Математическая физика, анализ, геометрия 2004, т. 11, № 2, с. 249–257 *Краткие сообщения*

Усреднение гармонических 1-форм на псевдоримановых многообразиях сложной микроструктуры

А.П. Рыбалко

Украинская государственная академия железнодорожного транспорта
пл. Фейербаха, 7, Харьков, 61050, Украина
E-mail:arybalko@hotmail.com

Статья поступила в редакцию 22 апреля 2004 г.
Представлена Е.Я. Хрусловым

Рассматриваются 4-мерные многообразия $\tilde{M}_\varepsilon^4 = \mathbf{R} \times M_\varepsilon^3$, где M_ε^3 — римановы многообразия сложной микроструктуры, состоящие из двух экземпляров пространства $\mathbf{R}^3$ с большим числом дырок, попарно соединенных посредством тонких трубок. Изучается асимптотическое поведение гармонических 1-форм на $\tilde{M}_\varepsilon^4$ при $\varepsilon \to 0$, когда общее число трубок на M_ε^3 неограниченно растет, а их радиусы стремятся к нулю. Получены усредненные уравнения на $\mathbf{R}^4$, описывающие главный член асимптотик. Также получен результат усреднения решения задачи Коши для волнового уравнения на $\tilde{M}_\varepsilon^4$ при $\varepsilon \to 0$.

Розглядаються 4-вимірні многовиди $\tilde{M}_\varepsilon^4 = \mathbf{R} \times M_\varepsilon^3$, де M_ε^3 — ріманові многовиди складної мікроструктури, що складаються з двох екземплярів простору $\mathbf{R}^3$ з великою кількістю дирок, які поєднані тонкими трубками. Вивчається асимптотична поведінка гармонічних 1-форм на $\tilde{M}_\varepsilon^4$ при $\varepsilon \to 0$, коли кількість трубок на M_ε^3 необмежено зростає, а їх радіуси прямують до нуля. Одержано усереднені рівняння на $\mathbf{R}^4$, що описують головний член асимптотик. Також одержано результат усереднення рішення задачі Коши для хвильового рівняння на $\tilde{M}_\varepsilon^4$ при $\varepsilon \to 0$.

1. Постановка задачи и формулировка основного результата

Рассмотрим 4-мерные многообразия вида $\tilde{M}_\varepsilon^4 = \mathbb{R} \times M_\varepsilon^3$, зависящие от малого параметра $\varepsilon > 0$. Многообразия M_ε^3 имеют сложную структуру, а именно, состоят из двух экземпляров $\Omega_\varepsilon^k, k = 1, 2,$ пространства $\mathbb{R}^3$ с большим

Mathematics Subject Classification 2000: 35B27, 35K60.

числом $N(\varepsilon)$ дырок, попарно соединенных посредством тонких трубок (см. рисунок). При $\varepsilon \to 0$ общее число трубок на M^3_ε неограниченно растет, в то время как их радиусы стремятся к нулю.

Рис.

Дадим точное определение рассматриваемых здесь многообразий M^3_ε. Пусть $\left\{F_{\varepsilon i}, i=\overline{1,N(\varepsilon)}\right\} \subset \Omega$ — семейство непересекающихся шаров ("дырок") в некоторой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

$$F_{\varepsilon i} = \{x \in \Omega : |x - x_{\varepsilon i}| \le a_{\varepsilon i}\}, \quad i = 1, \dots, N(\varepsilon).$$

Зависимость от ε радиусов дырок $a_{\varepsilon i}$, $i=\overline{1,N(\varepsilon)}$, и их число $N(\varepsilon)$ определяются условием

$$\max_i a_{\varepsilon i} = O(\varepsilon^3), \quad N(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^3}\right), \qquad \varepsilon \to 0. \tag{i}$$

Будем предполагать, что распределение дырок на $\mathbb{R}^3$ таково, что

$$(ii) \qquad \max_i r_{\varepsilon i} = \max_i \min_{j \ne i} |x_{\varepsilon i} - x_{\varepsilon j}| >> \max_i a_{\varepsilon i}, \qquad \varepsilon \to 0.$$

Пусть

$$\Omega_\varepsilon := \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} F_{\varepsilon i}$$

— 3-мерное многообразие, полученное из $\mathbb{R}^3$ удалением дырок $F_{\varepsilon i}$, $i = \overline{1, N(\varepsilon)}$. Возьмем два экземпляра замыкания области Ω_ε: $\overline{\Omega_\varepsilon^k}$, $k = 1, 2$. (Далее верхний индекс будет обозначать принадлежность соответствующему экземпляру Ω_ε^k, $k = 1, 2$.)

