Математическая физика, анализ, геометрия
2004, т. 11, № 2, с. 189–207

Голоморфные конформные субмерсии многообразий Кэлера–Эйнштейна

С.И. Окрут

Механико-математический факультет
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина
E-mail:okrut@univer.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 7 декабря 2003 г.
Представлена А.А. Борисенко

Приводится описание многообразий Кэлера–Эйнштейна, допускающих голоморфную конформную субмерсию со вполне геодезическими слоями при некоторых дополнительных предположениях на свойства субмерсии. Показано, что локальных препятствий построения таких метрик нет. Однако для полных метрик с компактными одномерными слоями разнообразие почти что сводится к прямым произведениям.

Наводиться опис многовидів Келера–Ейнштейна, що допускають голоморфну конформну субмерсію з цілком геодезичними шарами при деяких додаткових припущеннях на властивості субмерсії. Показано, що локальних перешкод побудови таких метрик немає. Однак для повних метрик з компактними одномірними шарами розмаїтість майже що зводиться до прямих добутків.

Введение

Хорошо известно, что риманово скрещенное произведение находит широкое применение в конструировании эйнштейновых метрик, множество таких применений описано в работе [1, гл. 9]. В работах [2–4] было показано, что в кэлеровой геометрии имеется аналог скрещенных произведений римановой геометрии. Этот аналог, скрещенное кэлерово расслоение (определение приводится в разд. 1), в невырожденном случае не является глобально тривиальным и не расслаивается на пару взаимно ортогональных слоений, как в римановой геометрии. Скрещенное кэлерово расслоение характеризуется тем, что оно допускает голоморфную конформную субмерсию с некоторыми дополнительными свойствами на слои субмерсии (точные определения см. в разд. 1).

Mathematics Subject Classification 2000: 53C25.

Цель этой статьи — выяснить условия, при которых скрещенное кэлерово расслоение может нести метрику Кэлера–Эйнштейна. Эти условия доставляет теорема 2.1. Для случая, когда слои скрещенного кэлерова расслоения одномерные, возможность построения метрики Кэлера–Эйнштейна сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, построению которого посвящен разд. 3. Описание всех полных многообразий Кэлера–Эйнштейна, которые могут быть получены как скрещенные кэлеровы расслоения с компактным одномерным слоем, дано теоремой 4.2. Все они оказываются локально приводимыми.

1. Основные понятия и обозначения

Произвольно выбираемые многообразия, функции и тензорные поля предполагаются гладкими (класса C^∞). Будем также предполагать, что все произвольно выбираемые многообразия являются связными. Если не оговорено иное, то величина размерности указывается над $\mathbb{C}$. А основные понятия и обозначения соответствуют принятым, например, в [6, 7] или в [1].

Рассмотрим следующее обобщение понятия вполне вещественной бисекционной кривизны введенной Бишопом и Гольдбергом. Пусть L и V — комплексные ортогональные подпространства в касательном пространстве кэлерова многообразия, причем $\dim_c L = 1$ и $\dim_c V = q$. Выберем некоторый ортонормированный базис $U_1, \dots, U_q, JU_1, \dots, JU_q$ в V и некоторый единичный вектор X в L. Для каждой пары векторов X и U_α через $B(X, U_\alpha)$ будем обозначать вполне вещественную бисекционную кривизну, $B(X, U_\alpha) = g(R(X, JX)JU_\alpha, U_\alpha)$. Величина

$$B(L, V) = \frac{1}{q}\sum_{\alpha=1}^{q} B(X, U_\alpha)$$

в дальнейшем будет называться *средней вполне вещественной кривизной* пары подпространств L и Q. Докажем корректность введенной величины $B(L, V)$. С помощью операции опускания индексов воспользуемся отождествлением бивекторов и тензоров типа (1,1), тогда сужение почти комплексной структуры на подпространство V можно представить так: $J|_V = 2\sum_{\alpha=1}^{q} JU_\alpha \wedge U_\alpha$. Последнее равенство означает, что выражение в правой части этого равенства не зависит от выбора базиса $U_1, \dots, U_q, JU_1, \dots, JU_q$ в V. Так как $\sum_{\alpha=1}^{q} g(R(X, JX)JU_\alpha, U_\alpha) = -\frac{1}{2}g(\varrho(X \wedge JX), J|_V)$, то величина $B(L, V)$ действительно определена корректно.

В последующем рассмотрении основным объектом является кэлерово многообразие E, на котором задана голоморфная конформная субмерсия ν на кэлерово многообразие M. Конформность субмерсии означает, что выполняется равенство $g(HP, HQ) = \exp(2f)\nu^* g_M(P, Q)$, каковы бы ни были векторы

P и Q. Здесь g и g_M — это кэлеровы метрики на E и M, соответственно, а через H обозначается поле ортопроекторов на горизонтальное подпространство субмерсии ν, которое продолжается на всю тензорную алгебру в каждой точке многообразия E. *Показатель конформности* f полагается вертикальным, т.е. $Hdf = 0$. В дальнейшем для сокращения записи используем следующие обозначения: $\omega = df$, $\omega^c = Jdf$, $gr\, f$ – градиент функции f и $gr^c f = J\, gr\, f$. Здесь J — это (1,1)-тензор почти комплексной структуры на E. Через X^H, Y^H будем обозначать горизонтальные лифты векторов X, Y базы M, а через U, W — вертикальные векторы. Голоморфность субмерсии немедленно влечет инвариантность относительно комплексной структуры вертикального распределения, а эрмитовость метрики g — инвариантность горизонтального распределения. Поэтому горизонтальный лифт и действие почти комплексной структуры — перестановочные между собой операции, и далее одним символом J будет обозначаться почти комплексная структура как в E, так и в M.

