Математическая физика, анализ, геометрия
2004, т. 11, № 3, с. 341–354

Функция управляемости как время движения. II

А.Э. Чоке Риверо

Area Básica, Universidad Autónoma del Carmen
Calle 56 No. 4, Cd. del Carmen, Campeche, C.P. 24180, México

E-mail:achoque@pampano.unacar.mx
achoque@yahoo.com

В.И. Коробов

Institute of Mathematics, Szczecin University
Wielkopolska Str., 15, Szczecin, 70451, Poland

E-mail:vkorobov@univer.kharkov.ua
korobow@sus.univ.szczecin.pl

В.А. Скорик

Механико-математический факультет
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина

E-mail:skoryk@univer.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 30 июля 2003 г.

Рассмотрена задача допустимого синтеза позиционного управления для линейных систем с геометрическими ограничениями на управление. Исследования проведены на основе метода функции управляемости. Построены функции управляемости, являющиеся временем движения из произвольной начальной точки в нуль, и управления, решающие задачу. Аналитически находятся траектории.

Розглянуто задачу допустимого синтезу позиційного керування для лінійних систем з геометричними обмеженнями на керування. Дослідження проведено на основі методу функції керованості. Побудовано функції керованості, які є часом руху з довільної початкової точки у нуль, і керування, що розв'язують задачу. Аналітичним чином знайдено траєкторії.

Mathematics Subject Classification 2000: 93P50.

1. Введение

В данной работе рассматривается решение задачи синтеза для произвольной линейной системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^r, \tag{1.1}$$

для которой выполнено условие

$$\operatorname{rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n, \tag{1.2}$$

с ограничениями на управление

$$\|u\| \le d. \tag{1.3}$$

Отметим, что из условия $\operatorname{rang}(B, AB, \dots, A^{m-1}B) = n$ при $m > n$ следует [1] условие (1.2). Если условие (1.2) не выполнено, то существуют точки пространства $\mathbb{R}^n$, из которых попасть в начало координат нельзя за любое конечное время [2], а следовательно, невозможно решение задачи синтеза.

Не ограничивая общности, будем считать, что $\operatorname{rang} B = r$ и

$$b_1, \dots, A^{n_1-1}b_1,\ \dots,\ b_r, \dots, A^{n_r-1}b_r \tag{1.4}$$

являются линейно независимыми векторами, где b_i — i-й столбец матрицы B, $n_1 \ge \dots \ge n_r \ge 1$, $n_1 + \dots + n_r = n$. Отметим, что для $r \ge 2$ может для любого i $(i = 1, \dots, r)$ выполняться условие $\operatorname{rang}(b_i, \dots, A^{n-1}b_i) < n$. Тогда в этом случае решение задачи синтеза для рассматриваемой системы не может быть сведено к случаю одномерного управления.

Построим семейство функций управляемости $\Theta(x)$ и семейство управлений $u(x)$, удовлетворяющих ограничениям (1.3), таких, для которых выполняется равенство

$$\dot{\Theta}(x) = (\Theta_x(x), Ax + Bu(x)) = -1.$$

Это семейство управлений решает задачу синтеза и время движения $T(x_0)$ из точки x_0 в нуль равно $\Theta(x_0)$. Как отмечалось в первой части работы [3], в случае, когда управление $u(x)$ удовлетворяет уравнению Беллмана [4]

$$\min_{u\in\ \Omega}(\Theta_x(x), Ax + Bu) = (\Theta_x(x), Ax + Bu(x)) = -1,$$

оно является оптимальным по быстродействию.

Решения рассматриваемой задачи допустимого синтеза позиционных управлений базируется на методе функции управляемости В.И. Коробова [5].

2. Решение задачи синтеза управлений для линейной системы

Введем следующие матрицы:

$$D(\Theta) = \mathrm{diag}(D_1(\Theta), \dots, D_r(\Theta)), \tag{2.1}$$

$$H = \mathrm{diag}(H_1, \dots, H_r), \quad D_n = \mathrm{diag}\,(D_{n_1}, \dots, D_{n_r}),$$

где

$$D_i(\Theta) = \mathrm{diag}\left(\Theta^{-\frac{2k-1}{2}}\right)_{k=1}^{n_i}, \; H_i = \mathrm{diag}\left(-\frac{2k-1}{2}\right)_{k=1}^{n_i}, \; D_{n_i} = \mathrm{diag}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\right)_{k=1}^{n_i},$$

$i = 1, \dots, r$; A_0 — $(n\times n)$-матрицу вида $A_0 = \mathrm{diag}\,(A_{01}, \dots, A_{0r})$, где A_{0i} — $(n_i\times n_i)$-матрица, элементы первой поддиагонали которой равны единице, а все остальные элементы равны нулю; B_0 — $(n\times r)$-матрицу, в которой элементы $(B_0)_{s_{i-1}+1,i} = 1$, $i = 1, \dots, r$, а все остальные равны нулю. Здесь и далее $s_0 = 0$, $s_i = n_1 + \dots + n_i$, $i = 1, \dots, r$.

