Математическая физика, анализ, геометрия
2004, т. 11, № 2, с. 169–176

Повышение гладкости решений смешанной задачи для волнового уравнения на плоскости

Н.А. Люлько

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
пр. акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail:lulko@online.nsk.su

Статья поступила в редакцию 29 декабря 2003 г.
Представлена И.Д. Чуешовым

Исследуется краевая задача для неоднородного волнового уравнения в полуполосе
$$\Pi = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ t > 0\}.$$
Формулируются граничные условия, при которых гладкость любого решения будет возрастать с увеличением t.

Досліджується крайова задача для неоднорідного хвильового рівняння на півсмузі
$$\Pi = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ t > 0\}.$$
Формулюються граничні умови, при яких гладкість кожного розв'язання буде зростати зі збільшенням t.

Известно, что гладкость решения $u(x,t)$ задачи Коши для волнового уравнения
$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \qquad a > 0, \tag{1}$$
для всех $t > 0$, вообще говоря, не выше гладкости начальных данных, заданных при $t = 0$. В случае же смешанной задачи для этого уравнения в полуполосе $\Pi = \{(x,t) : 0 < x < 1, t > 0\}$ можно задать такие граничные условия на боковых сторонах Π, при которых гладкость решения $u(x,t)$ будет возрастать с увеличением t. Приведем пример, принадлежащий Т.И. Зеленяку, в котором иллюстрируется эффект повышения гладкости решений смешанной задачи для волнового уравнения:
$$u_{tt} - u_{xx} = 0, (x,t) \in \Pi, \tag{2}$$

Mathematics Subject Classification 2000: 58G16.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (номер проекта 03–01–00162).

$$u|_{x=0} = \frac{\alpha}{2}(u_t + u_x)|_{x=0}, \qquad \beta u|_{x=1} = \frac{1}{2}(u_t + u_x)|_{x=1}, \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = 2\frac{dv_0}{dx} - \frac{du_0}{dx}, \tag{4}$$

где α, β — вещественные числа. Общее решение уравнения (2) имеет вид $u(x,t) = \varphi(t+x)+\psi(t-x)$, где функция $\varphi(\xi)$ определена при $\xi \geq 0$, а функция $\psi(\xi)$ — при $\xi \geq -1$.

Рассмотрим случай краевых условий (3), когда $\alpha\beta = 0$. Пусть $\alpha = 0$, $\beta = 1$ и начальные данные $u_0(x)$, $v_0(x)$ принадлежат пространству $C^2[0,1]$. Найдем функции $\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$. Из граничных условий (3) следует

$$\varphi(t) + \psi(t) = 0, \quad \varphi(t+1) + \psi(t-1) = \varphi'(t+1), \quad t \geq 0, \tag{5}$$

а из начальных условий (4) имеем при $0 \leq x \leq 1$ следующие соотношения: $\varphi(x) + \psi(-x) = u_0(x)$, $\varphi'(x) + \psi'(-x) = 2v_0'(x) - u_0'(x)$ или

$$\varphi(x) = v_0(x) + C, \quad \psi(-x) = u_0(x) - v_0(x) - C, \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{6}$$

где C — произвольная константа. Так как решение $u(x,t)$ не зависит от этой константы, то можно положить $C = 0$. Анализируя соотношения (5) и (6), видим, что функция $\varphi(\xi)$ непрерывна при $\xi \geq 0$, а $\psi(\xi)$ может иметь разрыв лишь при $\xi = 0$ (в случае невыполнения условия согласования $u_0(0) = 0$), где $[\psi(0)] = -u_0(0)$ (здесь и далее обозначим $[f(a)] = f(a+0) - f(a-0)$). При этом справедливо, что $\varphi(\xi) \in C^2[k,k+1]$, $k = 0,1,2,\dots$, $\psi(\xi) \in C^2[k,k+1]$, $k = -1,0,1,\dots$. Функция $\varphi'(\xi)$ может иметь разрывы лишь в точках $\xi = 1,2$, где $[\varphi'(1)] = u_0(1) - v_0'(1)$, $[\varphi'(2)] = [\psi(0)]$, а функция $\psi'(\xi)$ может иметь разрывы, причем только первого рода, лишь при $\xi = 0,1,2$. При $\xi > 2$ обе функции $\varphi'(\xi), \psi'(\xi)$ непрерывны, но тогда из соотношений

$$\psi(\xi) = -\varphi(\xi), \quad \varphi'(\xi) = \varphi(\xi) + \psi(\xi-2), \quad \xi \geq 1,$$