Предложение 1.1. *Пусть кэлерово многообразие E допускает голоморфную конформную субмерсию ν с вертикальным показателем конформности f и вполне геодезическими слоями на базу M, кэлерово многообразие, и $\dim_c M = m > 1$. Если V — вертикальное пространство субмерсии ν, а L — произвольное одномерное комплексное подпространство в горизонтальном пространстве, то средняя вполне вещественная кривизна $B(L,V)$ является лишь функцией точки многообразия E.*

Доказательство. Для доказательства предложения надо показать, что величина $B(L,V)$ не зависит от выбора подпространства L. Пусть X — произвольный единичный горизонтальный вектор, а $U_1, \ldots, U_q, JU_1, \ldots, JU_q$ — ортонормированный базис в V как в определении средней вполне вещественной кривизны. Воспользуемся формулой $R(U,W)X^H = 2d\omega^c(U,W)JX^H$ из работы [3, теорема 2.5, п. (a)], тогда по определению средней вполне вещественной кривизны получим следующее выражение:

$$B(L,V) = -\frac{2}{q}\sum_{\alpha=1}^{q} d\omega^c(U_\alpha, JU_\alpha). \tag{1.1}$$

Величина, стоящая в правой части приведенного равенства не зависит от подпространства L. Остается отметить, что, как показано выше, от выбора базиса в подпространстве V, величина $B(L,V)$ тоже не зависит. ∎

Введем обозначение для функции $\varkappa = B(L,V)$ на многообразии E. Кроме того, условимся отличать индексом M одноименные геометрические характеристики базы M от тотального пространства E (напр., ric_M и ric для тензора Риччи).

Тривиальным случаем субмерсий рассматриваемого типа являются субмерсии с постоянным показателем конформности. Как следует из теоремы 2.4 [3], тотальное пространство субмерсии в этом случае локально приводимо, а субмерсия локально является проекцией на один из сомножителей. Для субмерсий указанного типа с непостоянным показателем конформности и одномерными слоями кэлерово многообразие E является кэлеровым продолжением ([3, теорема 5.4]). Метрика кэлерова продолжения в общем случае определяется формулами (5.3)–(5.4) из [3]. Для удобства дальнейшего изложения это определение приводится с заменой обозначения константы λ, традиционно обозначающей постоянную Эйнштейна, на k. Многообразие E называется *кэлеровым продолжением* многообразия M вдоль кривой, если каждая точка обладает координатной окрестностью O, удовлетворяющей включению из формулы (1.2), и в этой окрестности кэлерова форма Φ многообразия E представлена в виде (1.3). Здесь U — координатная окрестность базы M субмерсии ν и $z = (z^1, \dots, z^m)$. Причем окрестность U такова, что на U определен кэлеров потенциал F_M. Кроме того, вещественные константы A, B, p_0 и $k \neq 0$ удовлетворяют соотношениям $0 \leq A < B$ и (1.4).

$$O \subseteq \{(w, z) \in \mathbb{C} \times U \mid A \leq |w| \exp(-2\pi k F_M) < B\}, \tag{1.2}$$

$$\Phi = -\frac{2i}{\pi} \partial l(s) \wedge \overline{\partial} l(s) + p^2(s) \Phi_M, \tag{1.3}$$

$$2k \int\limits_A^B \sigma \left(\frac{dl}{d\sigma}\right)^2 d\sigma < p_0^2, \tag{1.4}$$

$$p^2(s) = p_0^2 - 2k \int\limits_A^s \sigma \left(\frac{dl}{d\sigma}\right)^2 d\sigma, \tag{1.5}$$

где $s = |w| e^{-2\pi k F_M} : E \to \mathbb{R}$. На открытом же подмножестве E_o в E, где показатель конформности f невырожден, по теореме 3.6 из [3] метрика кэлерова продолжения допускает следующее локальное представление:

$$\Phi = e^{2f} (\frac{2i}{\pi} \dot{f}^{-1}(t) \partial f \wedge \overline{\partial} f + \Phi_M), \tag{1.6}$$

$$t = \frac{1}{2}(\zeta + \overline{\zeta}) - 2\pi F_M, \tag{1.7}$$

где F_M — это локально определенный кэлеров потенциал базы, а ζ — комплексная координата слоя субмерсии. Причем вещественная функция t, *несущая функция* продолжения, определена однозначно с точностью до прибавления константы (см. [3, леммы 3.3 и 4.3]). Показатель конформности $f = f(t)$ как функция от несущей функции в окрестности любой точки из E_o локально полностью определяет кэлерово продолжение. В формуле (1.6), как и всюду в дальнейшем, точкой обозначается производная по t. Для кэлеровых продолжений функция f в дальнейшем также будет называться функцией продолжения.

Голоморфные конформные субмерсии полных кэлеровых многообразий на самом деле могут являться лишь проекциями ([4, теорема 8.6]) скрещенных кэлеровых расслоений. Кэлерово конформное расслоение с вертикальным показателем конформности и со вполне геодезическими изоморфными между собой слоями называется скрещенным кэлеровым расслоением [4, определение 8.4].

2. Произвольная размерность слоя субмерсии

Предложение 2.1. *Пусть кэлерово многообразие E допускает голоморфную конформную субмерсию ν с вертикальным показателем конформности f и вполне геодезическими слоями на базу M, кэлерово многообразие, и* $\dim_c M > 1$. *Тогда тензор кривизны многообразия E удовлетворяет следующим равенствам:*

а) $R(U,W)X^H = 2d\omega^c(U,W)JX^H$,

б) $R(X^H,Y^H)U = g(JX^H,Y^H)(\nabla_U\, gr^c f + \nabla_{JU}\, gr\, f)$,

в) $R(U,X^H)W = d\omega^c(U,JW)X^H + d\omega^c(U,W)JX^H$,

г) $R(X,U)Y = g(X,Y)\nabla_U\, gr\, f + g(JX,Y)\nabla_U\, gr^c f + (\omega(U)g(X,Y) + \omega^c(U)g(JX,Y))\, gr\, f + (\omega(U)g(JX,Y) - \omega^c(U)g(X,Y))\, gr^c f$,

д) $R(X^H,Y^H)Z^H = (R_M(X,Y)Z)^H - \|gr\, f\|^2(g(Z^H,Y^H)X^H - g(Z^H,X^H)Y^H + g(Z^H,JY^H)JX^H - g(Z^H,JX^H)JY^H + 2g(X^H,JY^H)JZ^H)$.