Рассмотрим матрицу $\widetilde{P} = \mathrm{diag}(\widetilde{P}_1, \dots, \widetilde{P}_r)$, где $\widetilde{P}_i$ — $((n_i-1)\times(n_i-1))$-матрица вида

$$\widetilde{P}_i = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3\cdot 4} & \dots & \frac{1}{n_i(n_i+1)} \\ 0 & \frac{1}{4\cdot 5} & \dots & \frac{1}{(n_i+1)(n_i+2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{1}{(n_i+1)(n_i+2)} & \dots & \frac{1}{(2n_i-2)(2n_i-1)} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, r.$$

Обозначим через $\Delta_i = \det\ \widetilde{P}_i$, а через $(\Delta'_j)_i$, $(\Delta''_j)_i$, $j = 1, \dots, n_i-1$ — определители матрицы, полученной из матрицы $\widetilde{P}_i$, в которой вместо ее j-столбца соответственно стоят столбцы

$$d'_i = \left(-\frac{1}{(n_i+1)(n_i+2)}, -\frac{1}{(n_i+2)(n_i+3)}, \dots, -\frac{1}{(2n_i-1)2n_i}\right)^*,$$

$$d''_i = \left(-\frac{3+a_1^i}{2\cdot 3}, -\frac{a_1^i}{3\cdot 4}, \dots, -\frac{a_1^i}{n_i(n_i+1)}\right)^*; \quad a_1^i = -\frac{n_i(n_i+1)}{2}.$$

Рассмотрим $(n_i\times n_i)$-матрицу вида

$$C_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta_i}\left((\Delta'_1)_i \frac{(-1)^{n_i-1}}{(n_i-1)!} a_{n_i}^i + (\Delta''_1)_i\right) & \frac{1}{2\cdot 3} & \dots & \frac{1}{n_i(n_i+1)} \\ \frac{1}{2\cdot 3} & \frac{1}{3\cdot 4} & \dots & \frac{1}{(n_i+1)(n_i+2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n_i(n_i+1)} & \frac{1}{(n_i+1)(n_i+2)} & \dots & \frac{1}{(2n_i-1)2n_i} \end{pmatrix}$$

$$\times (2n_i-1)2n_i\, c_{2n_i-2}^i \tag{2.2}$$

и вектор

$$a^i = \left(-\frac{n_i(n_i+1)}{2},\ -\frac{1}{\Delta_i}\left((\Delta_2')_i\frac{(-1)^{n_i-1}}{(n_i-1)!}a^i_{n_i} + (\Delta_2'')_i\right),\ \dots,\right.$$

$$\left.\dots,(-1)^{n_i-2}(n_i-2)!\ \frac{1}{\Delta_i}\left((\Delta_{n_i-1}')_i\frac{(-1)^{n_i-1}}{(n_i-1)!}a^i_{n_i} + (\Delta_{n_i-1}'')_i\right),\ a^i_{n_i}\right)^*. \qquad (2.3)$$

Предположим, что для $i=1,\dots,r$ параметры $c^i_{2n_i-2}$ и $a^i_{n_i}$ удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} c^i_{2n_i-2} > 0, \\ \frac{1}{\Delta_i}\left((\Delta_1')_i\frac{(-1)^{n_i-1}}{(n_i-1)!}a^i_{n_i}+(\Delta_1'')_i\right) > \max\left\{\xi^i_0,\ \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n_i}\right)\xi^i_0+\frac{1}{4}-\frac{1}{4n_i}\right\}, \end{gathered} \qquad (2.4)$$

где ξ^i_0 является корнем уравнения

$$\begin{vmatrix} \xi^i_0 & \frac{1}{2\cdot3} & \dots & \frac{1}{n_i(n_i+1)} \\ \frac{1}{2\cdot3} & \frac{1}{3\cdot4} & \dots & \frac{1}{(n_i+1)(n_i+2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n_i(n_i+1)} & \frac{1}{(n_i+1)(n_i+2)} & \dots & \frac{1}{(2n_i-1)2n_i} \end{vmatrix} = 0.$$

