Математическая физика, анализ, геометрия
2004, т. 11, № 2, с. 177–188

О функциональном уравнении С.Н. Бернштейна

М.В. Миронюк

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, Харьков, 61103, Украина
E-mail:myronyuk@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 24 ноября 2003 г.
Представлена Г.М. Фельдманом

Приведены два новых доказательства теоремы С.Н. Бернштейна о характеризации гауссовского распределения независимостью суммы и разности независимых случайных величин. Эти доказательства не используют ни теоремы Крамера о разложении гауссовского распределения, ни метода конечных разностей. Благодаря этому обстоятельству приведенные доказательства без изменения переносятся на локально компактные абелевы группы с однозначным делением на 2 при условии, что характеристические функции расматриваемых распределений не обращаются в нуль. Последний результат используется затем для описания всех локально компактных абелевых групп, на которых справедлива теорема С.Н. Бернштейна.

Наведено два нових доведення теореми С.Н. Бернштейна про характеризацію гаусівського розподілу незалежністю суми та різниці незалежних випадкових величин. Ці доведення не використовують ні теореми Крамера про розклад гаусівського розподілу, ні методу скінченних різниць. Завдяки цій обставині наведені доведення без змін переносяться на локально компактні абелеві групи з однозначним діленням на 2 при умові необертання на нуль характеристичних функцій розподілів, що розглядаються. Останній результат використовується потім для опису усіх локально компактних абелевих груп, на яких має місце теорема С.Н. Бернштейна.

1. Введение

В 1941 году С.Н. Бернштейн доказал следующую характеризационную теорему.

Теорема А ([1]). *Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины. Если $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ независимы, то ξ_1 и ξ_2 — гауссовские случайные величины, имеющие равные дисперсии.*

Mathematics Subject Classification 2000: 39B99, 60B15, 62E10.

Теорема A равносильна описанию решений некоторого функционального уравнения. Действительно, пусть μ_1, μ_2 — распределения случайных величин ξ_1, ξ_2. Заметим, что характеристической функцией распределения μ_j является математическое ожидание $\hat{\mu}_j(y) = \mathbf{E}[e^{iy\xi_j}]$, $y \in \mathbb{R}$, а случайные величины $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ независимы тогда и только тогда, когда для любых $u, v \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\mathbf{E}[e^{i[u(\xi_1+\xi_2)+v(\xi_1-\xi_2)]}] = \mathbf{E}[e^{iu(\xi_1+\xi_2)}]\mathbf{E}[e^{iv(\xi_1-\xi_2)}].$$

Учитывая, что случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, простые преобразования левой и правой частей этого равенства показывают, что случайные величины $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ независимы тогда и только тогда, когда характеристические функции $\hat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют функциональному уравнению

$$\hat{\mu}_1(u+v)\hat{\mu}_2(u-v) = \hat{\mu}_1(u)\hat{\mu}_1(v)\hat{\mu}_2(u)\hat{\mu}_2(-v), \quad u, v \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Поэтому теорема A равносильна утверждению о том, что все решения полученного уравнения в классе характеристических функций вероятностных распределений, т.е. нормированных непрерывных положительно определенных функций, имеют вид

$$\hat{\mu}_j(y) = \exp\{-\sigma y^2 + i\beta_j y\}, \quad y \in \mathbb{R},\ \sigma \geq 0,\ \beta_j \in \mathbb{R}.$$

Уравнение (1) будем называть функциональным уравнением С.Н. Бернштейна.

Настоящая работа состоит из четырех небольших разделов. В разделе 2 мы приводим два новых доказательства теоремы С.Н. Бернштейна. В отличие от известных ранее доказательств наши доказательства не используют ни теоремы Крамера о разложении гауссовского распределения, ни метода конечных разностей. Благодаря этому наши доказательства с точностью до обозначений переносятся на локально компактные абелевы группы с однозначным делением на 2 (см. разд. 3). Доказанное в разд. 3 предложение 1 применяется в разд. 4 для доказательства группового аналога теоремы С.Н. Бернштейна для максимально широкого класса локально компактных абелевых групп.

Подчеркнем следующее обстоятельство. Теоремы 1 и 2 были доказаны ранее в [2, 3] (см. также [4, §9]). Мы даем другое доказательство этих теорем, не использующее группового аналога теоремы Крамера о разложении гауссовского распределения (см. [5]), на который опирались доказательства теорем 1 и 2. Использованный при этом подход может оказаться полезным при решении других функциональных уравнений, а следовательно, и характеризационных задач на группах.