Доказательство. Сформулированное предложение добавляет к теореме 2.1, доказанной в [5], лишь п. д). Докажем его. Условие конформности субмерсии ν и предложение 2.2 из [3] позволяют прямым вычислением по формуле Кошуля убедиться, что и в случае произвольной размерности слоя субмерсии справедлива формула

$$\nabla_{X^H}Y^H = (\nabla^M_X Y)^H - g(X^H,Y^H)\, gr\, f + g(X^H,JY^H)\, \overset{c}{gr}\, f. \tag{2.1}$$

Так как субмерсия голоморфная, а ее слои вполне геодезические, то вектор $\nabla_{X^H}\, gr\, f$ и вектор $\nabla_{X^H}\, gr^c f$ всегда горизонтальные. Так как $g(\nabla_{X^H}\, gr\, f, Y^H) = -g(gr\, f, \nabla_{X^H}Y^H)$, то воспользовавшись формулой (2.1), получим такое равенство:

$$\nabla_{X^H}\, gr\, f = \|gr\, f\|^2 X^H. \tag{2.2}$$

Используя формулы (2.1) и (2.2), получим следующее выражение:

$$\nabla_{X^H}\nabla_{Y^H}Z^H = (\nabla_X\nabla_Y Z)^H - X^H g(Y^H, Z^H)\, gr\, f - g(Y^H, Z^H)\|gr\, f\|^2 X^H$$
$$+X^H g(Y^H, JZ^H)\, \overset{c}{gr}\, f + g(Y^H, JZ^H)\|gr\, f\|^2 JX^H$$
$$-g(X^H, (\nabla_Y Z)^H)\, gr\, f + g(X^H, J(\nabla_Y Z)^H)\, \overset{c}{gr}\, f.$$

На основании предложения 2.2 из [3] справедливо следующее равенство: $\left[X^H, Y^H\right] = [X,Y]^H + 2\Phi(X^H, Y^H)\, gr^c f$. А на основании леммы 2.1 из [3] справедливо такое равенство:

$$\nabla_U X^H = \omega(U)X^H + \omega^c(U)JX^H.$$

Поэтому на основании приведенных равенств и формулы (2.1) следует, что $\nabla_{[X^H,Y^H]}Z^H = (\nabla_{[X,Y]}Z)^H + 2\Phi(X^H,Y^H)\|\, gr\, f\|^2 JZ^H - g([X,Y]^H, Z^H)\, gr\, f + g([X,Y]^H, JZ^H)\, gr^c f$. Полученные выражения для ковариантных выражений при подстановке в формулу $R(X^H,Y^H)Z^H = \nabla_{X^H}\nabla_{Y^H}Z^H - \nabla_{Y^H}\nabla_{X^H}Z^H - \nabla_{[X^H,Y^H]}Z^H$ и приводят к равенству п. д). ■

Предложение 2.2. *Пусть кэлерово многообразие E допускает голоморфную конформную субмерсию ν с вертикальным показателем конформности f и вполне геодезическими слоями на базу M, кэлерово многообразие, и $\dim_c M = m > 1$. Тогда справедливы следующие выражения:*

а) $\mathrm{ric}(U,W) = \mathrm{ric}_V(U,W) - 2md\omega^c(U,JW)$,

б) $\mathrm{ric}(U,Y) = 0$,

в) $\mathrm{ric}(X^H,Y^H) = \mathrm{ric}_M(X,Y) + (q\varkappa - 2(m+1)\|gr\, f\|^2)g(X^H,Y^H)$,

где ric_V — тензор Риччи вертикального слоя субмерсии как подмногообразия в индуцированной метрике.

Доказательство. В некоторой точке Ξ из E выберем ортонормированный базис $U_1,\dots,U_q$, $JU_1,\dots,JU_q$ в вертикальном пространстве V. И выберем ортонормированный базис $Y_1,\dots,Y_q$, $JY_1,\dots,JY_q$ в точке $\nu(\Xi)$ базы M. Так как субмерсия ν является конформной, то векторы $e^{-f}Y_1^H,\dots,e^{-f}Y_q^H, e^{-f}JY_1^H,\dots,e^{-f}JY_q^H$ образуют ортонормированный базис в горизонтальном пространстве в точке Ξ. Применяя п. в) предложения 2.1, можно вычислить следующее: $g(R(e^{-f}Y_i,U)W, e^{-f}Y_i) = -d\omega^c(U,JW)$. А так как слои субмерсии являются вполне геодезическими, то отсюда следует равенство п. (а). Равенство п. (б) следует из пп. (б) и (в) предложения 2.1.

Докажем последний пункт. Применим формулу п. д) предложения 2.1 к вычислению следующего выражения:

$$e^{-2f}\sum_{i=1}^{m}(g(R(Y_i^H,X^H)Y^H,Y_i^H)+g(R(JY_i^H,X^H)Y^H,JY_i^H)$$
$$=\operatorname*{ric}_M(X,Y)-2(m+1)\|gr\,f\|^2g(X^H,Y^H).$$

Так как форма $d\omega^c$ эрмитова, то п. в) предложения 2.1 влечет справедливость формулы

$$g(R((U_\alpha,X^H)Y^H,U_\alpha)=g(R((JU_\alpha,X^H)Y^H,UU_\alpha)$$
$$=-d\omega^c(U_\alpha,JU_\alpha)g(X^H,Y^H).$$

Используя полученные выражения, вычислим тензор Риччи

$$\operatorname{ric}(X^H,Y^H)$$
$$=\operatorname*{ric}_M(X,Y)-2(m+1)\|gr\,f\|^2g(X^H,Y^H)-2g(X^H,Y^H)\sum_{\alpha=1}^{q}d\omega^c(U_\alpha,JU_\alpha).$$

Последнее выражение с учетом формулы (1.1) и влечет справедливость равенства п. в). ■

Теорема 2.1. *Пусть многообразие Кэлера–Эйнштейна E допускает голоморфную конформную субмерсию с вертикальным показателем конформности f и вполне геодезическими q-мерными слоями на кэлерово многообразие M, $\dim_c M=m>1$. Тогда верно следующее:*

а) M — это многообразие Эйнштейна,

б) $\lambda=\lambda_M e^{-2f}+q\varkappa-2(m+1)\|gr\,f\|^2$,

где λ — постоянная Эйнштейна.

Доказательство. Если E — многообразие Эйнштейна, то из п. в) предложения 2.2 следует равенство $\operatorname{ric}_M(X,Y)=e^{2f}(\lambda-q\varkappa-2(m+1)\|gr\,f\|^2)g_M$. То есть кривизна Риччи не зависит от направления, а является функцией точки M. А так как $\dim_R M\geqslant 4$, то M – многообразие Эйнштейна, и выполняется формула п. б). ■

3. Одномерный слой

Лемма 3.1. *Кэлерово продолжение E с невырожденной функцией продолжения f многообразия Кэлера–Эйнштейна M является эйнштейновым многообразием с постоянной Эйнштейна λ тогда и только тогда, когда показатель конформности удовлетворяет двум условиям:*

а) $\lambda = k_{vert} + m\varkappa$,

б) $\lambda = \lambda_M e^{-2f} + \varkappa - 2(m+1)\|gr\, f\|^2$,

где k_{vert} обозначает секционную кривизну слоя.