Пусть $\forall i \in \{1, \ldots, N(\varepsilon)\}$ задано 3-мерное многообразие — "трубка" радиуса $a_{\varepsilon i}$:

$$T_{\varepsilon i} := \{(r, z, \theta, \varphi) : r = a_{\varepsilon i}, 0 \le z \le 1, \theta \in [0, \pi), \varphi \in [0, 2\pi)\}.$$

Граница $\partial T_{\varepsilon i}$ состоит из двух компонент: $\partial T_{\varepsilon i} = \tilde{S}^1_{\varepsilon i} \bigcup \tilde{S}^2_{\varepsilon i}$. Отождествим точки границ дырок $\partial F^1_{\varepsilon i}$, $\partial F^2_{\varepsilon i}$ и границ $\tilde{S}^1_{\varepsilon i}$, $\tilde{S}^2_{\varepsilon i}$ соответствующей трубки так, чтобы многообразие

$$\tilde{M}^3_\varepsilon = \overline{\Omega^1_\varepsilon} \bigcup (\bigcup_i \overline{T_{\varepsilon i}}) \bigcup \overline{\Omega^2_\varepsilon},$$

склеенное из двух экземпляров $\overline{\Omega_\varepsilon^k}$, $k = 1, 2$ и $N(\varepsilon)$ трубок $\overline{T_{\varepsilon i}}$, $i = \overline{1, N(\varepsilon)}$ было ориентируемым (см. [1]).

Метрика на M^3_ε задается гладким метрическим тензором $g_\varepsilon(x) = \{g_{\varepsilon\alpha\beta}(x), \alpha, \beta = \overline{1, 3}\}$, который вне некоторых малых окрестностей границ дырок $\partial F_{\varepsilon i}$, $i = \overline{1, N(\varepsilon)}$ соответствует элементу длины

$$(iii)\ ds^2 = \begin{cases} dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 sin^2\theta d\theta^2; & x \in \Omega^k_\varepsilon,\ k = 1, 2 \\ q^2_{\varepsilon i} dz^2 + a^2_{\varepsilon i} d\varphi^2 + a^2_{\varepsilon i} sin^2\theta d\theta^2; & x \in T_{\varepsilon i}, i = \overline{1, N(\varepsilon)} \end{cases},$$

где $q_{\varepsilon i}$ — малое положительное число.

Метрика на $\tilde{M}^4_\varepsilon$ задается следующей формулой для квадрата элемента длины:

$$d\tilde{s}^2 = -dt^2 + \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} g_{\varepsilon\alpha\beta} dx_\alpha \wedge dx_\beta. \tag{1.1}$$

Рассмотрим на $\tilde{M}^4_\varepsilon$ гармонические 1-формы $\tilde{u}_\varepsilon(\tilde{x}) = u_{\varepsilon 0}(\tilde{x})dt + \sum\limits_{i=1}^{3} u_{\varepsilon i}(\tilde{x})dx_i$:

$$\begin{cases} \tilde{d}\tilde{u}_\varepsilon(\tilde{x}) = 0 \\ \tilde{\delta}\tilde{u}_\varepsilon(\tilde{x}) = 0 \end{cases} ; \quad \tilde{x} = (t, x_1, x_2, x_3) \in \tilde{M}^4_\varepsilon. \tag{1.2}$$

Здесь $\tilde{d}$ — оператор внешнего дифференцирования на $\tilde{M}^4_\varepsilon$, $\tilde{\delta}$ — метрически сопряженный к нему относительно метрики (1.1) на $\tilde{M}^4_\varepsilon$ (см.[2], а также [3]).