видно, что при $\xi > 4$ непрерывны функции $\varphi''(\xi)$, $\psi''(\xi)$ и т.д., т.е. при $\xi > 2n$ имеем непрерывные n-е производные $\varphi^{(n)}(\xi)$, $\psi^{(n)}(\xi)$. Таким образом, в случае $\alpha = 0$, $\beta = 1$ кусочно-гладкое решение волнового уравнения (2) в области $\Omega = \{(x,t) \in \Pi : x+t > 4, t-x > 4\}$ становится классическим и через каждый промежуток по t, равный 2, повышает свою гладкость на единицу.

Пусть $\alpha = \beta = 0$, тогда из краевых условий (3) имеем $\varphi(t) + \psi(t) = 0$, $\varphi'(t+1) = 0$, $t > 0$, что означает, что решение $u(x,t)$ тождественно равно нулю в области $\Omega_1 = \{(x,t) \in \Pi : t+x > 1, t-x > 1\}$.

Итак, рассмотренный пример показывает, что в классе краевых условий (3) для волнового уравнения (2) может иметь место повышения гладкости решения задачи (2)–(4) в случае $\alpha\beta = 0$ (случай $\alpha = 1$, $\beta = 0$ рассматривается аналогично случаю $\alpha = 0$, $\beta = 1$).

Рассмотрим случай краевых условий (3), когда $\alpha\beta \neq 0$ и для системы (2), (3) задаются произвольные начальные данные

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x). \tag{7}$$

Тогда из граничных условий (3) имеем соотношения

$$\varphi(t) + \psi(t) = \alpha\varphi'(t), \quad \beta(\varphi(t+1) + \psi(t-1)) = \varphi'(t+1), \quad t \geq 0, \tag{8}$$

из которых в случае $\alpha = \beta = 1$ следует периодичность функции $\psi(t)$: $\psi(t) = \psi(t+2)$, $t \geq -1$. Так как при $0 \leq x \leq 1$ функции $\varphi(x)$, $\psi(-x)$ определяются по начальным данным (7), а именно:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(u_0(x) + \int\limits_0^x u_1(\tau)\,d\tau), \quad \psi(-x) = \frac{1}{2}(u_0(x) - \int\limits_0^x u_1(\tau)\,d\tau),$$

то в общем случае, когда $\alpha\beta \neq 0$, гладкость решения $u(x,t)$ задачи (2), (3), (7) при $t > 0$ не выше гладкости начальных данных.

Найдем необходимые условия для функций $u_0(x)$, $u_1(x)$, при которых решение рассматриваемой задачи будет дважды непрерывно дифференцируемым в полуполосе $\bar{\Pi}$. Обратимся к соотношениям (8), из которых определяются функции $\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$ для остальных значений ξ. Из первого соотношения (8) при $0 \leq x \leq 1$ имеем

$$\psi(x) = \alpha\varphi'(x) - \varphi(x) = \frac{1}{2}(\alpha(u_0'(x) + u_1(x)) - u_0(x) - \int\limits_0^x u_1(\tau)\,d\tau),$$