Доказательство. Кэлерово продолжение, как уже отмечалось в первом разделе, является в точности кэлеровым многообразием, допускающим голоморфную конформную субмерсию с вертикальным непостоянным показателем конформности и вполне геодезическими одномерными слоями. Пусть E — эйнштейново многообразие. Так как слои вполне геодезические и вещественно двумерные, то верно следующее равенство: $\mathrm{ric}_V(U,W) = k_{\mathrm{vert}}\, g(U,W)$. Подставляя в равенство п. а) предложения 2.2 выражение $d\omega^c(U, JW)$, вычисленное по формуле из леммы 3.1 в [3], и последнее выражение, получим равенство п. а). Равенство п. б) уже было получено в теореме 2.1.

Пусть выполнены два равенства из условия леммы. На основании пп. (а)–(в) предложения 2.2 можно сделать вывод, что кривизна Риччи в каждой точке многообразия E равна λ и не зависит от направления. А так как вещественная размерность E не меньше четырех, то можно заключить, что E — это эйнштейново многообразие. ■

Лемма 3.2. *Пункты а) и б) леммы 3.1 при тех же предположениях эквивалентны следующим соответствующим пунктам:*

а) $\lambda e^{2f}/\pi = \dddot{f}\dot{f}^{-2} - \ddot{f}^2\dot{f}^{-3} + 2(m+1)\ddot{f}\dot{f}^{-1}$,

б) $\ddot{f} = \frac{1}{2\pi}(\lambda e^{2f} - \lambda_M)\dot{f} - 2(m+1)\dot{f}^2$.

Доказательство. В формуле (3.2) из [3] было получено выражение для квадрата нормы градиента

$$\|gr\, f\|^2 = -2\pi \exp(-2f)\dot{f}(t). \tag{3.1}$$

Далее вычислим $\varkappa$. Для этого, применяя формулу (1.7), последовательно продифференцируем показатель конформности: $\omega^c = \dot{f}(d\eta - 2\pi J dF_M)$ и $d\omega^c = \ddot{f} dt \wedge (\eta - 2\pi J dF_M) + 2\pi \dot{f} \Phi_M$. Воспользуемся формулой

$$d\omega^c = -\frac{\varkappa}{\|gr\, f\|^2} \omega \wedge \omega^c - e^{2f} \|gr\, f\|^2 \nu^* \Phi_M$$

леммы 3.1 из [3]. Из этой формулы следует, что $\ddot{f} dt \wedge d\eta(gr\, f, gr^c f) = -\varkappa \|gr\, f\|^2/2$. И таким образом, получаем выражение

$$\varkappa = 2\pi \ddot{f} \dot{f}^{-1} e^{-2f}. \tag{3.2}$$

Докажем эквивалентность пп. (а). Воспользуемся формулами

$$\nabla_{gr\, f} gr\, f = (-\frac{\varkappa}{2} - \|gr\, f\|^2)\, gr\, f, \quad \nabla_{gr^c f} gr\, f = (-\frac{\varkappa}{2} + \|gr\, f\|^2)\, \overset{c}{gr}\, f,$$

полученными в доказательстве предложения 5.2 из [3]. Кроме этого, учитывая выражение для скобки Ли $[gr\, f, gr^c f] = -2\|gr\, f\|^2\, gr^c f$, полученное там же, непосредственным вычислением получаем, что

$$R(\overset{c}{gr}\, f, gr\, f)\, gr\, f = \left(\frac{1}{2}\, gr\, f(\varkappa) + 2\varkappa \|gr\, f\|^2\right) \overset{c}{gr}\, f. \tag{3.3}$$

Воспользовавшись выражением $gr\, f = -2\pi \exp(-2f) \partial/\partial\xi$, приведенным в [3, (1.9)] и равенством (3.2), можно вычислить $gr\, f(\varkappa) = 4\pi^2 e^{-4f}(-\dddot{f} \dot{f}^{-1} + \ddot{f}^2 \dot{f}^{-2} + 2\ddot{f})$. Подставляя в формулу (3.3) последнее полученное выражение и выражение для градиента из формулы (3.1), после преобразований получим следующее выражение для секционной кривизны вертикальных слоев:

$$k_{\text{vert}} = \pi e^{-2f} \dot{f}^{-1} (\dddot{f} \dot{f}^{-1} - \ddot{f}^2 \dot{f}^{-2} + 2\ddot{f}). \tag{3.4}$$

После подстановки в формулу п. (а) леммы 3.1 выражений из формул (3.2) и (3.4) получим дифференциальное уравнение п. (а) доказываемой леммы.

Докажем эквивалентность пп. (б). Подставляя в равенство п. (б) леммы 3.1 выражение для нормы градиента, приведенное в формуле (3.1), и выражение для вполне вещественной бисекционной кривизны из формулы (3.2), получим дифференциальное уравнение п. (б) для функции продолжения. ■

Теорема 3.1. *Пусть кэлерово многообразие $(E,\, g)$ допускает голоморфную конформную субмерсию с вертикальным непостоянным показателем конформности f и вполне геодезическими одномерными слоями на кэлерово многообразие M, $\dim_c M = m > 1$. При этих условиях E – это эйнштейново многообразие лишь тогда, когда выполняются следующие два условия:*

а) M — многообразие Эйнштейна,

б) E — кэлерово продолжение, показатель конформности которого как функция несущей функции продолжения удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dot{f} = \frac{\lambda}{4\pi(m+2)}e^{2f} - \frac{\lambda_M}{4\pi(m+1)} + Ce^{-2(m+1)f}$,

где λ и λ_M — постоянные Эйнштейна многообразий E и M, соответственно, а C — некоторая константа.