Пусть для любого $\varepsilon > 0$ при $t = 0$ гармоническая 1-форма $\tilde{u}_\varepsilon$ равна заданной 1-форме $\tilde{U}(x) = U_0(x)dt + \sum\limits_{i=1}^{3} U_i(x)dx_i, x \in M^3_\varepsilon$:

$$\tilde{u}_\varepsilon(0, x) = \tilde{U}(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in M^3_\varepsilon. \tag{1.3}$$

При этом будем предполагать, что 1-форма $U'(x) = \sum_{i=1}^{3} U_i(x)dx_i, x \in M_\varepsilon^3$ является замкнутой на M_ε^3, т.е.

$$dU'(x) = 0, \quad x \in M_\varepsilon^3 \tag{1.4}$$

где d — оператор внешнего дифференцирования на M_ε^3.

Компактифицируем многообразие M_ε^3, присоединяя бесконечно удаленные точки $\infty^k \in \Omega_\varepsilon^k, k = 1, 2$.

Пусть $\mathcal{B}_{\varepsilon i}$, $i = \overline{1, N(\varepsilon)}$ — 1-мерные пути, идущие от $\infty^1 \in \Omega_\varepsilon^1$ к $\infty^2 \in \Omega_\varepsilon^2$ и проходящие через трубки $T_{\varepsilon i}$, $i = \overline{1, N(\varepsilon)}$, соответственно:

$$\mathcal{B}_{\varepsilon i}: \quad \infty^1 \to T_{\varepsilon i} \to \infty^2.$$

Контуры $\mathcal{B}_{\varepsilon i}$, $i = \overline{1, N(\varepsilon)}$, образуют базис одномерных гомологий на многообразии M_ε^3.

Мы будем рассматривать дифференциальные 1-формы $u(\tilde{x})$, удовлетворяющие следующему условию убывания по x при $|x| \to \infty$:

$$||u(t, x)|| = O(|x|^{-1-\gamma}), \qquad (\gamma > 0), \ \forall t \in \mathbb{R}, \ |x| \to \infty. \tag{1.5}$$

Интегралы по путям $\mathcal{B}_{\varepsilon i}$ от замкнутых на M_ε^3 1-форм, удовлетворяющих условию (1.5) (периоды 1-форм), корректно определены.

Предположим, что $U_i(x)$, $i = \overline{1, 3}$, удовлетворяют условию (1.5) и периоды 1-формы $U'(x)$ вдоль $\mathcal{B}_{\varepsilon i}$, $i = \overline{1, N(\varepsilon)}$, заданы:

$$\int_{\mathcal{B}_{\varepsilon i}} U' = b_{\varepsilon i}, \quad i = \overline{1, N(\varepsilon)}. \tag{1.6}$$

Задача (1.2)–(1.6) имеет единственное решение. Действительно, с учетом (1.1), систему (1.2) запишем в виде

$$-\frac{\partial}{\partial t} u_{\varepsilon 0} - \delta u'_\varepsilon = 0; \tag{1.7}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} u'_\varepsilon + d u_{\varepsilon 0} = 0; \tag{1.8}$$

$$d u'_\varepsilon = 0, \tag{1.9}$$

где $u_{\varepsilon 0}(\tilde{x})$ и $u'_\varepsilon(\tilde{x}) := \sum_{i=1}^{3} u_{\varepsilon i}(\tilde{x}) dx_i$ обозначают временную и пространственную компоненты исходной 1-формы $\tilde{u}_\varepsilon(\tilde{x}) = \{u_{\varepsilon 0}(\tilde{x}), u'_\varepsilon(\tilde{x})\}$ соответственно; δ — метрически сопряженный к оператору внешнего дифференцирования d на M_ε^3 относительно метрики $g_\varepsilon(x)$ на M_ε^3.

Заметим, что уравнение (1.9) является следствием (1.8) и начального условия (1.4). Кроме того, из (1.8), начального условия (1.6) и теоремы Стокса следует, что для любого фиксированного $\tilde{t} \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_{\tilde{\mathcal{B}}_{\varepsilon i}} \tilde{u}_\varepsilon = b_{\varepsilon i}, \quad i = \overline{1, N(\varepsilon)}, \tag{1.10}$$

где $\tilde{\mathcal{B}}_{\varepsilon i} = \{\tilde{x} \in \tilde{M}^4_\varepsilon : t = \tilde{t},\ x \in \mathcal{B}_{\varepsilon i}\}$, т.е. периоды 1-формы $\tilde{u}_\varepsilon(\tilde{x})$ совпадают с заданными периодами 1-формы $U'(x)$.