2. Функциональное уравнение С.Н. Бернштейна на вещественной прямой

В этом разделе мы дадим два новых доказательства теоремы С.Н. Бернштейна, которую удобней сформулировать следующим образом.

Теорема A. *Все решения уравнения (1) в классе характеристических функций вероятностных распределений имеют вид* $\hat{\mu}_j(y) = \exp\{-\sigma y^2 + i\beta_j y\}$, *где* $\sigma \geq 0$, $\beta_j \in \mathbb{R}$.

Доказательство. **(I)**. Решим вначале уравнение (1) в предположении, что $\hat{\mu}_1(y) = \hat{\mu}_2(y) = \hat{\mu}(y)$. Тогда уравнение (1) принимает вид

$$\hat{\mu}(u+v)\hat{\mu}(u-v) = \hat{\mu}^2(u)\hat{\mu}(v)\hat{\mu}(-v), \quad u, v \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Покажем, что $\hat{\mu}(y) \neq 0$ при любом $y \in \mathbb{R}$. Полагая в (2) $u = v = y/2$, получим $\hat{\mu}(y) = \hat{\mu}^2(y/2)|\hat{\mu}(y/2)|^2, \quad y \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что

$$|\hat{\mu}(y)| = |\hat{\mu}(y/2^m)|^{4^m}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Если существует $y_0 \in \mathbb{R}$ такое, что $\hat{\mu}(y_0) = 0$, то $\hat{\mu}(y_0/2^m) = 0$, что невозможно, т.к. $\hat{\mu}(0) = 1$ и функция $\hat{\mu}(y)$ непрерывна.

Предположим, что $\hat{\mu}(y) = \hat{\mu}(-y)$, $y \in \mathbb{R}$, т.е. $\hat{\mu}(y)$ — вещественнозначная функция. Положим в (2) $u = v$. Тогда $\hat{\mu}(2u) = \hat{\mu}^2(u)|\hat{\mu}(u)|^2$. Отсюда получаем, что $\hat{\mu}(y) > 0$ для любого $y \in \mathbb{R}$. Обозначим $\varphi(y) = -\ln \hat{\mu}(y)$. Тогда из (2) вытекает, что выполнено равенство

$$\varphi(u+v) + \varphi(u-v) = 2[\varphi(u) + \varphi(v)], \quad u, v \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Следовательно, $\varphi(y) = \sigma y^2$, а $\hat{\mu}(y) = e^{-\sigma y^2}$, где $\sigma \geq 0$.

Откажемся теперь от предположения, что $\hat{\mu}(y) = \hat{\mu}(-y)$ при всех $y \in \mathbb{R}$. Положим $l(y) = \hat{\mu}(y)/|\hat{\mu}(y)|$. Заметим, что $|l(y)| = 1$, $l(-y) = \overline{l(y)}$ при $y \in \mathbb{R}$ и $l(0) = 1$. Очевидно, что функция $l(y)$ удовлетворяет уравнению (2), которое принимает вид

$$l(u+v)l(u-v) = l^2(u), \quad u, v \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Поменяем в (4) u и v местами и, умножая получившееся уравнение на (4), получим

$$l^2(u+v) = l^2(u)l^2(v), \quad u, v \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Положим в (4) $u = v$. Тогда $l(2u) = l^2(u)$, $u \in \mathbb{R}$. Отсюда и из (5) получаем, что

$$l(2u+2v) = l(2u)l(2v), \quad u, v \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Следовательно, $l(y) = e^{i\beta y}$, $\beta \in \mathbb{R}$, а значит, $\hat{\mu}(y) = e^{-\sigma y^2 + i\beta y}$, где $\sigma \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

(II). Рассмотрим теперь общий случай. Полагая в (1) сначала $u = v = y$, затем $u = -v = y$, получаем

$$\hat{\mu}_1(2y) = \hat{\mu}_1^2(y)|\hat{\mu}_2(y)|^2, \qquad \hat{\mu}_2(2y) = |\hat{\mu}_1(y)|^2\hat{\mu}_2^2(y), \quad y \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Из этих равенств следует, что

$$|\hat{\mu}_1(2y)| = |\hat{\mu}_2(2y)|, \quad y \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Обозначим

$$\hat{\nu}_1(y) = \hat{\mu}_1(y)\hat{\mu}_2(y). \tag{9}$$

Заменим в (1) v на $-v$ и, умножая получившееся уравнение на уравнение (1), с учетом (9) получим, что функция $\hat{\nu}_1(y)$ удовлетворяет уравнению (2). Тогда, как доказано в (I),