Доказательство. Пусть E — это эйнштейново многообразие. Тогда п. (а) следует из теоремы 2.1. Как отмечалось в разд. 1, если показатель конформности является непостоянной функцией, а размерность слоев субмерсии равна единице, то многообразие E является кэлеровым продолжением. Для доказательства п. (б) воспользуемся леммой 3.2. Понижая порядок дифференциального уравнения п. (б) указанной леммы с помощью замены $v = \dot{f}$, получим линейное неоднородное уравнение $\frac{dv}{df} + 2(m+1)v = \frac{1}{2\pi}(\lambda e^{2f} - \lambda_M)$. Делая замену

$$w = v - \frac{\lambda}{4\pi(m+2)}e^{2f} + \frac{\lambda_M}{4\pi(m+1)}\,, \tag{3.5}$$

получим дифференциальное уравнение вида $\frac{dw}{df} + 2(m+1)w = 0$. Таким образом, $w = Ce^{-2(m+1)f}$ — общее решение последнего уравнения, где C — произвольная константа. Подставляя в равенство (3.5) полученное выражение для w и выражение для v, которым определялась величина v, приходим к дифференциальному уравнению из п. (б). Необходимость доказана.

Достаточность. Если продифференцировать равенство п. б), получим такие выражения:

$$\ddot{f} = \dot{f}A, \qquad A = -2(m+1)Ce^{-2(m+1)f} + \frac{\lambda}{2\pi(m+2)}e^{2f},$$
$$\dddot{f} = \dot{f}^2B + \dot{f}A^2, \qquad B = 4(m+1)^2Ce^{-2(m+1)f} + \frac{\lambda}{\pi(m+2)}e^{2f}.$$

Используя полученные выражения, можно вычислить выражение $\dddot{f}\dot{f}^{-2} - \ddot{f}^2\dot{f}^{-3} + 2(m+1)\ddot{f}\dot{f}^{-1} = B + 2(m+1)A = \lambda e^{2f}/\pi$. Таким образом, если выполняется равенство п. (б) доказываемой леммы, то на открытом всюду плотном подмногообразии E_o, т.е. там, где показатель конформности невырожден, выполняются оба условия на показатель конформности из леммы 3.2. Из лемм 3.1 и 3.2 следует, что E_o является эйнштейновым многообразием с постоянной Эйнштейна λ. Так как E_o всюду плотно в E (см. [3, лемма 5.3]), то E также является многообразием Эйнштейна с той же постоянной.

■

Многообразие Кэлера M, Φ_0 принято называть ходжевым, если все периоды кэлеровой формы Φ_0 целократны некоторому вещественному числу. Это эквивалентно тому, что кэлерова форма пропорциональна $\Phi_0 = r\Phi_M$ некоторому образу Φ_M целочисленного когомологического класса при естественном гомоморфизме $H^2(M, \mathbb{Z})$ в $H^2_{dR}(\mathbb{C}) \simeq H^2(\mathbb{C})$.

Теорема 3.2. *Каково бы ни было ходжево многообразие Эйнштейна M с постоянной Эйнштейна λ_M, для любой наперед заданной константы λ существует многообразие Кэлера–Эйнштейна E с постоянной Эйнштейна λ, допускающее голоморфную конформную субмерсию с вертикальным показателем конформности и вполне геодезическими слоями на многообразие M.*

Доказательство. Каковы бы ни были заданные числа λ_M и λ, можно выбрать константу C так, чтобы выполнялось неравенство

$$C < \frac{\lambda_M}{4\pi(m+1)} - \frac{\lambda}{4\pi(m+2)}.$$

Тогда для некоторого вещественного положительного числа ε существует решение задачи Коши $f(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$

$$\dot{f} = \frac{\lambda}{4\pi(m+2)} e^{2f} - \frac{\lambda_M}{4\pi(m+1)} + Ce^{-2(m+1)f}, \qquad f(0) = 0,$$

причем такое, что выполняется условие $\dot{f}(t) < 0$.

Пусть Φ_M — ходжева форма многообразия M, ассоциированная с эйнштейновой метрикой. Рассмотрим линейное эрмитово расслоение L, присоединенное к форме Φ_M [4, с. 294], т.е. такое расслоение, что форма кривизны эрмитовой связности в L совпадает с формой Φ_M. В линейном эрмитовом расслоении L над M рассмотрим открытое подмногообразие $E = \{\Xi \in L \mid |\ln\|\Xi\|| < \varepsilon\}$. Формула (6.15) из [4] задает на E метрику кэлерова продолжения и эквивалентна, с учетом выражений (5.7) из [3] и (6.14) из [4], формуле (1.6). Остается применить теорему 3.1. ∎

Если скалярная кривизна $s_M = \lambda_M / \dim_R M$ многообразия Эйнштейна отлична от нуля, то из уравнения Эйнштейна следует: класс когомологий кэлеровой формы пропорционален первому классу Чженя $c_1(M)$ многообразия M. Отсюда следует, что M является ходжевым многообразием. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Следствие 3.1. *Всякое многообразие Кэлера–Эйнштейна ненулевой скалярной кривизны может служить базой некоторой голоморфной конформной субмерсии с вертикальным показателем конформности и вполне геодезическими слоями определенной на многообразии Кэлера–Эйнштейна с любой наперед заданной скалярной кривизной.*

Безусловно, получаемые в теореме 3.2 метрики Кэлера–Эйнштейна могут и не быть полными. Как известно из теорем 2.3 и 2.4, приведенных в [8], полноту метрики кэлерова продолжения могут обеспечить лишь некоторые дополнительные условия на функцию продолжения.

4. Скрещенные расслоения Кэлера–Эйнштейна с компактным слоем

Функции, координаты, а также константа k из локально координатного представления, формулы (1.2)–(1.5), метрики кэлерова продолжения в окрестности точки вырождения показателя конформности определяются связью между координатами Ферми (эти координаты используются в доказательстве теоремы 5.4 из [3]), и несущей функцией продолжения. Функция же продолжения определяется геометрическими характеристиками субмерсии ([3, лемма 3.3]). Геометрический смысл *константы продолжения* k дается также формулой (4.14) из [3].