откуда видно, что в общем случае (когда α, β — произвольные числа) для дважды непрерывной дифференцируемости функции $\psi(x)$ на этом промежутке необходимо, чтобы функция $u_0(x)$ принадлежала пространству $C^3[0,1]$, а функция $u_1(x)$ — пространству $C^2[0,1]$. Тогда из второго соотношения (8) будем иметь, что $\varphi(\xi) \in C^3[1,2]$, а из первого соотношения (8) получим, что $\psi(\xi) = \alpha\varphi'(\xi) - \varphi(\xi) \in C^2[1,2]$ и т.д. Проанализировав полученные функции $\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$, видим, что для непрерывности решения $u(x,t)$ в полуполосе $\bar{\Pi}$ необходимо выполнение условий согласования нулевого порядка:

$$u_0|_{x=0} = \frac{\alpha}{2}(u_1 + u_0')|_{x=0}, \qquad \beta u_0|_{x=1} = \frac{1}{2}(u_1 + u_0')|_{x=1},$$

для непрерывной дифференцируемости решения $u(x,t)$ в полуполосе $\bar{\Pi}$ необходимо выполнение условий согласования первого порядка:

$$u_1|_{x=0} = \frac{\alpha}{2}(u_0'' + u_1')|_{x=0}, \qquad \beta u_1|_{x=1} = \frac{1}{2}(u_0'' + u_1')|_{x=1},$$

для непрерывности вторых производных $u(x,t)$ в полуполосе $\bar{\Pi}$ необходимо выполнение условий согласования второго порядка:

$$u_0''|_{x=0} = \frac{\alpha}{2}(u_1'' + u_0''')|_{x=0}, \qquad \beta u_0''|_{x=1} = \frac{1}{2}(u_1'' + u_0''')|_{x=1}.$$

Таким образом, чтобы решение $u(x,t)$ задачи (2), (3), (7) было дважды непрерывно дифференцируемым в полуполосе $\bar{\Pi}$, необходимо, вообще говоря, чтобы функция $u_0(x)$ принадлежала пространству $C^3[0,1]$, а $u_1(x)$ — пространству $C^2[0,1]$ и обе функции удовлетворяли перечисленным выше условиям согласования.

Рассмотрим в дальнейшем в полуполосе Π краевую задачу для волнового уравнения (1), где $f(x,t) \in C^\infty(\bar{\Pi})$ (здесь и далее принадлежность функции пространству $C^k(\bar{\Pi})$, $1 \le k \le \infty$, означает, что функция является k раз непрерывно дифференцируемой в замыкании полуполосы Π). Неизвестная функция $u(x,t)$ удовлетворяет начальным условиям (7), где $u_0(x) \in C^3[0,1]$, $u_1(x) \in C^2[0,1]$, и граничным условиям

$$Gu|_\Upsilon = 0, \tag{9}$$

в которых линейный оператор G, задающий граничные условия на боковых сторонах Π, т.е. на множестве $\Upsilon = \{(x,t) : x = 0,1, t > 0\}$, пока не определен.

Определение 1. *Будем говорить, что задача (1),(7),(9) обладает свойством повышения гладкости решений до k-го порядка, если найдется такое число $T(k) \ge 0$, что всякое решение $u(x,t)$ становится k раз непрерывно дифференцируемым при $t > T(k)$. При этом для $t > T(k)$ справедливо неравенство*

$$\begin{aligned} &\|D_{x,t}^{r,s} u(x,t)\|_{C[0,1]} \\ &\le K(t)(\max(\|u_0(x)\|_{W_2^1(0,1)}, \|u_1(x)\|_{L_2(0,1)}) + \|f(x,t)\|_{C^k([0,1]\times[0,t])}), \end{aligned} \tag{10}$$

где $r + s \le k$, константа $K(t)$ не зависит от функций u_0, u_1, f, а зависит лишь от коэффициентов задачи.

Отметим, что если это свойство справедливо для любого целого $k \ge 0$, то мы будем говорить, что рассматриваемая задача обладает свойством повышения гладкости решений.

Целью данной работы будет формулировка граничных условий (9), при которых имеет место повышение гладкости решений задачи (1), (7), (9). Для этого сначала обратимся к работам автора [1, 2].