Рассмотрим матрицу

$$C = \mathrm{diag}(C_1,\dots,C_r), \qquad (2.5)$$

где C_i — $(n_i\times n_i)$-матрица вида (2.2), P_0 — $(r\times n)$-матрицу вида

$$P_0 = \begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_{n_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a^2_1 & \dots & a^2_{n_2} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a^r_1 & \dots & a^r_{n_r} \end{pmatrix}, \qquad (2.6)$$

в которой $a^i_1,\dots,a^i_{n_i}$, $i=1,\dots,r$, — элементы n_i-мерного вектора вида (2.3). Эти матрицы удовлетворяют [3] следующему равенству:

$$\left(\frac{1}{2}I-H+D_n^{-1}A_0D_n+B_0P_0\right)C+C\left(\frac{1}{2}I-H+D_n^{-1}A_0D_n+B_0P_0\right)^* = 0, \qquad (2.7)$$

а в силу условий (2.4) матрица C является положительно определенной.

Рассмотрим положительно определенную матрицу $F(\Theta)$ вида

$$F(\Theta) = D(\Theta)D_n^{-1}C^{-1}D_n^{-1}D(\Theta) = D(\Theta)FD(\Theta). \qquad (2.8)$$

Выберем векторы $c_1, \dots, c_r$ так, чтобы каждый из них удовлетворял равенству $(c_k, A^{n_k-1}b_k) = 1$ и чтобы он был ортогональным всем остальным векторам из (1.4), т.е. определим векторы $c_1, \dots, c_r$ из систем

$$K^* c_i = e_{s_i}, \quad i = 1, \dots, r, \tag{2.9}$$

где матрица K имеет вид $K = (b_1, \dots, A^{n_1-1}b_1, \dots, b_r, \dots, A^{n_r-1}b_r)$, а e_{s_i} — s_i-й единичный орт пространства $\mathbb{R}^n$, и рассмотрим матрицу L вида

$$L = \left(A^{*n_1-1}c_1, \dots, A^* c_1, c_1, \dots, A^{*n_r-1}c_r, \dots, A^* c_r, c_r\right)^*. \tag{2.10}$$

Пусть a_0 — пока произвольное положительное число. Определим функцию управляемости $\Theta(x)$ при $x \neq 0$ как решение уравнения

$$2a_0\Theta = (L^* F(\Theta)Lx, x), \quad a_0 > 0, \ \Theta > 0. \tag{2.11}$$

Это уравнение имеет [5] единственное положительное непрерывно дифференцируемое решение $\Theta = \Theta(x)$. Полагая $\Theta(0) = 0$, получаем непрерывность функции $\Theta(x)$ для всех x.

Утверждение 2.1. *Существует константа $c > 0$ такая, что область $\mathrm{Q} = \{x : \Theta(x) \le c\}$ является ограниченной.*

Доказательство. Пусть $\bar\Theta$ — произвольное положительное число. Выберем положительное число $R = \delta_1 \sqrt{2a_0\bar\Theta / \|F(\bar\Theta)\|} / \|L\|$, $\delta_1 \in (0,1)$, и пусть $\mathrm{Q}^1 = \{x : \|x\| \le R\}$. Поскольку $(CH + HC)$ является отрицательно определенной матрицей, то

$$d\left(L^* F(\Theta)Lx, x\right)/d\Theta = \Theta^{-1}\left(L^* D(\Theta) D_n^{-1}(HC^{-1} + C^{-1}H) D_n^{-1} D(\Theta)Lx, x\right) < 0.$$

Тогда, так как $(L^* F(\Theta)Lx, x)$ является невозрастающей по Θ функцией, при $0 < \Theta(x) \le \bar\Theta$ имеем

$$\Theta(x) \ge \frac{1}{2a_0}\left(L^* F(\bar\Theta)Lx, x\right) \ge \frac{\|x\|^2}{2a_0\|F^{-1}(\bar\Theta)\|\|L^{-1}\|^2}.$$

Отсюда, используя выражение для числа R, получаем, что для

$$0 < c \le \frac{\delta_1^2\delta_2\bar\Theta}{\|L^{-1}\|^2\|L\|^2\|F(\bar\Theta)\|\|F^{-1}(\bar\Theta)\|}, \quad \delta_2 \in (0,1), \tag{2.12}$$

множество Q является ограниченным и $\mathrm{Q} \subset \mathrm{int}\mathrm{Q}^1$.

Зададим управление $u(x)$ формулой

$$u(x) = M^{-1}\left(\Theta^{-\frac{1}{2}}(x) P_0 D(\Theta(x))L - B_0^* LA\right)x, \tag{2.13}$$

где M — верхнетреугольная $(r \times r)$-матрица, элементы главной диагонали которой $m_{ii} = 1$ и $m_{ij} = c_i^* A^{n_i - 1} b_j$ при $i < j \leq r$, $i = 1, \dots, r$, а матрицы P_0, $D(\Theta)$, L определяются равенствами (2.6), (2.1), (2.10), соответственно.