$$\hat{\nu}_1(y) = e^{-\sigma_1 y^2 + i\beta_1 y}. \tag{10}$$

Обозначим

$$\hat{\nu}_2(y) = \hat{\mu}_1(y)\hat{\mu}_2(-y). \tag{11}$$

Заменим в (1) u на $-u$ и умножим получившееся уравнение на уравнение (1). Меняя в полученном уравнении переменные u и v местами, видим, что функция $\hat{\nu}_2(y)$ также удовлетворяет уравнению (2). Тогда, как доказано в (I),

$$\hat{\nu}_2(y) = e^{-\sigma_2 y^2 + i\beta_2 y}. \tag{12}$$

Очевидно, что $|\hat{\nu}_1(y)| = |\hat{\nu}_2(y)|$. Поэтому $\sigma_1 = \sigma_2$. Обозначим $\sigma_1 = \sigma_2 = 2\sigma$.

Учитывая (9)–(12), преобразуем правую часть уравнения (1) и получим

$$\hat{\mu}_1(u+v)\hat{\mu}_2(u-v) = e^{-2\sigma(u^2+v^2)+i(\beta_1 u + \beta_2 v)}, \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Полагая здесь $u = v = y/2$, а затем $u = -v = y/2$, получаем, что

$$\hat{\mu}_1(y) = e^{-\sigma y^2 + i\frac{\beta_1+\beta_2}{2}y}, \qquad \hat{\mu}_2(y) = e^{-\sigma y^2 + i\frac{\beta_1-\beta_2}{2}y}.$$

Теорема A доказана.

Сейчас мы изложим основанное на принципиально других соображениях и представляющее самостоятельный интерес второе доказательство теоремы A.

Второе доказательство теоремы A. Так же, как и в доказательстве 1, показываем, что $\hat{\mu}_j(y) \neq 0$. Из уравнения (1) следует, что выполнено уравнение

$$|\hat{\mu}_1(u+v)||\hat{\mu}_2(u-v)| = |\hat{\mu}_1(u)||\hat{\mu}_1(v)||\hat{\mu}_2(u)||\hat{\mu}_2(-v)|, \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Так как из (8) вытекает, что $|\hat{\mu}_1(y)| = |\hat{\mu}_2(y)|$, то это уравнение можно преобразовать следующим образом:

$$|\hat{\mu}_1(u+v)||\hat{\mu}_1(u-v)| = |\hat{\mu}_1(u)|^2|\hat{\mu}_1(v)|^2, \quad u,v \in \mathbb{R}.$$

Обозначая $\varphi(y) = -\ln|\hat{\mu}_1(y)|$, отсюда получаем, что выполнено равенство (3). Следовательно, $\varphi(y) = \sigma y^2$, а $|\hat{\mu}_1(y)| = |\hat{\mu}_2(y)| = e^{-\sigma y^2}$, где $\sigma \geq 0$.

Покажем, что функции $\hat{\mu}_j(y)/|\hat{\mu}_j(y)|$ являются характерами, т.е. $\hat{\mu}_j(y)/|\hat{\mu}_j(y)| = e^{i\beta_j y}$, где $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,2$. Учитывая то, что $|\hat{\mu}_1(y)| = |\hat{\mu}_2(y)|$, из (7) находим

$$\hat{\mu}_j(y) = (\hat{\mu}_j(y/2^n))^{2^n}|\hat{\mu}_j(y/2^n)|^{2^{2n}-2^n}, \quad y \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Отсюда получаем

$$|\hat{\mu}_j(y)| = |\hat{\mu}_j(y/2^n)|^{2^{2n}}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}|\hat{\mu}_j(y/2^n)|^{2^n} = \lim_{n\to\infty}|\hat{\mu}_j(y)|^{1/2^n} = 1, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Отсюда и из (13) получим, что

$$\lim_{n\to\infty}|\hat{\mu}_j(y/2^n))|^{2^{2n}-2^n} = |\hat{\mu}_j(y)|, \quad y \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Перепишем (13) в виде

$$\frac{\hat{\mu}_j(y)}{|\hat{\mu}_j(y/2^n))|^{2^{2n}-2^n}} = (\hat{\mu}_j(y/2^n))^{2^n}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\frac{\hat{\mu}_j(y)}{|\hat{\mu}_j(y))|} = \lim_{n\to\infty}(\hat{\mu}_j(y/2^n))^{2^n}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Поэтому $\hat{\mu}_j(y)/|\hat{\mu}_j(y))|$ — характеристическая функция, как непрерывная функция, являющаяся пределом последовательности характеристических функций. Так как $|\hat{\mu}_j(y)/|\hat{\mu}_j(y))|| \equiv 1$, то $\hat{\mu}_j(y)/|\hat{\mu}_j(y))| = e^{i\beta_j y}$, $\beta_j \in \mathbb{R}$. Отсюда получаем, что $\hat{\mu}_1(y) = e^{-\sigma y^2 + i\beta_1 y}$, $\hat{\mu}_2(y) = e^{-\sigma y^2 + i\beta_2 y}$. Теорема A доказана.