В статье [1] доказан критерий повышения гладкости решений смешанной задачи для однородной гиперболической системы, а в статье [2] — для неоднородной гиперболической системы:

$$U_t + K(x)U_x = A(x)U + F(x,t), \qquad (x,t) \in \Pi, \tag{11}$$

$$I_0U(0,t) + I_1U(1,t) = 0, \tag{12}$$

$$U(x,0) = U_0(x). \tag{13}$$

Здесь $U(x,t)$ — n-мерный вектор-столбец неизвестных функций, $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n}$ — заданная матрица, $K(x)$ — диагональная матрица с элементами $k_i(x) \neq k_j(x)$ $(i \neq j)$, где $k_i(x) > 0$ $(i = 1,\dots,p)$, $k_i(x) < 0$ $(i = p+1,\dots,n)$, $1 \le p < n$, $n \ge 2$, $F(x,t)$ — известная вектор-функция. Матрицы I_0, I_1, задающие граничные условия, имеют вид

$$I_0 = \begin{pmatrix} E^{p,p} & A^{p,n-p} \\ O^{n-p,p} & O^{n-p,n-p} \end{pmatrix}, \qquad I_1 = \begin{pmatrix} O^{p,p} & O^{p,n-p} \\ B^{n-p,p} & E^{n-p,n-p} \end{pmatrix},$$

где $E^{k,k}$ — единичная матрица размерности $k \times k$, $O^{m,k}$ — нулевая матрица размерности $m \times k$; $A^{p,n-p} = (\alpha_{ij})$, $B^{n-p,p} = (\beta_{ji})$, $i = 1,\dots,p$, $j = p+1,\dots,n$, где α_{ij}, β_{ji} — вещественные , а m, k — натуральные числа.

Корректность постановки задачи (11)–(13) в различных функциональных пространствах исследовалась в работах [3, 4], а вопрос о поведении решения однородной задачи при $t \to \infty$ рассматривался в работах [5, 1].

Понятие повышения гладкости решений задачи (11)–(13) до k-го порядка вводится аналогично определению 1 (см. определ. 1.1 в [2]), только вместо оценки (10) требуется выполнение при $t > T(k)$ неравенства

$$\|D^{r,s}_{x,t}U(x,t)\|_{C[0,1]} \le K(t)(\|U_0(x)\|_{L_2(0,1)} + \|F(x,t)\|_{C^k([0,1]\times[0,t])}). \tag{14}$$

Следуя работе [1], введем в рассмотрение диагональную матрицу Γ с элементами $\exp(\int_0^1 (a_{ii}(\tau) - \lambda)/k_i(\tau)\,d\tau)$, $i = 1,\dots,n$, где λ — комплексный параметр, и матрицу $S = I_0 + I_1\Gamma$. Определитель матрицы S можно записать в виде

$$\det\, S = \Delta(\lambda)\exp(\sum_{i=p+1}^{n}\int\limits_0^1 (a_{ii}(\tau) - \lambda)/k_i(\tau)\,d\tau),$$

где $\Delta(\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{M} E_k \exp(-\lambda\beta_k)$; $M \ge 1$, $0 < \beta_1 < ... < \beta_M$, E_k — вещественные числа.

Определение 2. *Краевые условия (12) называются B-регулярными для системы (11), если все коэффициенты E_k функции $\Delta(\lambda)$ равны нулю.*

Нетрудно видеть, что B-регулярность краевых условий зависит от элементов матрицы $K(x)$ и диагональных элементов матрицы $A(x)$ и легко проверяема. В работе [2] доказана

Теорема 1. *Пусть* $A(x), K(x) \in C^{k+2}[0,1]$, $k \geq 0$. *Тогда* B*-регулярность краевых условий (12) для системы (11) является необходимым и достаточным условием того, чтобы задача (11)–(13) обладала свойством повышения гладкости кусочно-гладких решений (КГР)* $U(x,t)$ *до* k*-го порядка, если* $U_0(x) \in C^1[0,1]$ *и* $F(x,t) \in C^{k+2}(\bar{\Pi})$.