Управление $u(x)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $L(\rho_1, \rho_2)$ в области $K(\rho_1, \rho_2) = \{x : 0 < \rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2\}$, причем $L(\rho_1, \rho_2) \to \infty$ при $\rho_1 \to 0$. Ограниченность этого управления будет показана далее.

Утверждение 2.2. *Производная функции $\Theta(x)$ в силу системы (1.1) с управлением $u(x)$ вида (2.13) удовлетворяет равенству*

$$\dot{\Theta}(x) = -1. \tag{2.14}$$

Доказательство. Положим $y(\Theta, x) = D(\Theta)Lx$. Тогда на основании соотношения (2.8) равенство (2.11) при $\Theta = \Theta(x)$ и управление (2.13) принимают вид

$$2a_0\Theta(x) = (Fy(\Theta(x), x), y(\Theta(x), x)), \tag{2.15}$$

$$u(x) = M^{-1}\left(\Theta^{-\frac{1}{2\alpha}}(x)P_0 y(\Theta(x), x) - B_0^* LAx\right). \tag{2.16}$$

Вычислим производную функции $y(\Theta(x), x)$ в силу системы (1.1) с управлением $u(x)$ вида (2.16). В силу выбора векторов $c_1, \dots, c_r$ и на основании равенства $(I - B_0 B_0^*)LAL^{-1} = A_0$ имеем

$$L\dot{x} = LAx + B_0 M u(x) = A_0 Lx + \Theta^{-\frac{1}{2}} B_0 P_0 y(\Theta(x), x). \tag{2.17}$$

Используя равенства (2.17)

$$D(\Theta)A_0 D^{-1}(\Theta) = A_0 \Theta^{-1}, \quad D(\Theta)B_0 = \Theta^{-\frac{1}{2}} B_0,$$

получаем

$$\dot{y}(\Theta(x), x) = \Theta^{-1}(x)\left(\dot{\Theta}(x)H + A_0 + B_0 P_0\right) y(\Theta(x), x). \tag{2.18}$$

Из равенства (2.15) с использованием равенства (2.18) имеем равенство

$$2a_0\dot{\Theta}(x) = \dot{\Theta}(x)((FH + HF)y(\Theta(x), x), y(\Theta(x), x))\Theta^{-1}(x)$$

$$+ ((F(A_0 + B_0 P_0) + (A_0 + B_0 P_0)^* F)y(\Theta(x), x), y(\Theta(x), x))\, \Theta^{-1}(x),$$

откуда на основании равенства

$$2a_0 = \Theta^{-1}(x)(Fy(\Theta(x), x), y(\Theta(x), x))$$

получаем

$$\dot{\Theta}(x) = \frac{((F(A_0 + B_0P_0) + (A_0 + B_0P_0)^*F)y(\Theta(x), x), y(\Theta(x), x))}{((F - FH - HF)y(\Theta(x), x), y(\Theta(x), x))}. \qquad (2.19)$$

Поскольку матрица C удовлетворяет равенству (2.7), то из него следует, что матрица $F = D_n^{-1}C^{-1}D_n^{-1}$ удовлетворяет следующему равенству:

$$F(A_0 + B_0P_0) + (A_0 + B_0P_0)^*F = -(F - FH - HF).$$

Тогда на основании этого равенства из (2.19) получаем (2.14).

Решение задачи допустимого синтеза ограниченных позиционных управлений для системы (1.1) дает

Теорема 2.1. *Пусть числа $c^i_{2n_i-2}$, $a^i_{n_i}$, $i = 1, \dots, r$, удовлетворяют условиям (2.4), матрицы C и P_0 определены равенствами (2.5), (2.6), соответственно, число a_0 удовлетворяет условию*

$$0 < a_0 \leq \frac{d^2}{2\|F^{-1}\|\|M^{-1}\|^2\left(\|P_0\| + \|B_0^*LAL^{-1}\| \max\{c, c^{n_1}\}\right)^2}, \qquad (2.20)$$

где постоянная c определена соотношением (2.12). Пусть функция управляемости $\Theta(x)$ при $x \neq 0$ определена уравнением (2.11), где матрицы L и $F(\Theta)$ вида (2.10) и (2.8), соответственно, $\Theta(0) = 0$, и область Q имеет вид $\mathrm{Q} = \{x : \Theta(x) \leq c\}$.