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что (14) непосредственно следует из того, что $|\hat{\mu}_j(y)| = e^{-\sigma y^2}$. Приведенное нами доказательство (14), а следовательно, и доказательство того, что функция $\hat{\mu}_j(y)/|\hat{\mu}_j(y)|$ — характеристическая, не использует этого обстоятельства, а вытекает лишь из равенства $\hat{\mu}_j(y) = (\hat{\mu}_j(y/2))^2|(\hat{\mu}_j(y/2))|^2$.

3. Функциональное уравнение С.Н. Бернштейна на абелевой группе с однозначным делением на 2

Условимся о некоторых обозначениях. Пусть X — локально компактная сепарабельная абелева метрическая группа. Обозначим через $Y = X^*$ группу характеров группы X, через (x, y) — значение характера $y \in Y$ на элементе $x \in X$. Обозначим через $\mathrm{Aut}(X)$ группу топологических автоморфизмов группы X. Через $f_2 : X \to X$ обозначим гомоморфизм, определяемый формулой $f_2(x) = 2x$. Положим $X^{(2)} = Imf_2$, $X_{(2)} = Kerf_2$.

Будем говорить, что X — группа с однозначным делением на 2, если для любого элемента $x \in X$ существует единственный элемент $x' \in X$ такой, что $x = 2x'$. Элемент x' будем обозначать через $x/2$. Очевидно, что X — группа с однозначным делением на 2 тогда и только тогда, когда $f_2 \in \mathrm{Aut}(X)$. Отметим, что $f_2 \in \mathrm{Aut}(X)$ тогда и только тогда, когда $f_2 \in \mathrm{Aut}(Y)$.

Характеристическая функция распределения μ определяется по формуле $\hat{\mu}(y) = \int_X (x, y) d\mu(x)$. Распределение μ называется гауссовским, если его характеристическая функция имеет вид

$$\hat{\mu}(y) = (x, y) \exp\{-\varphi(y)\}, \quad y \in Y, \tag{15}$$

где $x \in X$, а $\varphi(y)$ — непрерывная неотрицательная функция на Y, удовлетворяющая уравнению (3). Обозначим через $\Gamma(X)$ множество гауссовских распределений на группе X.

Если ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j, то, учитывая, что $\hat{\mu}_j(y) = \mathbf{E}[(\xi_j, y)]$, так же, как и в классическом случае $X = \mathbb{R}$, убеждаемся в том, что независимость $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ эквивалентна тому, что характеристические функции распределений μ_j удовлетворяют функциональному уравнению (1) при $u, v \in Y$.

Приведенные в разд. 2 доказательства теоремы A позволяют решить функциональное уравнение С.Н. Бернштейна на локально компактной абелевой группе с однозначным делением на 2.

Предложение 1. *Пусть Y — локально компактная сепарабельная абелева метрическая группа такая, что $f_2 \in \mathrm{Aut}(Y)$. Пусть $\hat{\mu}_1(y)$, $\hat{\mu}_2(y)$ — характеристические функции вероятностных распределений, удовлетворяющие уравнению (1) на группе Y, и такие, что $\hat{\mu}_1(y)\hat{\mu}_2(y) \neq 0$ при любом $y \in Y$. Тогда $\hat{\mu}_1(y)$, $\hat{\mu}_2(y)$ имеют вид $\hat{\mu}_j(y) = (x_j, y) \exp\{-\varphi(y)\}$, где $x_j \in X = Y^*$, а $\varphi(y)$ — непрерывная неотрицательная функция на Y, удовлетворяющая уравнению (3).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оба доказательства переносятся практически без изменений на группы с однозначным делением на 2. Мы ограничимся кратким комментарием к первому доказательству.

(I). Решая вначале уравнение (1) в предположении, что $\hat{\mu}_1(y) = \hat{\mu}_2(y) = \hat{\mu}(y)$ и при условии $\hat{\mu}(y) = \hat{\mu}(-y)$, $y \in Y$, получим, что $\hat{\mu}(y) = \exp\{-\varphi(y)\}$, где $\varphi(y)$ — непрерывная неотрицательная функция на Y, удовлетворяющая уравнению (3).

