда для любого $\tau > 0$ существует субгармоническая во всей плоскости функция $u(z)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

а) $u(z)$ имеет асимптотику вида (1)–(2) всюду в $\mathbf{C}$;

б) носитель меры Рисса μ функции $u(z)$ содержится во множестве

$$G_\tau = \{z = re^{i\theta}, r > 0, |\theta| \le r^{-(\rho_1-\rho_2)+\tau}\};$$

в) μ не имеет асимптотики вида (3)–(4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построение искомой функции $u(z)$ осуществляется в несколько этапов.

1) Рассмотрим субгармоническую функцию

$$w(z) = \frac{\pi r^{\rho_1}}{\sin \pi\rho_1}\cos\rho_1(\theta-\pi) + \frac{\pi r^{\rho_2}}{\sin\pi\rho_2}\cos\rho_2(\theta-\pi).$$

Как известно, мера Рисса μ_w функции $w(z)$ сосредоточена на положительном луче оси абсцисс, и функция распределения этой меры имеет вид

$$\mu_w(t) = t^{\rho_1} + t^{\rho_2}.$$

2) Разобъем положительный луч оси абсцисс на полуинтервалы $[2^j, 2^{j+1})$, $j = 0, 1, 2, \dots$, и вокруг середины каждого из этих полуинтервалов опишем круг $B_j \equiv B_j(3\cdot 2^{j-1}, 2^{j\alpha})$ радиуса $2^{j\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. На выбор параметра α ниже будут наложены некоторые требования. Как легко подсчитать, мера μ_w, попавшая в круг B_n, равна

$$\mu_w = 3\cdot 2^{(-\rho_1-2)}\rho_1\cdot 2^{n(\rho_1-1+\alpha)} + O(2^{n\rho_2}),\ n\to\infty.$$

Потребуем, чтобы

$$\alpha > 1 - (\rho_1 - \rho_2), \tag{5}$$

тогда получаем, что, начиная с некоторого t_0,

$$\mu_w(B_n) > Ct^{\rho_2}, \tag{6}$$

где C — некоторая положительная константа.* Не уменьшая общности, будем далее предполагать, что это неравенство выполнено для всех кругов.

Воспользуемся теперь процедурой "выметания" меры, описанной в [4]. "Выметем" меру μ_w, попавшую в круг B_j, $j = 1, 2, \dots$, на границу круга, и рассмотрим новую меру μ'_w, которая вне рассматриваемых кругов совпадает с мерой μ_w, а в кругах B_j совпадает с "выметенной" мерой. Пусть $\tilde{w}(z)$ — канонический потенциал меры μ'_w. Как известно [4], вне открытых кругов B_j, $j = 1, 2, \dots$, функции $\tilde{w}(z)$ и $w(z)$ равны. В кругах B_j $\forall j$ функция $\tilde{w}(z)$ является гармонической, причем

$$w(z) = \tilde{w}(z) - \int\limits_{B_j} g(z, \zeta, j)\, d\mu_w(\zeta),$$

где $g(z, \zeta, j)$ — функция Грина круга B_j.

Обозначив через λ_z меру Лебега, оценим теперь выражение

$$I^2 = \int\limits_{2^n \le |z| \le 2^{n+1}} \left| \int\limits_{B_n} g(z, \zeta, n)\, d\mu_w(\zeta) \right|^2 d\lambda_z.$$

Пусть $f(z)$ — неотрицательная функция из пространства $L^2(\{z : 2^n \le |z| \le 2^{n+1}\}), ||f||_{L^2} = 1$ и такая, что

$$I = \int\limits_{2^n \le |z| \le 2^{n+1}} f(z) |\int\limits_{B_n} g(z, \zeta, n)\, d\mu_w(\zeta)| d\lambda_z.$$

Тогда

$$I \le \int\limits_{2^n \le |z| \le 2^{n+1}} f(z)\, d\lambda_z \int\limits_{3\cdot 2^{n-1} - 2^{n\alpha} \le |\zeta| \le 3\cdot 2^{n-1} + 2^{n\alpha}} |g(z, \zeta, n)| \chi_n(\zeta)\, d\mu_w(\zeta),$$

где $\chi_n(\zeta)$ — характеристическая функция круга B_n.