Лемма 4.3. *Пусть голоморфная конформная субмерсии* ν *со вполне геодезическими слоями и вертикальным показателем конформности кэлерова многообразия* E, $\dim_c E > 2$ *содержит некоторый компактный слой* S. *Пусть* k_{min} *и* k_{max} *— это значения константы кэлерова продолжения в окрестности точки минимума и максимума показателя конформности. Тогда справедливо равенство* $k_{min} + k_{max} = 0$, *где* k_{max} *— положительная константа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 5.3, приведенной в [3], следует, что у показателя конформности критическими значениями могут выступать лишь экстремальные значения. Из лемм 9.5, 9.7 из [4] следует, что компактный слой S (это сфера Римана $\mathbb{C}P^1$) имеет ровно два критических значения показателя конформности. Обозначим через q_{min} и q_{max} точки слоя S, где показатель конформности достигает минимального и максимального значения. На многообразии E определена форма $\mu = 4\pi \exp(-2f)\|gr\, f\|^{-2}\partial f$, сужение которой на каждый слой, согласно предложению 4.4 из [3], является мероморфной формой. Следствие 5.5 из [3] в наших обозначениях показывает, что справедливы следующие равенства:

$$\underset{q_{min}}{Res}\,\mu = -\frac{1}{k_{min}}, \qquad \underset{q_{max}}{Res}\,\mu = -\frac{1}{k_{max}}.$$

А так как сумма вычетов мероморфной формы на компактной римановой поверхности равна нулю ([9, п. 10.21]), то $k_{min}+k_{max} = 0$. Наконец, последнее замечание о том, что именно $k_{max} > 0$ очевидно следует из формулы (1.5). ■

Как уже отмечалось в конце разд. 1, если полное многообразие Кэлера–Эйнштейна E допускает голоморфную конформную субмерсию со вполне геодезическими слоями и вертикальным показателем конформности, то оно может быть лишь скрещенным кэлеровым расслоением. На всяком скрещенном кэлеровом расслоении E определена функция $u = e^{2f}$, где f, как и прежде, — показатель конформности проекции $\nu : E \to M$. Назовем промежуток $Im\, u$ промежутком коэффициентов субмерсии. Пусть E_o — открытое подмногообразие в E, состоящее из точек, где показатель конформности f невырожден. На E_o определена несущая функция продолжения t. Так как согласно определению кэлерова продолжения, f является гладкой монотонной невырожденной функцией от несущей функции t, то последняя может быть представлена на E_o как гладкая функция $t = t(u)$. Если S — компактный слой скрещенного кэлерова расслоения, то промежуток коэффициентов является сегментом $[u_{min}, u_{max}]$. Чтобы отличать от производной по t, которая обозначается точкой, производная по u будет обозначаться штрихом, т.е. $t' = dt/du$.

Теорема 4.1. *Функция $t(u) : (u_{min}, u_{max}) \to \mathbb{R}$ является несущей функцией, заданной на промежутке коэффициентов некоторого кэлерова продолжения с компактным слоем, тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

а) $0 < u_{min} < u_{max} < +\infty$;

б) функция $t(u)$ монотонно убывающая, причем $t' < 0$;

в) t убывает от $+\infty$ до $-\infty$, т.е. $Im\, t = \mathbb{R}$;

г) интеграл $\int_{u_{min}}^{u_{max}} \sqrt{-\frac{1}{2}t'}du$ сходится;

д) при $u \to u_{min}$ (или $u \to u_{max}$) имеет место эквивалентность $t' \sim -C_{min}e^{-2kt}$ (или $t' \sim -C_{max}e^{2kt}$, соответственно).

Здесь все величины k, C_{min} и C_{max} положительные.

Доказательство. Докажем необходимость. Пункт (а) очевидным образом следует из компактности слоя. Как уже указывалось в доказательстве леммы 4.3, показатель конформности f субмерсии продолжения имеет на сфере (компактный слой) ровно две изолированные критические точки q_{min} и q_{max}: одна является точкой минимума, другая — точкой максимума. Показатель конформности принимает в них значения f_{min} и f_{max}, соответственно. Обозначим через $u_{min} = \exp(2f_{min})$ и $u_{max} = \exp(2f_{max})$. Неравенство п. (б) следует из выражений $\dot{u} = 2u\dot{f} < 0$, т.к. по определению кэлерова продолжения $\dot{f} < 0$. Пункт (в). Из доказательства теоремы 5.4, приведенной в [3], следует, что когда величина u стремится к экстремальному значению, тогда несущая функция t обязательно стремится к бесконечности. Точнее, учитывая монотонное убывание функции $u(t)$, имеем два случая:

1. $u \to u_{min}$, $k_{min} < 0$, $s_{min} = \exp(k_{min}t) \to 0$ и $t \to +\infty$,

2. $u \to u_{max}$, $k_{max} > 0$, $s_{max} = \exp(k_{max}t) \to 0$ и $t \to -\infty$.

Докажем пункт (г). Дифференцируя равенство (1.5) и применяя формулу (4.3) из [3], независимо от того, чему равно k (k_{min} или k_{max} и соответственно $s = s_{min}$ или $s = s_{max}$), получим $du/dt = du/dl \cdot (ksdl/ds) = -(du/dl)^2/2$. Рассмотрим индуцированную на слое S риманову метрику. Для точки q_{min} (или q_{max}) окрестность $S \backslash \{q_{max}\}$ (соответственно $S \backslash \{q_{min}\}$) является нормальной шаровой. Откуда следует равенство

$$dist(q_{min}, q_{max}) = \int\limits_{u_{min}}^{u_{max}} \sqrt{-\frac{1}{2}t'} du$$

для римановой дистанции, которая должна быть конечной. Таким образом, выполняется условие п. (г).

Пункт (д). Пока можно не специфицировать функции l, s и константу k, рассматривая открытое множество $S \backslash \{q_{min}, q_{max}\}$. Снова дифференцируя равенство (1.5), получим

$$\frac{du}{dt} = -2k^2 s^2 \left(\frac{dl}{ds}\right)^2. \tag{4.1}$$

То есть $t' = -\frac{1}{2}k^{-2}\left(\frac{dl}{ds}\right)^{-2} e^{-2kt}$. Полученное выражение справедливо в обоих представлениях: для минимума и максимума. Обозначим константу продолжения в окрестности точки максимума через k, т.е. $k = k_{max} > 0$. На основании леммы 4.3 для константы продолжения в окрестности точки минимума будет справедливо равенство $k_{min} = -k$. Сначала рассмотрим окрестность точки q_{min}. В точках q_{min} и q_{max} метрика невырождена. Обозначим положительные константы через $C_{min} = \frac{1}{2}k^{-2}\left(\frac{dl_{min}(0)}{ds_{min}}\right)^{-2}$ и аналогично через $C_{max} = \frac{1}{2}k^{-2}\left(\frac{dl_{max}(0)}{ds_{max}}\right)^{-2}$. Относительно сделанных обозначений п. (д) теперь следует из формулы (4.1).