Откажемся теперь от предположения, что $\hat{\mu}(y) = \hat{\mu}(-y)$ при всех $y \in Y$. Полагая $l(y) = \hat{\mu}(y)/|\hat{\mu}(y)|$ и рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы A, получаем равенство (6). Так как $f_2 \in \mathrm{Aut}(Y)$, то из (6) получаем, что $l(u+v) = l(u)l(v)$ при всех $u, v \in Y$. Следовательно, $l(y)$ — характер группы Y, т.е. $l(y) = (x_0, y)$, где $x_0 \in X$, а значит, $\hat{\mu}(y) = (x_0, y)\exp\{-\varphi(y)\}$.

(II). Рассмотрим теперь общий случай. Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы A, получаем, что $\hat{\nu}_1(y) = \hat{\mu}_1(y)\hat{\mu}_2(y) = (x'_1, y)\exp\{-\varphi_1(y)\}$ и $\hat{\nu}_2(y) = \hat{\mu}_1(y)\hat{\mu}_2(-y) = (x'_2, y)\exp\{-\varphi_2(y)\}$, где $x'_j \in X$, а $\varphi_j(y)$ — непрерывная неотрицательная функция на Y, удовлетворяющая уравнению (3). Так как $f_2 \in \mathrm{Aut}(Y)$ и на Y выполнено (8), то $\varphi_1(y) = \varphi_2(y)$. Положим $\varphi_1(y) = \varphi_2(y) = 2\varphi(y)$. Преобразовывая правую часть уравнения (1), получаем

$$\hat{\mu}_1(u+v)\hat{\mu}_2(u-v) = (x'_1, u)(x'_2, v)\exp\{-2[\varphi(u) + \varphi(v)]\}, \quad u, v \in Y.$$

Полагая здесь $u = v = y/2$, а затем $u = -v = y/2$ (мы пользуемся здесь тем, что $f_2 \in \mathrm{Aut}(Y)$), получаем, что

$$\hat{\mu}_1(y) = ((x'_1 + x'_2)/2, y)\exp\{-\varphi(y)\}, \qquad \hat{\mu}_2(y) = ((x'_1 - x'_2)/2, y)\exp\{-\varphi(y)\}.$$

Предложение 1 доказано.

З а м е ч а н и е 2. Предложение 1 можно переформулировать следующим образом. Пусть X — локально компактная сепарабельная абелева метрическая группа такая, что $f_2 \in \mathrm{Aut}(X)$. Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1, μ_2 такими, что $\hat{\mu}_1(y)\hat{\mu}_2(y) \neq 0$. Тогда, если $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ независимы, то $\mu_j \in \Gamma(X)$.

З а м е ч а н и е 3. Отметим, что в случае теоремы A условие необращения в нуль характеристических функций $\hat{\mu}_j(y)$ является следствием уравнения (1) и того, что $y/2^n \longrightarrow 0$ при $n \to \infty$. Последнее утверждение для произвольной локально компактной абелевой группы с однозначным делением на 2, вообще говоря, не верно. Поэтому на группах рассуждения, использованные нами для доказательства необращения в нуль решений уравнения (1) на $\mathbb{R}$, не проходят. Более того, могут существовать обращающиеся в нуль решения уравнения (1) (см. ниже теорему 1).

4. Функциональное уравнение С.Н. Бернштейна на абелевой группе (общий случай)

Нам понадобятся некоторые дополнительные обозначения. Если K — замкнутая подгруппа группы X, то обозначим через $A(Y, K) = \{y \in Y : (x, y) = 1 \ \ \forall\, x \in K\}$ ее аннулятор. Через C_X обозначим связную компоненту нуля группы X, а через X_0 — подгруппу в X, состоящую из всех компактных элементов группы X. Локально компактная абелева группа K называется группой Корвина, если $K^{(2)} = K$. Носитель распределения μ обозначим через $\sigma(\mu)$. Мы будем использовать в этом разделе известные факты, относящиеся к теории двойственности Понтрягина и структуре локально компактных абелевых групп (см. [6]), специально не оговаривая этого.

Через $I(X)$ обозначим множество идемпотентных распределений на группе X, т.е. множество сдвигов распределений Хаара m_K компактных подгрупп K группы X. Заметим, что характеристическая функция распределения Хаара m_K имеет вид

$$\hat{m}_K(y) = \begin{cases} 1 & y \in A(Y, K), \\ 0 & y \notin A(Y, K). \end{cases}$$

Вырожденное распределение, сосредоточенное в точке $x \in X$, обозначим через E_x.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1 ([4, § 9]). *Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в локально компактной сепарабельной абелевой метрической группе X и с распределениями μ_1, μ_2. Если $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ независимы, то распределения μ_j можно так заменить их сдвигами μ'_j, что $\sigma(\mu'_j) \subset X_1 \approx \mathbb{R}^n + K$, где $n \geq 0$, а K — компактная группа Корвина.*

Докажем основную теорему этого раздела.