Тогда для системы (1.1) управление $u(x)$ вида (2.13) в области $\mathrm{Q} \setminus \{0\}$ решает задачу допустимого синтеза и удовлетворяет ограничениям (1.3), причем время движения $T(x_0)$ из произвольной точки $x_0 \in \mathrm{Q}$ в начало координат по траектории системы (1.1) с управлением $u(x)$ равно $\Theta(x_0)$.

Доказательство. Для полного доказательства теоремы осталось установить ограниченность управления. Перепишем управление $u(x)$ в виде

$$u(x) = M^{-1}\left(\Theta^{-\frac{1}{2}}(x)P_0 - B_0^*LAL^{-1}D^{-1}(\Theta(x)\right)y(\Theta(x), x). \qquad (2.21)$$

На основании неравенства $\|y(\Theta(x), x)\|^2 \leq 2a_0\Theta(x)\|F^{-1}\|$ из (2.21) имеем

$$\|u(x)\| \leq \|M^{-1}\|\left(\|P_0\| + \|B_0^*LAL^{-1}\|\Theta^\gamma(x)\right)\sqrt{2a_0\|F^{-1}\|},$$

где $\gamma = 1$, если $c \leq 1$, и $\gamma = n_1$, если $c > 1$. Отсюда получаем

$$\|u(x)\| \leq \|M^{-1}\|\left(\|P_0\| + \|B_0^*LAL^{-1}\|c^\gamma\right)\sqrt{2a_0\|F^{-1}\|}, \quad x \in \mathrm{Q} \setminus \{0\}. \qquad (2.22)$$

Выбирая число a_0 из условия (2.20), из неравенства (2.22) имеем $\|u(x)\| \le d$ для $x \in \mathrm{Q} \setminus \{0\}$.

По теореме 1 из [5] следует, что управление $u(x)$ в области Q для системы (1.1) решает задачу синтеза и на основании равенства (2.14) время движения $T(x_0)$ из произвольной точки $x_0 \in \mathrm{Q}$ в начало координат задается равенством $T(x_0)=\Theta(x_0)$.

3. Нахождение траектории

Рассмотрим теперь вопрос нахождения траектории $x(t)$ системы (1.1), отвечающей управлению $u(x)$ вида (2.13), которая начинается в произвольной точке $x_0 \in \mathrm{Q}$ и оканчивается в нуле. Для этого выбираем число a_0 из условия (2.20) и находим положительный корень Θ_0 уравнения (2.11) при $x = x_0$, т.е. положительный корень уравнения $2a_0\Theta - (L^*F(\Theta)Lx_0, x_0) = 0$. $T(x_0) = \Theta_0$ является временем движения из точки x_0 в нуль.

Рассмотрим задачу Коши вида

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BM^{-1}\left(\theta^{-\frac{1}{2}}(t)P_0D(\theta(t)) - B_0^*LAL^{-1}\right)Lx, \quad x(0) = x_0, \\ \dot{\theta}(t) = -1, \quad \theta(0) = \Theta_0. \end{cases}$$

Решив задачу Коши для функции $\theta(t)$, имеем $\theta(t) = T - t$. Тогда траектория $x(t)$ является решением следующей задачи Коши:

$$\dot{x} = Ax + BM^{-1}\left((T-t)^{-\frac{1}{2}}P_0D(T-t) - B_0^*LAL^{-1}\right)Lx, \; x(0) = x_0.$$

Положим $z = Lx$. Воспользовавшись следующими равенствами $LB = B_0M$, $(E - B_0B_0^*)LAL^{-1} = A_0$, получаем задачу Коши вида

$$\dot{z} = \left(A_0 + (T-t)^{-\frac{1}{2}}P_0D(T-t)\right)z, \quad z(0) = Lx_0,$$

или в покомпонентном виде

$$\begin{aligned} &\dot{z}_{s_{i-1}+1} = \sum_{k=1}^{n_i} \frac{a_k^i z_{s_{i-1}+k}}{(T-t)^k}, \quad \dot{z}_{s_{i-1}+j+1} = z_{s_{i-1}+j}, \quad j = 1,\dots,n_i - 1, \\ &z_{s_{i-1}+j}(0) = c_i^* A^{n_i - j}x_0, \quad j = 1,\dots,n_i, \quad i = 1,\dots,r, \end{aligned}$$

где $s_0 = 0$, $s_i = n_1 + \ldots + n_i$, $i = 1,\dots,r$.