Таким образом, исходная задача (1.2)–(1.6) эквивалентна задаче (1.7)–(1.8), (1.3)–(1.4), (1.10).

Рассмотрим гильбертово пространство $L_2(M^3_\varepsilon)^4$ 4-мерных векторов со скалярным произведением, порожденным метрикой M^3_ε. Введем оператор

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ d & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

определенный на гладких финитных в M^3_ε 4-мерных вектор-функциях. В терминах оператора $\mathcal{A}$ задача (1.7)–(1.8), (1.3) может быть записана в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon = \mathcal{A} u_\varepsilon; \\ u_\varepsilon|_{t=0} = U \end{cases}, \tag{1.12}$$

где $u_\varepsilon := (u_{\varepsilon 0}, u'_\varepsilon)^T = (u_{\varepsilon 0}, u_{\varepsilon 1}, u_{\varepsilon 2}, u_{\varepsilon 3})^T$ — 4-вектор, компонентами которого являются соответствующие компоненты формы $\tilde{u}_\varepsilon$; $U := (U_0, U')^T = (U_0, U_1, U_2, U_3)^T$ — 4-вектор, соответствующий форме $\tilde{U}$.

В силу свойств операторов d и δ, оператор $\mathcal{A}$ является кососимметрическим ($\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$) и допускает расширение до кососамосопряженного в гильбертовом пространстве $L_2(M^3_\varepsilon)^4$. Следовательно, по теореме Стоуна (см. [4]), $\mathcal{A}$ является производящим оператором сильно непрерывной группы унитарных операторов $e^{\mathcal{A}t}$. Это означает, что задача (1.12), а значит, и исходная задача (1.2)(1.3) разрешима и ее решение представимо в виде $\tilde{u} = e^{\mathcal{A}t} U$.

В данной работе изучаем асимптотическое поведение решения задачи (1.12), (1.10) на $\tilde{M}^4_\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$.

Чтобы сформулировать основной результат, определим количественые характеристики трубок. Пусть

$$D_{\varepsilon i} = \overline{T_{\varepsilon i}} \bigcup R^1_{\varepsilon i} \bigcup R^2_{\varepsilon i},$$

где $R_{\varepsilon i} = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x - x_{\varepsilon i}| \le r_{\varepsilon i}/2\}$ ($x_{\varepsilon i}$ — центр дырки $F_{\varepsilon i}$). Граница области $D_{\varepsilon i}$ состоит из двух компонент: $\partial D_{\varepsilon i} = S^1_{\varepsilon i} \bigcup S^2_{\varepsilon i}$, где $S_{\varepsilon i} =$

$\{x \in \mathbb{R}^3 : |x - x_{\varepsilon i}| = r_{\varepsilon i}/2\}$. В области $D_{\varepsilon i}$ рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \Delta_\varepsilon v_{\varepsilon i}^k - \lambda \chi_{\varepsilon i} v_{\varepsilon i}^k = 0, & x \in D_{\varepsilon i}; \\ v_{\varepsilon i}^k = 1, & x \in S_{\varepsilon i}^k; \\ v_{\varepsilon i}^k = 0, & x \in S_{\varepsilon i}^l, \end{cases} \quad , \ \lambda > 0; \ k, l = 1, 2, \ k \neq l, \tag{1.13}$$

где $\chi_{\varepsilon i}(x)$ — характеристическая функция множества $D_{\varepsilon i}$; $\lambda > 0$ — параметр. Существует единственное решение $v_{\varepsilon i}^k(x, \lambda)$ задачи (1.13).

Положим

$$V_{\varepsilon i}^k(\lambda) := \int\limits_{D_{\varepsilon i}} \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} g_\varepsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial v_{\varepsilon i}^k}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v_{\varepsilon i}^k}{\partial x_\beta} + \lambda \chi_{\varepsilon i} (v_{\varepsilon i}^k)^2 \right) dx, \quad k = 1, 2. \tag{1.14}$$

(Здесь и далее $dx := \sqrt{|\,g_\varepsilon|} dx^1 dx^2 dx^3$ обозначает элемент объема на M_ε^3.) Рассмотрим обобщенные функции

$$V_\varepsilon^k(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} V_{\varepsilon i}^k(\lambda) \delta(x - x_{\varepsilon i}), \quad k = 1, 2,$$