Теорема 1. *Пусть X — локально компактная сепарабельная абелева метрическая группа такая, что C_X не содержит элементов порядка 2. Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1, μ_2. Если $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ независимы, то $\mu_j \in \Gamma(X) * I(X)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ независимы, то, как следует из леммы 1, распределения μ_j можно так заменить их сдвигами μ'_j, что $\sigma(\mu'_j) \subset X_1 \approx \mathbb{R}^n + K$, где $n \geq 0$, а K — компактная группа Корвина. Поэтому можно с самого начала считать, что $X = \mathbb{R}^n + K$. Из вида группы X тогда следует, что f_2 — эпиморфизм X, а также, что $X_{(2)} \subset C_X$. Так как C_X не содержит элементов порядка 2, то $X_{(2)} = \{0\}$. Следовательно, f_2 — мономорфизм X, а значит, $f_2 \in \mathrm{Aut}(X)$.

Положим $N_1 = \{y \in Y : \hat{\mu}_1(y) \neq 0\}$, $N_2 = \{y \in Y : \hat{\mu}_2(y) \neq 0\}$, $N = N_1 \cap N_2$. Из уравнения (1) легко следует, что N — открытая подгруппа в Y. Из (7) получаем, что $N_1 = N_2 = N$.

Покажем, что $f_2 \in \mathrm{Aut}(N)$. Так как $f_2 \in \mathrm{Aut}(X)$, то $f_2 \in \mathrm{Aut}(Y)$, и достаточно показать, что f_2 — эпиморфизм N. Пусть $y \in N$. Так как $f_2 \in \mathrm{Aut}(Y)$, то $y = 2y'$, где $y' \in Y$. Но из (7) следует, что $y' \in N$, т.е. f_2 — эпиморфизм N, а значит, $f_2 \in \mathrm{Aut}(N)$. Рассмотрим сужение уравнения (1) на N. Из предложения 1 получаем, что при $y \in N$ $\hat{\mu}_j(y) = l_j(y)\exp\{-\varphi(y)\}$, где $\varphi(y)$ — непрерывная неотрицательная функция на Y, удовлетворяющая уравнению (3), а $l_j(y)$ — характер группы N. Следовательно,

$$\hat{\mu}_1(y) = \begin{cases} l_1(y)\exp\{-\varphi(y)\}, & y \in N, \\ 0 & y \notin N, \end{cases}$$
$$\hat{\mu}_2(y) = \begin{cases} l_2(y)\exp\{-\varphi(y)\}, & y \in N, \\ 0 & y \notin N. \end{cases} \tag{16}$$

Воспользуемся теоремой о продолжении характера и продолжим характер $l_j(y)$ с подгруппы N до характера (x_j, y), $x_j \in X$, на группе Y. Продолжим функцию $\varphi(y)$ с подгруппы N на группу Y с сохранением ее свойств (см. [7]). Сохраним для продолженной функции обозначение $\varphi(y)$. Пусть γ — гауссовское распределение на X с характеристической функцией $\hat{\gamma}(y) = \exp\{-\varphi(y)\}$. Из вида $\hat{\mu}_j(y)$ теперь легко следует, что $\mu_j = \gamma * m_G * E_{x_j}$, где $G = A(X, N)$. Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 4. Теорему 1 можно переформулировать следующим образом. Пусть Y — локально компактная сепарабельная абелева метрическая группа такая, что f_2 — эпиморфизм группы Y/Y_0. Тогда все решения уравнения (1) на группе Y в классе характеристических функций вероятностных распределений имеют вид (16).

З а м е ч а н и е 5. Если C_X содержит элементы порядка 2, то, как показано в [4, §9], существуют независимые случайные величины ξ_1, ξ_2 со значениями в группе X и с распределениями μ_j такие, что $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ независимы, а $\mu_j \notin \Gamma(X) * I(X)$.

Обсудим теперь следующий вопрос. Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые одинаково распределенные с распределением μ случайные величины со значениями в группе X. Как следует из теоремы 1, если C_X не содержит элементов порядка 2, то из независимости $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ вытекает, что $\mu_j \in \Gamma(X) * I(X)$. Оказывается, класс групп, для которых это утверждение выполнено, шире указанного в теореме 1 (см. ниже теорему 2). Докажем вначале аналог предложения 1 для одинаково распределенных случайных величин.