Отсюда получаем дифференциальные уравнения

$$(T-t)^{n_i} z_{s_i}^{(n_i)} - \sum_{k=1}^{n_i} a_k^i (T-t)^{n_i-k} z_{s_i}^{(n_i-k)} = 0, \quad i = 1,\dots,r,$$

с начальными условиями

$$z_{s_i}^{(j)}(0) = z_{s_i-j}(0) = c_i^* A^j x_0, \quad j = 0, \dots, n_i-1, \quad i = 1, \dots, r.$$

Эти дифференциальные уравнения являются дифференциальными уравнениями типа Эйлера. Обозначим Δ_0 — тождественный оператор,

$$\Delta_1 = -d/d\tau, \quad \Delta_k = (-d/d\tau + k - 1) \dots (-d/d\tau), \quad k = 2, \dots, n_1.$$

Заменой времени они сводятся к дифференциальным уравнениям относительно $y_i(\tau) = z_{s_{i-1}+1}(T - e^{-\tau})$ с постоянными коэффициентами вида

$$\Delta_{n_i} y_i(\tau) - \sum_{k=1}^{n_i} a_k^i \Delta_{n_i-k} y_i(\tau) = 0, \quad i = 1, \dots, r.$$

Начальные условия $y_i(\tau_0)$, $y'_i(\tau_0)$, ... , $y_i^{(n_i-1)}(\tau_0)$ ($\tau_0 = \ln T$) для этих дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами находятся из системы линейных уравнений вида

$$y_i(\tau_0) = c_i^* x_0, \ \Delta_1 y_i(\tau_0) = T c_i^* A x_0, \ \dots, \ \Delta_{n_i-1} y_i(\tau_0) = T^{n_i-1} c_i^* A^{n_i-1} x_0,$$

$i = 1, \dots, r$. Так как $z_{s_i}(t) = y_i(\ln(T - t))$, $i = 1, \dots, r$, то остальные функции $z_{s_i-1}(t)$, ... , $z_{s_i-n_i+1}(t)$ находятся дифференцированием последнего равенства, т.е.

$$z_{s_i-j}(t) = z_{s_i}^{(j)}(t), \quad j = 1, \dots, n_i-1, \quad i = 1, \dots, r.$$

Траектория $x(t)$ находится по формуле $x(t) = L^{-1} z(t)$.

Отметим, что для нахождения траектории системы требуется лишь один раз решить уравнение (2.11).

П р и м е р. Рассмотрим решение задачи допустимого синтеза для управляемой системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^5, \ u \in \mathbb{R}^2, \tag{3.1}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 & 3 & -4 \\ -6 & 3 & 15 & 6 & -12 \\ -2 & 1 & 5 & 2 & -4 \\ 6 & -3 & -8 & -4 & 7 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

с ограничениями на управление вида $\|u\| \le d$.

В данном случае $\mathrm{rang} B = 2$ и условие (1.2) реализуется, например, на вектор-столбцах b_1, Ab_1, $A^2 b_1$, b_2, Ab_2 или вектор-столбцах b_2, Ab_2, $A^2 b_2$, b_1, Ab_1, где b_i — i-й столбец матрицы B. Отметим, что в силу условий

$$\mathrm{rang}(b_i, Ab_i, A^2 b_i, A^3 b_i, A^4 b_i) = 3, \quad i = 1, 2,$$

система (3.1) не является полностью управляемой с одномерным управлением (с управлением u_1 или u_2). Выберем матрицу K в виде

$$K = (b_1, Ab_1, A^2b_1, b_2, Ab_2) = \begin{pmatrix} 0 & -7 & -8 & 1 & -2 \\ 1 & -24 & -30 & 0 & 3 \\ -1 & -8 & -10 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & 18 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \; n_1 = 3, \; n_2 = 2.$$

Определим векторы c_1, c_2 из систем (2.9), которые имеют вид

$$K^*c_1 = (0,0,1,0,0)^*, \quad K^*c_2 = (0,0,0,0,1)^*,$$

получаем

$$c_1 = \left(\frac{14}{45}, \frac{7}{90}, \frac{1}{90}, \frac{29}{90}, -\frac{1}{15}\right)^*, \quad c_2 = \left(-\frac{4}{15}, -\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, -\frac{2}{15}, \frac{1}{5}\right)^*.$$

Тогда матрица L из (2.10) примет вид

$$L = \begin{pmatrix} c_1^*A^2 \\ c_1^*A \\ c_1^* \\ c_2^*A \\ c_2^* \end{pmatrix} = \frac{1}{90}\begin{pmatrix} 72 & -36 & -63 & -36 & 63 \\ 6 & -3 & 6 & 12 & 9 \\ 28 & 7 & 1 & 29 & -6 \\ 72 & -36 & -18 & -36 & 18 \\ -24 & -6 & 12 & -12 & 18 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\Delta_1 = -1/20$, $(\Delta_1')_1 = 1/3600$, $(\Delta_2')_1 = 1/30$, $(\Delta_1'')_1 = -1/60$, $(\Delta_2'')_1 = -1/2$, $\Delta_2 = -1$, $(\Delta_1')_2 = -1/12$, $(\Delta_1'')_2 = 0$ и $\xi_0^1 = 5/12$, $\xi_0^2 = 1/3$, то условия (2.4) на выбор параметров c_4^1, a_3^1, c_2^2, a_2^2 приобретают вид