Для доказательства достаточности используем метод из доказательства п. (д) теоремы 6.6 в [4]. Чтобы его применить, построим функцию $l(s)$, удовлетворяющую условиям, которые использованы в указанном источнике. Пусть задана некоторая функция $t(u)$, удовлетворяющая пп. (а)–(д). На основании пп. (а)–(в) параметрически заданная функция $u(s)$: $u = u(t)$, $s = \exp(kt)$, где $u(t)$ — это функция обратная заданной, доопределяется по непрерывности на промежутке $[0, +\infty)$. Используя построенную функцию $u(s)$, с помощью формулы

$$l(s) = \int_0^s \sqrt{-\frac{1}{2k\sigma} \cdot \frac{du}{d\sigma}} d\sigma$$

определим функцию $l(s)$, заданную на промежутке $[0, +\infty)$. Так как на основании п. (д) $du/ds \sim -s/(kC_{max})$ при $s \to 0$, то функция $l(s)$ действительно определена и производная в нуле функции $l(s)$ доопределяется по непрерывности ненулевой величиной $1/(k\sqrt{C_{max}})$.

Найдем порядок функции $l(s)$ относительно величины $1/s$ при $s \to +\infty$. Следует отметить, что условие $s \to +\infty$ эквивалентно тому, что $u \to u_{min}$. Из определения функции $l(s)$ и на основании п. (д) следует, что при $s \to +\infty$ справедлива такая эквивалентность

$$\frac{dl}{ds} \sim \frac{1}{k\sqrt{2C_{min}}} \cdot \frac{1}{s^2}.$$

Выберем произвольное ходжево многообразие M. Применив к многообразию M и построенной функции $l(s)$ процедуру построения расслоенного пространства E из п. (д) теоремы 6.6, приведенной в [4], получим кэлерово многообразие E. Как получено в указанной теореме, многообразие E является кэлеровым продолжением, все слои которого компактные. Из построения многообразия E следует, что исходная функция t является несущей функцией кэлерова продолжения. ■

Теорема 4.2. *Пусть полное многообразие Кэлера–Эйнштейна E допускает голоморфную конформную субмерсию ν с вертикальным показателем конформности и одномерными вполне геодезическими компактными слоями на кэлерово многообразие M, $\dim_c M > 1$. Тогда многообразие E локально изометрично прямому произведению поверхности S постоянной кривизны λ на многообразие Кэлера–Эйнштейна с постоянной Эйнштейна, равной λ.*

Доказательство. То, что базовое многообразие M является многообразием Эйнштейна, следует из теоремы 2.1. Предположим, что показатель конформности f субмерсии не является константой. Тогда показатель

f удовлетворяет дифференциальному уравнению п. (б) теоремы 3.1. Сделаем замену переменных, введя в рассмотрение величину $u = \exp(2f)$. Тогда дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{dt}{du} = \frac{u^m}{Q(u)}, \quad \text{где} \quad Q(u) = \frac{\lambda}{2\pi(m+2)} u^{m+2} - \frac{\lambda_M}{2\pi(m+1)} u^{m+1} + 2C, \tag{4.2}$$

т.е. сводится к классической задаче интегрирования дробно-рациональной функции. И вопрос сводится к тому, при каких значениях параметров λ, λ_M и C найдется промежуток $[u_{min}, u_{max}]$ и первообразная $t(u)$ функции $u^m/Q(u)$, которая на этом промежутке будет удовлетворять всем пунктам теоремы 4.1. Из пп. (а) и (б) следует, что такое решение $t(u)$ должно быть определено на промежутке коэффициентов $[u_{min}, u_{max}]$, причем $0 < u_{min}$ и многочлен Q должен быть строго отрицательным на этом промежутке. Из п. (в) следует, что граничные точки u_{min}, u_{max} промежутка коэффициентов являются корнями многочлена Q. Более того, из п. (г) следует, что оба эти корня должны быть простыми, т.е. $Q(u) = (u - u_{min})(u - u_{max})S(u)$ и многочлен S не имеет на сегменте $[u_{min}, u_{max}]$ корней. По известной теореме о разложении на элементарные дроби справедливо такое представление:

$$\frac{u^m}{Q(u)} = \frac{A_{min}}{u - u_{min}} + \frac{A_{max}}{u - u_{max}} + r(u), \tag{4.3}$$

где дробно-рациональная функция $r(u)$ непрерывна на сегменте $[u_{min}, u_{max}]$. С одной стороны, например, непосредственным вычислением с помощью последних двух равенств можно убедиться, что

$$A_{min} = \frac{u_{min}^m}{Q'(u_{min})}, \qquad A_{max} = \frac{u_{max}^m}{Q'(u_{max})}. \tag{4.4}$$

С другой стороны, на основании эквивалентности п. (д) теоремы 4.1 из равенства (4.3) следует, что

$$A_{min} = -\frac{1}{2k}, \qquad A_{max} = \frac{1}{2k}. \tag{4.5}$$

Отметим, что $\lambda \neq 0$ и $\lambda_M \neq 0$, ибо в противном случае многочлен $Q(u)$ не мог бы иметь два положительных корня. Вычислив производную $Q'(u) = \frac{1}{2\pi} u^m(\lambda u - \lambda_M)$ и воспользовавшись формулами (4.4) и (4.5), получим значения корней

$$u_{min} = \frac{\lambda_M - 4k\pi}{\lambda}, \qquad u_{max} = \frac{\lambda_M + 4k\pi}{\lambda}. \tag{4.6}$$

Как видно из выражения для $Q'(u)$, вычисленного выше, у $Q'(u)$ имеется единственный ненулевой корень, который по теореме Ролля должен лежать внутри сегмента $[u_{min}, u_{max}]$, т.е. $0 < u_{min} < \lambda_M/\lambda < u_{max}$. И постоянные Эйнштейна λ_M и λ должны быть одного знака. Так как u_{min} – это простой корень, то при переходе через значение u_{min} знак функции $Q(u)$ меняется. Следовательно, на промежутке $[0, u_{min}]$ функция $Q(u)$ строго монотонно убывающая, и поэтому $C > 0$. Поскольку $Q(\lambda_M/\lambda) < 0$, то после подстановки в выражение из (4.2) получим следующее:

$$C < \frac{\lambda_M}{4\pi(m+1)(m+2)}\left(\frac{\lambda_M}{\lambda}\right)^{m+1}.$$

Откуда, учитывая полученные ранее неравенства, имеем $\lambda_M > 0$.