Предложение 2. *Пусть X — локально компактная сепарабельная абелева метрическая группа, содержащая не более одного элемента порядка 2.*

Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые одинаково распределенные с распределением μ случайные величины со значениями в группе X такие, что характеристическая функция $\hat\mu(y)$ не обращается в нуль. Если $\xi_1+\xi_2$ и $\xi_1-\xi_2$ независимы, то $\mu \in \Gamma(X)$.

Доказательство. Из независимости $\xi_1+\xi_2$ и $\xi_1-\xi_2$ следует, что на Y выполнено уравнение (2), а значит, и уравнение

$$|\hat\mu(u+v)||\hat\mu(u-v)| = |\hat\mu(u)|^2|\hat\mu(v)|^2, \quad u,v \in Y.$$

Обозначая $\varphi(y) = -\ln|\hat\mu(y)|$, отсюда получаем, что $\varphi(y)$ — непрерывная неотрицательная функция на Y, удовлетворяющая уравнению (3), а $|\hat\mu(y)| = e^{-\varphi(y)}$.

Положим $l(y) = \hat\mu(y)/|\hat\mu(y)|$. Заметим, что $|l(y)| = 1$, $l(-y) = \overline{l(y)}$ при $y \in Y$ и $l(0) = 1$. Для доказательства предложения 2 достаточно показать, что $l(y)$ — характер группы Y, т.е. выполнено уравнение

$$l(u+v) = l(u)l(v), \quad u,v \in Y. \tag{17}$$

Очевидно, функция $l(y)$ удовлетворяет уравнению (2), а следовательно, и уравнениям (4)–(6). Из (6) следует, что $l(y)$ является характером на подгруппе $\overline{Y^{(2)}}$. Если группа X не содержит элементов порядка 2, то $Y = \overline{Y^{(2)}}$ и функция $l(y)$ — характер группы Y. Пусть группа X содержит элемент порядка 2. Покажем, что и в этом случае функция $l(y)$ является характером на группе Y. Продолжим характер $l(y)$ с подгруппы $\overline{Y^{(2)}}$ до характера (x_0, y) группы Y. Положим $l'(y) = l(y)/(x_0, y)$. Функция $l'(y)$ удовлетворяет уравнению (4) и $l'(y) = 1$ при $y \in \overline{Y^{(2)}}$. Так как $l'(2y) = (l'(y))^2$ при $y \in Y$, то $l'(y) = \pm 1$ при $y \in Y$. Уравнение (4) для функции $l'(y)$ переходит в уравнение $l'(u+v)l'(u-v) = 1$, $u,v \in Y$. Заменим здесь u на $u+v$. Тогда $l'(u+2v)l'(u) = 1$, $u,v \in Y$, а следовательно, $l'(u+2v) = l'(u)$, $u,v \in Y$, т.е. функция $l'(y)$ инвариантна относительно сдвигов на элементы $\overline{Y^{(2)}}$. Рассмотрим фактор-группу $Y/\overline{Y^{(2)}}$. Поскольку $(Y/\overline{Y^{(2)}})^* \approx A(X, \overline{Y^{(2)}}) = X_{(2)} \approx \mathbb{Z}(2)$, то фактор-группа $Y/\overline{Y^{(2)}}$ состоит из двух классов смежности, т.е. $Y/\overline{Y^{(2)}} = \overline{Y^{(2)}} \cup (y_0 + \overline{Y^{(2)}})$. На каждом классе смежности функция $l'(y)$ принимает постоянное значение. Из сказанного следует, что возможны следующие случаи:

$$l'(y) \equiv 1, \qquad l'(y) = \begin{cases} \;\;\,1 & y \in \overline{Y^{(2)}}, \\ -1 & y \in y_0 + \overline{Y^{(2)}}. \end{cases}$$

Очевидно, в обоих случаях, функция $l'(y)$ удовлетворяет уравнению (17) на группе Y. Следовательно, $l'(y)$ — характер, а значит, и $l(y)$ — характер. Тем самым предложение 2 полностью доказано.

З а м е ч а н и е 6. Предложение 2 можно переформулировать следующим образом. Пусть Y — локально компактная сепарабельная абелева метрическая группа такая, что либо $Y = \overline{Y^{(2)}}$, либо $Y/\overline{Y^{(2)}} \approx \mathbb{Z}(2)$. Тогда все решения уравнения (2) на группе Y в классе характеристических функций вероятностных распределений имеют вид (15).