$$c_4^1 > 0, \quad a_3^1 < -40, \quad c_2^2 > 0, \quad a_2^2 < -9/2.$$

Положим $c_4^1 = c_2^2 = 1$, $a_3^1 = -45$, $a_2^2 = -5$. Тогда положительно определенные матрицы C_1, C_2 из (2.2) и векторы a^1, a^2 из (2.3) имеют вид

$$C_1 = \begin{pmatrix} 10 - a_3^1/12 & 5 & 5/2 \\ 5 & 5/2 & 3/2 \\ 5/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix} c_4^1 = \begin{pmatrix} 55/4 & 5 & 5/2 \\ 5 & 5/2 & 3/2 \\ 5/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} -a_2^2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} c_2^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$a^1 = (-6, -10 + a_3^1/3, a_3^1)^* = (-6, -25, -45)^*, \quad a^2 = (-3, a_2^2)^* = (-3, -5)^*.$$

Отсюда получаем

$$F^{-1} = D_5 C D_5 = \begin{pmatrix} 55/4 & -5 & 5/4 & 0 & 0 \\ -5 & 5/2 & -3/4 & 0 & 0 \\ 5/4 & -3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 4/5 & 4 & 8 & 0 & 0 \\ 4 & 24 & 52 & 0 & 0 \\ 8 & 52 & 120 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} -6 & -25 & -45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрицы $F(\Theta)$, $F^{-1}(\Theta)$ соответственно имеют вид

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5\Theta} & \frac{4}{\Theta^2} & \frac{8}{\Theta^3} & 0 & 0 \\ \frac{4}{\Theta^2} & \frac{24}{\Theta^3} & \frac{52}{\Theta^4} & 0 & 0 \\ \frac{8}{\Theta^3} & \frac{52}{\Theta^4} & \frac{120}{\Theta^5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\Theta} & \frac{2}{\Theta^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\Theta^2} & \frac{5}{\Theta^3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{55}{4}\Theta & -5\Theta^2 & \frac{5}{4}\Theta^3 & 0 & 0 \\ -5\Theta^2 & \frac{5}{2}\Theta^3 & -\frac{3}{4}\Theta^4 & 0 & 0 \\ \frac{5}{4}\Theta^3 & -\frac{3}{4}\Theta^4 & \frac{1}{4}\Theta^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5\Theta & -2\Theta^2 \\ 0 & 0 & 0 & -2\Theta^2 & \Theta^3 \end{pmatrix}.$$

Определим постоянную величину c из условия (2.12), положив ее равной $3/100000$. Согласно условию (2.20) выберем число a_0 равным

$$\frac{d^2}{4(9+\sqrt{17})(\sqrt{2686}+3\sqrt{(77+5\sqrt{145})/2/200000})^2}.$$

Определим функцию управляемости $\Theta(x)$ при $x \neq 0$ из уравнения (2.11), которое принимает вид

$$2a_0\Theta^6 - \frac{4}{5}\Theta^4 z_1^2 - 8\Theta^3 z_1 z_2 - 24\Theta^2 z_2^2 - 16\Theta^2 z_1 z_3$$
$$-104\Theta z_2 z_3 - 120 z_3^2 - \Theta^4 z_4^2 - 4\Theta^3 z_4 z_5 - 5\Theta^2 z_5^2 = 0, \tag{3.2}$$

где

$z_1 = (8x_1 - 4x_2 - 7x_3 - 4x_4 + 7x_5)/10$, $\quad z_2 = (2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5)/30$,
$z_3 = (28x_1 + 7x_2 + x_3 + 29x_4 - 6x_5)/90$, $\quad z_4 = (4x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5)/5$,
$z_5 = (-4x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5)/15$.

Согласно равенству (2.13) зададим управление $u(x)$ формулой

$$\begin{aligned} u_1(x) = {} & \frac{1}{2\Theta^3(x)}(-28x_1 - 7x_2 - x_3 - 29x_4 + 6x_5) \\ & + \frac{1}{3\Theta^2(x)}(-7x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 11x_4 - 6x_5) \\ & + \frac{1}{10\Theta(x)}(-36x_1 + 18x_2 + 39x_3 + 18x_4 - 39x_5) \\ & + (-4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 6x_5)/5, \\ u_2(x) = {} & \frac{1}{3\Theta^2(x)}(4x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5) \\ & + \frac{1}{5\Theta(x)}(-12x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 3x_5) \\ & + (12x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 6x_4 + 3x_5)/5. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Это управление в области $\mathrm{Q} = \{x : \Theta(x) \le 3/100000\}$ удовлетворяет заданным ограничениям $\|u(x)\| \le d$ и переводит произвольную точку $x_0 \in \mathrm{Q}$ в начало координат за время $T(x_0) = \Theta_0$, где Θ_0 — положительный корень уравнения (3.2) при $x = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0)^*$.