В равенство $Q(u_{min}) = Q(u_{max})$ подставим вычисленные в (4.6) значения для корней u_{min} и u_{max}. Проделав некоторые преобразования, после введения новой постоянной величины $\tau = 4\pi k/\lambda_M$ получим уравнение

$$(1+\tau)^{m+1}(1-(m+1)\tau) - (1-\tau)^{m+1}(1+(m+1)\tau) = 0. \tag{4.7}$$

Обозначим функцию, расположенную в левой части последнего равенства, через $P(\tau)$. Вычисляя производную этой функции по τ, получим следующее выражение: $dP/d\tau = (m+1)(m+2)\tau\left((1-\tau)^m - (1+\tau)^m\right)$. Таким образом, видно, что при $\tau > 0$ справедливо неравенство $dP/d\tau < 0$. А так как $P(0) = 0$, то это означает, что для положительных τ уравнение (4.7) неразрешимо. Таким образом, не существует таких констант k и λ_M, чтобы для первообразной $t(u)$ выполнялись условия пп. (а)–(д) теоремы 4.1.

Рассмотрим случай, когда показатель конформности является постоянным. В этом случае, как видно из формулы (1.3), некоторая гомотетия базы превращает конформную субмерсию в риманову. Поэтому из теоремы Хермана, приведенной в [10], следует, что ν — проекция локально тривиального расслоения. Из теоремы 2.4 [3] имеем, локальную приводимость многообразия E. Откуда уже следует, что константы Эйнштейна сомножителей должны совпадать. ∎

Следствие 4.1. *В предположениях доказанной теоремы многообразие E послойно голоморфно накрывается произведением вида $L\times\widetilde{M}$, где многообразие L — это одно из трех модельных односвязных многообразий постоянной кривизны λ, а $\widetilde{M}$ — односвязное многообразие Кэлера–Эйнштейна с постоянной Эйнштейна, равной тоже λ.*

Доказательство. Рассмотрим универсальную накрывающую $\widetilde{E}$ для многообразия E. Стандартным способом поднимая с помощью накрывающего отображения в $\widetilde{E}$ комплексную структуру и метрический тензор, превратим многообразие $\widetilde{E}$ в многообразие, удовлетворяющее всем условиям теоремы. В качестве голоморфной конформной субмерсии теперь рассматривается суперпозиция универсального накрытия и первоначально заданной субмерсии. Локальная приводимость $\widetilde{E}$ совместно с односвязностью по теореме де Рама [6, теорема 6.1] влечет глобальную приводимость. ■

Следствие 4.2. *Если полное многообразие Кэлера–Эйнштейна E положительной скалярной кривизны допускает голоморфную конформную субмерсию ν с вертикальным показателем конформности и одномерными вполне геодезическими слоями на кэлерово многообразие M, $\dim_c M > 1$, то E глобально приводимо, $E \simeq \mathbb{C}P^1 \times M$. Причем сфера Римана $\mathbb{C}P^1$ несет метрику постоянной положительной кривизны λ, а M — это многообразие Кэлера–Эйнштейна и λ — его постоянная Эйнштейна.*

Доказательство. По теореме Майерса многообразие E — компакт, следовательно, и все слои субмерсии тоже компактные. Можно примерить доказанную теорему 4.2. Так как в рассматриваемом случае многообразие E имеет положительный класс Чженя, то по теореме Кобаяси [7, с. 335], E является односвязным. Глобальная приводимость следует теперь, так же как в предыдущем следствии, из теоремы де Рама. Остается только отметить, что по теореме Гаусса–Бонне из замкнутых поверхностей только сфера допускает метрику положительной кривизны. ■

Следствие 4.3. *Если полное многообразие Кэлера–Эйнштейна E допускает голоморфную конформную субмерсию ν с вертикальным показателем конформности и одномерными компактными вполне геодезическими слоями на односвязное кэлерово многообразие M, $\dim_c M > 1$, то E глобально приводимо, $E \simeq S \times M$. Причем многообразие S несет метрику постоянной кривизны λ, а M — это многообразие Кэлера–Эйнштейна с постоянной Эйнштейна, тоже равной λ.*

Доказательство. После применения теоремы 4.2 используем односвязность базы M. Теперь каждое максимальное интегральное многообразие горизонтального распределения субмерсии является однолистным накрывающим над M, что и обеспечивает глобальную приводимость многообразия E. ■

Список литературы

[1] *А. Бессе*, Многообразия Эйнштейна. Мир, Москва (1990).

[2] *С.И. Окрут*, Скрещенное произведение в кэлеровой геометрии. — *Мат. физ., анализ, геом.* (1997), т. 4, № 1/2, с. 145–188.

[3] *С.И. Окрут*, Конформные субмерсии кэлеровых многообразий. I. — *Мат. физ., анализ, геом.* (1998), т. 5, № 3/4, с. 228–249.

[4] *С.И. Окрут*, Конформные субмерсии кэлеровых многообразий. II. — *Мат. физ., анализ, геом.* (1999), т. 6, № 3/4, с. 288–316.

[5] *С.И. Окрут*, Голоморфные конформные субмерсии. — *Изв. вузов. Математика* (1999), № 11 (450), с. 60–69.

[6] *Ш. Кобаяси, К. Номидзу,* Основы дифференциальной геометрии. Т 1. Наука, Москва (1981).

[7] *Ш. Кобаяси, К. Номидзу,* Основы дифференциальной геометрии. Т 2. Наука, Москва (1981).

[8] *С.И. Окрут*, Кэлеров аналог скрещенного произведения в целом. — *Сиб. мат. журн.* (1998), т. 39, № 1, с. 114–120.

[9] *О. Форстер*, Римановы поверхности. Мир, Москва (1980).

[10] *R. Hermann*, A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds be a fiber bundle. — *Proc. Amer. Math. Soc.* (1960), v. 11, № 2, p. 236–242.

The holomorphic conformal submersions Kählerian–Einstein manifolds

S.I. Okrut

In article is given the description of manifolds of Kählerian–Einstein admitting holomorphic conformal submersion with totally geodesic fibers at some additional assumptions on characteristics submersion. It is shown that local obstructions of construction of such metrics are not present. However for complete metrics with compact one-dimensional fibers a diversity is reduced almost that to direct products.