построенные по числам $V_{\varepsilon i}^k(\lambda)$ ($\delta(x)$ — дельта-функция Дирака в $\mathbb{R}^3$). Будем предполагать, что эти функции сходятся в $D'(\mathbb{R}^3)$ к независящим от параметра λ и $k = 1, 2$ функциям

$$V(x) = w - \lim_{\varepsilon \to 0} V_\varepsilon^k(x, \lambda), \quad k = 1, 2. \tag{iv}$$

З а м е ч а н и е 1. Независимость предела (iv) от λ и k является следствием выбора метрики в трубках (см. (iii)). Действительно, можно показать, что при $\varepsilon \to 0$ имеет место формула

$$V_{\varepsilon i}(\lambda) = \frac{4\pi a_{\varepsilon i}^2}{(a_{\varepsilon i} + q_{\varepsilon i})} \left(1 + o(1)\right), \quad \varepsilon \to 0,$$

и значит, предел (iv) определяется распределением дырок на $\Omega \in \mathbb{R}^3$ и соотношениями между $\varepsilon, a_{\varepsilon i}$ и $q_{\varepsilon i}$. Относительно периодов $b_{\varepsilon i}$ будем предполагать, что обобщенные функции

$$b_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} b_{\varepsilon i} \delta(x - x_{\varepsilon i}),$$

построенные по числам $b_{\varepsilon i}$, сходятся в $D'(\mathbb{R}^3)$ к функциям

$$b(x) = w - \lim_{\varepsilon \to 0} b_\varepsilon(x). \tag{v}$$

Определим операторы $Q_\varepsilon^k : L_2(M_\varepsilon^4) \to L_2(\mathbb{R}^3)^4$ формулой

$$\left[Q_\varepsilon^k u_\varepsilon\right](\tilde{x}) = \begin{cases} u_\varepsilon(\tilde{x}), & t \in \mathbb{R}, x \times \{k\} \in \ \Omega_\varepsilon^k; \\ 0, & t \in \mathbb{R}, x \in \ \bigcup_i F_{\varepsilon i}^k; \end{cases} \qquad k = 1, 2. \tag{1.15}$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть $\tilde{u}_\varepsilon(\tilde{x})$ — решение задачи (1.2)–(1.6). Пусть условия (i)–(v) выполнены при $\varepsilon \to 0$. Тогда, $\forall T \in \mathbb{R}$*

$$(\forall k = 1, 2) \qquad Q_\varepsilon^k \tilde{u}_\varepsilon \to u^k(t, x), \quad \varepsilon \to 0,$$

в $L_2([-T, T] \times \mathbb{R}^3)$, причем

$$u^k(t, x) = u_0^k(t, x)dt + d\varphi^k(t, x)dx,$$

где $u_0^k(t, x)$, $k = 1, 2$, являются решениями следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial^2}{dt^2} u_0^k(t, x) - \Delta u_0^k(t, x) + V(x)(u_0^k(t, x) - u_0^l(t, x)) = 0;$$

$$t \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}^3, \quad k, l = 1, 2, \ k \neq l;$$

$$u_0^k(0, x) = U_0^k(x), \quad \frac{\partial}{dt} u_0^k(0, x) = \mathrm{div} \mathrm{U}'^{\mathrm{k}}(\mathrm{x}), \qquad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^3, \ \mathrm{k}, \mathrm{l} = 1, 2, \ \mathrm{k} \neq \mathrm{l},$$

а $\varphi^k(t, x)$, $k = 1, 2$, являются решениями задачи

$$-\Delta\varphi^k(t, x) + V(x)(\varphi^k(t, x) - \varphi^l(t, x)) = (-1)^{k-1} b(x) - \frac{\partial}{dt} u_0^k(t, x);$$

$$|\varphi^k(t, x)| = O(|x|^{-1}), \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \ |x| \to \infty.$$

Здесь $V(x)$ и $b(x)$ определены (iv), (v), соответственно.

Доказательство этой теоремы проводится с использованием вариационных методов, развитых в работах [5, 6], после перехода к стационарным задачам с помощью преобразования Лапласа.