* В дальнейшем будем значками $C, C_1, \dots$ обозначать различные встречающиеся константы, не уточняя их величины.

Отсюда следует, что

$$I \le \int\limits_{3\cdot 2^{n-1}-2^{n\alpha}\le|\zeta|\le 3\cdot 2^{n-1}+2^{n\alpha}} \chi_n(\zeta)d\mu_w(\zeta) \int\limits_{2^n\le|z|\le 2^{n+1}} f(z)|g(z,\zeta,n)|^2 d\lambda_z$$

$$\le \int\limits_{B_n} d\mu_w(\zeta) \left(\int\limits_{2^n\le|z|\le 2^{n+1}} |g(z,\zeta,n)|^2 d\lambda_z \right)^{1/2}. \tag{7}$$

Так как

$$g(z,\zeta,n) = \ln \frac{|2^{2n\alpha} - (\overline{z} - 3\cdot 2^{n-1})(\zeta - 3\cdot 2^{n-1})|}{2^{n\alpha}|z-\zeta|},$$

то нетрудно видеть, что для достаточно больших n

$$\ln \frac{2^{n\alpha}|z-\zeta|}{|2^{2n\alpha} - (\overline{z} - 3\cdot 2^{n-1})(\zeta - 3\cdot 2^{n-1})|} = \ln|z-\zeta| - \ln 2^{n\alpha} + \frac{O(1)}{2^{n\alpha}}.$$

Значит,

$$i = \int\limits_{2^n\le|z|\le 2^{n+1}} |g(z,\zeta,n)|^2 d\lambda_z$$

$$\le C\left(\int\limits_{B_n} |\ln|z-\zeta||^2 d\lambda_z + \ln^2 2^{n\alpha} + O(1) \right).$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$i_1 = \int\limits_{B_n} |\ln|z-\zeta||^2 d\lambda_z$$

$$= \int\limits_{|z-\zeta|\le 1} + \int\limits_{B_n\setminus\{|z-\zeta|\le 1\}} = i_{1,1} + i_{1,2}.$$

Как несложно подсчитать,

$$i_{1,1} = \pi,$$

а

$$i_{1,2} \le C\cdot 2^{2n\alpha}\ln^2 2^{n\alpha}.$$

Отсюда вытекает, что

$$i_1 \le C\cdot 2^{2n\alpha}\ln^2 2^{n\alpha} + C_1$$

и

$$i \le C\left(2^{2n\alpha}\ln^2 2^{n\alpha} + \ln^2 2^{n\alpha} + C_1\right).$$

Подставим эти оценки в (7), тогда получаем, что

$$I \le C\left(2^{n\alpha}\ln 2^{n\alpha} + C_1\right)\left[\left(3\cdot 2^{n-1} + 2^{n\alpha}\right)^{\rho_1} - \left(3\cdot 2^{n-1} - 2n\alpha\right)^{\rho_1}\right]$$

$$= C\cdot 2^{n(\rho_1+2\alpha-1)}n.$$

Потребуем теперь, чтобы

$$\alpha < 1 - \frac{\rho_1-\rho_2}{2}. \tag{8}$$

Как несложно видеть, отсюда следует, что субгармоническая функция

$$\tilde{w}(re^{i\theta}) = \frac{\pi r^{\rho_1}}{\sin\pi\rho_1}\cos\rho_1(\theta-\pi) + \frac{\pi r^{\rho_2}}{\sin\pi\rho_2}\cos\rho_2(\theta-\pi) + \psi(re^{i\theta}),$$

причем

$$\int\limits_{2^n\le|z|\le 2^{n+1}} |\psi(z)|^2 d\lambda_z = o(2^{n(2\rho_2+2)}),\ n\to\infty.$$

3) В центре каждого круга B_n рассмотрим меру ν_n такую, что

$$\nu_n(B_n) = C\cdot 2^{n\rho_3},$$

где число ρ_3 выбрано в интервале $(\rho_2, \rho_1+\alpha-1)$, и "выметание" ν'_n удовлетворяет неравенству $\mu'_w - \nu' \ge 0$ на границе круга B_n. В силу (6) и определения "выметенной" меры несложно установить, что такая мера существует.