Определение КГР рассматриваемой задачи дано в работе [1]. Такие решения возникают, когда для начальных данных $U_0(x)$ не выполнены условия согласования нулевого или первого порядка:

$$\begin{gathered} I_0U_0(0) + I_1U_0(1) = 0 \qquad \text{и} \qquad I_0U_1(0) + I_1U_1(1) = 0, \\ \text{где} \qquad U_1(x) = -K(x)\tfrac{dU_0(x)}{dx} + A(x)U_0(x) + F(x,0). \end{gathered} \tag{15}$$

В этом случае решение $U(x,t)$ или его первые производные могут иметь разрывы первого рода на характеристиках системы (11). Если же функция $U_0(x)$ удовлетворяет условиям согласования (15), то кусочно-гладкое решение задачи (11)–(13) является непрерывно дифференцируемым. B-регулярность краевых условий (12) гарантирует существование чисел $T(0)$, $T(1), \ldots,$ $T(k), \ldots$ $(k \in \{N \cup 0\})$ таких, что в случае достаточно гладких коэффициентов системы любое КГР $U(x,t)$ задачи при $t > T(j)$ становится j раз непрерывно дифференцируемым, $j = 0, 1, \ldots, k$, причем при $t > T(k)$ будет выполняться оценка (14).

Вернемся к волновому уравнению (1). Если функция $u(x,t)$ есть его классическое решение, то функции $u(x,t)$, $v(x,t) = u_t(x,t) \pm au_x(x,t)$ удовлетворяют в полуполосе Π одной из следующих гиперболических систем первого порядка:

$$u_t - au_x = v, \qquad v_t + av_x = f(x,t) \tag{16_1}$$

или

$$u_t + au_x = v, \qquad v_t - av_x = f(x,t), \tag{16_2}$$

каждая из которых имеет вид (11). Краевые условия (12) примут для этих систем соответственно вид

$$u|_{x=1} = \alpha v|_{x=1}, \qquad v|_{x=0} = \beta u|_{x=0}, \tag{17_1}$$

$$u|_{x=0} = \alpha v|_{x=0}, \qquad v|_{x=1} = \beta u|_{x=1}, \tag{17_2}$$

где α, β — вещественные числа. B-регулярность краевых условий (17_i) для системы (16_i) $(i = 1,2)$ означает, что $\alpha\beta = 0$, т.к. функция $\det S$ в случае обеих задач имеет вид $\det S = \exp(\lambda/a)(1 - \alpha\beta\exp(-2\lambda/a))$.

Граничные условия (17_1), (17_2) порождают два вида краевых условий (9) для волнового уравнения (1), а именно:

$$u - \alpha(u_t - au_x)|_{x=1} = 0, \qquad u_t - au_x - \beta u|_{x=0} = 0, \tag{9_1}$$

$$u - \alpha(u_t + au_x)|_{x=0} = 0, \qquad u_t + au_x - \beta u|_{x=1} = 0. \tag{9_2}$$

Рассмотрим задачу (1), (7), (9_1). Очевидно, ее классическое решение $u(x,t)$ и функция $v(x,t) = u_t - au_x$ являются решением задачи (16_1), (17_1) с начальными данными

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad v(x,0) = u_1(x) - a\frac{du_0(x)}{dx}. \tag{18_1}$$

Аналогично, классическое решение $u(x,t)$ задачи (1), (7), (9_2) и функция $v(x,t) = u_t + au_x$ являются решением задачи (16_2), (17_2) с начальными данными

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad v(x,0) = u_1(x) + a\frac{du_0(x)}{dx}. \tag{18_2}$$

Условия согласования нулевого, первого и второго порядков для задачи (1), (7), (9_i) (они выписываются аналогично условиям согласования для задачи (2), (3), (7)) совпадают с условиями согласования для системы (16_i), (17_i), (18_i), $i = 1, 2$, поэтому из теоремы существования решения смешанной задачи для гиперболической системы на плоскости (см. [1]) следует

Утверждение. *Если $f(x,t) \in C^2(\bar{\Pi})$, $u_0(x) \in C^3[0,1]$, $u_1(x) \in C^2[0,1]$ и выполнены условия согласования нулевого, первого и второго порядков для задачи (1), (7), (9_i), то существует единственное решение $u(x,t)$, $v(x,t) \in C^2(\bar{\Pi})$ задачи (16_i), (17_i), (18_i). При этом функция $u(x,t)$ является классическим решением задачи (1), (7), (9_i), $i = 1, 2$.*

Таким образом, при условиях, сформулированных в утверждении, смешанная задача для волнового уравнения (1), (7), (9_i) эквивалентна смешанной задаче для гиперболической системы (16_i), (17_i), (18_i), $i = 1, 2$.