2. Усреднение волнового уравнения

Рассмотрим на многообразии $\tilde{M}_\varepsilon^4$ следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial^2}{dt^2} \Phi_\varepsilon(t, x) - \Delta\Phi_\varepsilon(t, x) = 0; \qquad (t, x) \in \tilde{M}_\varepsilon^4; \tag{2.1}$$

$$\Phi_\varepsilon(0, x) = \Phi_0(x); \quad \frac{\partial}{dt} \Phi_\varepsilon(0, x) = \Phi_1(x), \qquad x \in M_\varepsilon^3, \tag{2.2}$$

где $\Delta_\varepsilon = \delta d$ — оператор Бельтрами–Лапласа на M^3_ε, $\Phi_\varepsilon(t,x)$ — гладкая финитная функция на M^4_ε.

Рассмотрим 1-форму

$$\tilde{d}\Phi_\varepsilon := \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial t} dt + \sum_i \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial x_i} dx_i \,, \tag{2.3}$$

где $\Phi_\varepsilon(t,x)$ — решение (2.2)–(2.3). Построенная таким образом дифференциальная форма $\tilde{d}\Phi_\varepsilon$ является решением рассмотренной в разд. 1 задачи (1.2)–(1.6) с $b_{\varepsilon i} = 0$, $i = \overline{1, N(\varepsilon)}$.

Применяя теорему 1 к (2.3), получаем следующий результат. Решение $\Phi_\varepsilon(t,x)$ задачи Коши (2.1)–(2.2) при $\varepsilon \to 0$ сходится в смысле

$$(\forall k = 1,2) \qquad Q^k_\varepsilon \Phi_\varepsilon \to \Phi^k(t,x) \qquad \text{в } L_2(\mathbb{R}^3), \quad \forall t \geq 0$$

к решению $\Phi^k(x,t)$ следующей задачи:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi^k(x,t) - \Delta\Phi^k(x,t) + V(x)\left(\Phi^k(t,x) - \Phi^l(t,x)\right) = 0; \\ t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^3,\ k,l = 1,2,\ k \neq l; \end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered} \Phi^k(0,x) = \Phi^k_0(x); \quad \frac{\partial}{dt}\Phi^k(0,x) = \Phi^k_1(x), \\ x \in \mathbb{R}^3,\ k,l = 1,2,\ k \neq l, \end{gathered} \tag{2.5}$$

где $V(x)$ определена (iv).

Список литературы

[1] *Дж. Милнор, А. Уоллес*, Дифференциальная топология. Мир, Москва (1972).

[2] *G. de Rham*, Varietes differentiables. Hermann, Paris: Actualites scientifiques et industrielles (1960).

[3] *Б. Шуmц*, Геометрические методы математической физики. Мир, Москва (1984).

[4] *М. Рид, Б. Саймон*, Методы современной математической физики. Т.4: Анализ операторов. Мир, Москва (1982).

[5] *L. Boutet de Monvel and E.Ya. Khruslov*, Averaging of the diffusion equation on Riemannian manifolds with complex microstructure. — *Trans. Moscow. Math. Soc.* (1997), v. 58, p. 137–161.

[6] *L. Boutet de Monvel and E.Ya. Khruslov*, Homogenization of harmonic vector fields on Riemannian manifolds with complicated microstructure. — *Math. Phys., Analysis, Geometry* (1998), v. 1, No. 1, p. 1–22.

Homogenization of harmonic 1-forms on pseudo-Riemannian manifolds of complicated microstructure

A.P. Rybalko

4-dimentional manifolds $\tilde{M}_\varepsilon^4 = \mathbf{R} \times M_\varepsilon^3$, where M_ε^3 are Riemannian manifolds of complicated microstructure are considered. M_ε^3 consist of two copies of $\mathbf{R}^3$ with a large number of holes connected in pairs by means of fine tubes. The asymptotic behaviour of harmonic 1-forms on $\tilde{M}_\varepsilon^4$ is studied as $\varepsilon \to 0$, when the number of tubes on M_ε^3 tends to infinity and their radii tend to zero. The homogenized equations on $\mathbf{R}^4$ describing the leading term of the asymptotics are obtained. The result of homogenization of the solution of Cauchy problem for wave equation on $\tilde{M}_\varepsilon^4$ as $\varepsilon \to 0$ is obtained.