Положим

$$u(z) = \tilde{w}(z) + v(z),$$

где

$$v(z) = -\sum_n \int\limits_{B_n} g(z,\zeta,n)d\nu_n(\zeta).$$

Очевидно, что в силу определения мер ν_n, $n=1,2,\dots$, такая функция $v(z)$ существует, и функция $u(z)$ является субгармонической во всей плоскости.

Как легко видеть, с одной стороны, ассоциированная по Риссу функции $u(z)$ мера μ_u на последовательности точек, стремящейся к бесконечности, имеет следующего вида асимптотику:

$$\mu(t) = t^{\rho_1} + Ct^{\rho_3} + o(t^{\rho_3}),\ t\to\infty.$$

С другой стороны, мера μ_u удовлетворяет условию б) теоремы.

Повторяя теперь рассуждения, проведенные в п. 2), и используя (5) и (8), получаем, что сама функция $u(z)$ обладает асимптотикой

$$u(re^{i\theta}) = \frac{\pi r^{\rho_1}}{\sin \pi\rho_1} \cos \rho_1(\theta - \pi) + \frac{\pi r^{\rho_2}}{\sin \pi\rho_2} \cos \rho_2(\theta - \pi) + \gamma(re^{i\theta}),$$

где

$$\int\limits_{2^n \le |z| \le 2^{n=1}} |\gamma(z)|^2 d\lambda_z = o(2^{n(2\rho_2+2)}).$$

Таким образом, показано, что построенная функция $u(z)$ удовлетворяет условиям 1)–3) теоремы.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Следует еще раз подчеркнуть, что в отличие от примера, построенного Ю. Любарским и М. Содиным в [5], в этой теореме доказано, что если даже носитель меры Рисса субгармонической функции содержится в достаточно "большой" параболе, которую нельзя уменьшить, то для функции распределения этой меры, вообще говоря, нельзя восстановить нужного вида многочленную асимптотику по заданной асимптотике самой функции.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить профессора А.Ф. Гришина за плодотворное обсуждение этого круга задач и рецензента за полезные замечания.

Список литературы

[1] *П.З. Агранович*, Аппроксимация субгармонических функций и связанные с ней вопросы многочленных асимптотик. — *Мат. физ., анализ, геом.* (2000), т. 7, № 3, с. 255–265.

[2] *П.З. Агранович, В.Н.Логвиненко*, Аналог теоремы Валирона–Титчмарша для двучленных асимптотик субгармонической функции с массами на конечной системе лучей. — *Сиб. мат. журн.* (1985), т. 24, № 5, с. 3–19.

[3] *П.З. Агранович, В.Н.Логвиненко*, Многочленное асимптотическое представление субгармонической в плоскости функции. — *Сиб. мат. журн.* (1991), т. 32, № 1, с. 1–16.

[4] *Н.С. Ландкоф*, Основы современной теории потенциала. Наука, Москва (1966).

[5] *Ю.И. Любарский, М.Л. Содин*, Аналоги функций типа синуса для выпуклых областей. Препринт № 17. ФТИНТ АН Украины, Харьков (1986).

[6] *М.А. Субханкулов*, Тауберовы теоремы с остатком. Наука, Москва (1976).

[7] *Б.Я. Левин*, Распределение корней целых функций. Гос. изд-во техн.-теор. лит., Москва (1956).

On precision of multiterm asymptotics for subharmonic functions with masses in parabola

P.Z. Agranovich

It is established the precision of the conditions of the theorem about the reconstraction of multiterm asymptotics of the Riesz measure by the given polynomial asymptotic representation of a subharmonic function with masses in parabola.