Теорема 2. *Пусть X — локально компактная сепарабельная абелева метрическая группа такая, что C_X содержит не более одного элемента порядка 2. Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые одинаково распределенные с распределением μ случайные величины со значениями в группе X. Если $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ независимы, то $\mu \in \Gamma(X) * I(X)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ независимы, то, как следует из леммы 1, распределение μ можно так заменить его сдвигом μ', что $\sigma(\mu') \subset X_1 \approx \mathbb{R}^n + K$, где $n \geq 0$, а K — компактная группа Корвина. Поэтому можно с самого начала считать, что $X = \mathbb{R}^n + K$. Для групп такого вида выполнено $X_{(2)} \subset C_X$. Так как C_X содержит не более одного элемента порядка 2, то и вся группа X содержит не более одного элемента порядка 2.

Положим $N = \{y \in Y : \hat{\mu}(y) \neq 0\}$. Из уравнения (2) следует, что N — открытая подгруппа в Y. Заметим, что т.к. открытая подгруппа N обладает свойством: если $2y \in N$, то $y \in N$, то $G = A(X, N)$ — компактная подгруппа Корвина в X. Проверим, что подгруппа N удовлетворяет условию замечания 5. Для этого достаточно проверить, что группа характеров $N^* = X/G$ содержит не более одного элемента порядка 2. Действительно, пусть $2[x_1] = 2[x_2] = [0]$, $[x_1] \neq [x_2]$, $[x_1], [x_2] \in X/G$. Тогда $2x_j \in G$. Так как $G = G^{(2)}$, то $2x_j = 2g_j$, $g_j \in G$. Следовательно, $x'_j = x_j - g_j$ — элементы порядка 2. Так как $[x'_j] = [x_j]$ и $[x_1] \neq [x_2]$, то $x'_1 \neq x'_2$, что невозможно. Рассмотрим сужение уравнения (2) на N. Из замечания 5 получаем, что при $y \in N$ имеет место представление $\hat{\mu}(y) = l(y) \exp\{-\varphi(y)\}$, где $\varphi(y)$ — непрерывная неотрицательная функция на Y, удовлетворяющая уравнению (3), а $l(y)$ — характер группы N. Следовательно,

$$\hat{\mu}(y) = \begin{cases} l(y) \exp\{-\varphi(y)\}, & y \in N, \\ 0 & y \notin N. \end{cases} \tag{18}$$

Рассуждая далее, как и в заключительной части доказательства теоремы 1, получаем утверждение теоремы 2.

З а м е ч а н и е 7. Теорему 2 можно переформулировать следующим образом. Пусть Y — локально компактная абелева группа такая, что либо $Y/Y_0 = (Y/Y_0)^{(2)}$, либо $(Y/Y_0)/(Y/Y_0)^{(2)} \approx \mathbb{Z}(2)$. Тогда все решения уравнения (2) на группе Y в классе характеристических функций вероятностных распределений имеют вид (18).

З а м е ч а н и е 8. Если C_X содержит более одного элемента порядка 2, то, как показано в [2, 3] (см. также [4, §9]), существуют независимые одинаково распределенные с распределением μ случайные величины ξ_1, ξ_2 со значениями в группе X такие, что $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ независимы, а $\mu \notin \Gamma(X) * I(X)$.

Список литературы

[1] *С.Н. Бернштейн*, Об одном свойстве, характеризующем закон Гаусса. — *Тр. Ленингр. политехн. ин-та* (1941), т. 217, № 3, с. 21–22.

[2] *Г.М. Фельдман*, Гауссовские распределения в смысле С.Н. Бернштейна на группах. — *Теория вероятностей и ее применения* (1986), т. 31, № 1, с. 47–58.

[3] *G.M. Feldman*, On groups for which the Bernstein characterization of a Gaussian distribution is valid. — *Dop. NAN Ukr.* (2001), № 8, с. 29–32.

[4] *Г.М. Фельдман*, Арифметика вероятностных распределений и характеризационные задачи на абелевых группах. Наукова думка, Киев (1990).

[5] *Г.М. Фельдман*, О разложении гауссовского распределения на группах. — *Теория вероятностей и ее применения* (1977), т. 26, № 1, с. 136–143.

[6] *Э. Хьюитт, К. Росс*, Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. Наука, Москва (1975).

[7] *Х. Хейер*, Вероятностные меры на локально компактных группах. Мир, Москва (1981).

On the Bernstein functional equation

M.V. Myronyuk

We give two proofs of the Bernstein theorem about characterization of the Gaussian distribution by the independence of the sum and the difference of independent random variables. These proofs use neither the Cramer theorem about decomposition of a Gaussian distribution nor the finite difference method. Due to this fact our proofs without changes are carried over to the case of a locally compact Abelian group with single-valued division by two, provided that the characteristic functions of the considering distributions do not vanish. We use the last result for the description of all locally compact Abelian groups for which the Bernstein theorem is valid.