Рассмотрим два семейства характеристик волнового уравнения (1): $\chi_l = \{(x,t) \in \Pi : x = at - l, l = 0, 1, 2, ...\}$ и $\eta_q = \{(x,t) \in \Pi : x = -at + q, q = 1, 2, ...\}$. Вся полоса Π разбивается характеристиками χ_l, η_q на бесконечное число односвязных областей R_j, $j = 1, 2, \ldots$. Если условия согласования для задачи (1), (7), (9_i) не выполнены, то при выполнении остальных предположений утверждения существует КГР $u(x,t)$, $v(x,t)$ задачи (16_i), (17_i), (18_i), причем функция $u(x,t)$ принадлежит пространству $C^2(\bar{R}_j)$ и в областях R_j, $j = 1, 2, \ldots$, удовлетворяет волновому уравнению (1) в обычном смысле, краевым условиям (9_i) и начальным условиям (7) она удовлетворяет почти всюду. Назовем такое решение $u(x,t)$ системы (16_i), (17_i), (18_i) кусочно-гладким решением волнового уравнения (1), (7), (9_i), $i = 1, 2$. Тогда из теоремы 1 следует, что справедлива

Теорема 2. *Пусть $f(x,t) \in C^\infty(\bar{\Pi})$. Смешанная задача* (7), (9_i) *(при $i = 1$ или $i = 2$) для волнового уравнения* (1) *обладает свойством повышения гладкости кусочно-гладких решений для любых функций $u_0(x) \in C^3[0,1]$, $u_1(x) \in C^2[0,1]$ тогда и только тогда, когда $\alpha\beta = 0$.*

З а м е ч а н и е. Свойство повышения гладкости решений рассматриваемой смешанной задачи для волнового уравнения (1) зависит от вида граничных условий и не зависит от конкретной гладкости функции $f(x,t)$. Гладкость функции $f(x,t)$ определяет лишь степень гладкости решения $u(x,t)$ при больших значениях t, а именно: если $f(x,t) \in C^{k+2}(\bar{\Pi})$, $k \geq 0$, то при выполнении условий теоремы 2 смешанная задача (1), (7), (9_i), $i = 1, 2$, обладает свойством повышения гладкости кусочно-гладких решений до k-го порядка.

Список литературы

[1] *Н.А. Елтышева*, О качественных свойствах решений некоторых гиперболических систем на плоскости. — *Мат. сб.* (1988), т. 135, № 2, с. 186–209.

[2] *М.М. Лаврентьев, мл., Н.А. Люлько*, Повышение гладкости решений некоторых гиперболических задач. — *Сиб. мат. журн.* (1997), т. 38, № 1, с. 109–124.

[3] *В.Э. Аболиня, А.Д. Мышкис*, Смешанная задача для почти линейной гперболической системы на плоскости. — *Мат. сб.* (1960), т. 50, № 4, с. 423–442.

[4] *С.К. Годунов*, Уравнения математической физики. Наука, Москва (1979).

[5] *К.В. Брушлинский*, О росте решения смешанной задачи в случае неполноты собственных функций. — *Изв. АН СССР. Сер. мат.* (1959), т. 23, № 6, с. 893–912.

Increasing of smoothness of the solutions to a boundary value problem for the wave equation on the plane

N.A. Lyulko

The work is devoted to a studying of a boundary value problem for the inhomogeneous wave equation in the half-strip

$$\Pi = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ t > 0\}.$$

There are formulated the boundary conditions such that the smoothness of any solution will increase with growing t.