Найдем траекторию системы (3.1), отвечающую управлению $u = u(x)$ вида (3.3) и начинающуюся в точке $x(0) = x_0 \in \mathrm{Q}$. Эта траектория определяется равенством $x(t) = L^{-1}z(t)$, где $z(t)$ является решением системы

$$\begin{aligned} &\dot z_1 = -\frac{6}{\theta}\, z_1 - \frac{25}{\theta^2}\, z_2 - \frac{45}{\theta^3}\, z_3, \quad \dot z_2 = z_1, \quad \dot z_3 = z_2, \\ &\dot z_4 = -\frac{3}{\theta}\, z_4 - \frac{5}{\theta^2}\, z_5, \quad \dot z_5 = z_4, \quad \dot\theta = -1. \end{aligned}$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем $\theta(t) = \Theta_0 - t$, где Θ_0 — положительный корень уравнения (3.2) при $x = x_0$. Следовательно, $z(t)$ является решением задач Коши вида

$$\begin{cases} \dot z_1 = -\dfrac{6}{\Theta_0 - t}\, z_1 - \dfrac{25}{(\Theta_0 - t)^2}\, z_2 - \dfrac{45}{(\Theta_0 - t)^3}\, z_3, \quad \dot z_2 = z_1, \quad \dot z_3 = z_2, \\ z_1(0) = z_1^0, \quad z_2(0) = z_2^0, \quad z_3(0) = z_3^0, \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} \dot z_4 = -\dfrac{3}{\Theta_0 - t}\, z_4 - \dfrac{5}{(\Theta_0 - t)^2}\, z_5, \quad \dot z_5 = z_4, \\ z_4(0) = z_4^0, \quad z_5(0) = z_5^0, \end{cases} \tag{3.5}$$

где $(z_1^0, z_2^0, z_3^0, z_4^0, z_5^0)^* = Lx_0$. Решение задачи Коши вида (3.4) приведено в примере работы [3]. Аналогично получаем решение задачи Коши (3.5).

Тогда имеем

$$z(t)=\left(\begin{array}{l} (\Theta_0-t)\left(6k_1+5\sqrt{6}\ k_3\cos\alpha_1(t)-5\sqrt{6}\ k_2\sin\alpha_1(t)\right) \\ (\Theta_0-t)^2\left(-3k_1-\left(3k_2+\sqrt{6}\ k_3\right)\cos\alpha_1(t)+\left(-3k_3+\sqrt{6}\ k_2\right)\sin\alpha_1(t)\right) \\ (\Theta_0-t)^3\left(k_1+k_2\cos\alpha_1(t)+k_3\sin\alpha_1(t)\right) \\ (\Theta_0-t)\left(\Theta_0 z_4^0\cos\alpha_2(t)+(2\Theta_0 z_4^0+5z_5^0)\sin\alpha_2(t)\right)/\Theta_0^2 \\ (\Theta_0-t)^2\left(z_5^0\cos\alpha_2(t)-(\Theta_0 z_4^0+2z_5^0)\sin\alpha_2(t)\right)/\Theta_0^2 \end{array}\right),$$

где

$$k_1=\frac{1}{6\Theta_0}\left(\frac{15}{\Theta_0^2}z_3^0+\frac{5}{\Theta_0}z_2^0+z_1^0\right),\quad k_2=-\frac{1}{6\Theta_0}\left(\frac{9}{\Theta_0^2}\ z_3^0+\frac{5}{\Theta_0}\ z_2^0+z_1^0\right),$$
$$k_3=-\frac{1}{\sqrt{6}\ \Theta_0^2}\left(\frac{3}{\Theta_0}\ z_3^0+z_2^0\right),\ \alpha_1(t)=\sqrt{6}\ \ln\left(1-\frac{t}{\Theta_0}\right),\ \alpha_2(t)=\ln\left(1-\frac{t}{\Theta_0}\right).$$

Таким образом, траектория $x(t)$ имеет вид

$$x(t)=L^{-1}z(t)=\left(\begin{array}{c} -7z_2(t)+6z_3(t)+z_4(t)+9z_5(t)/2 \\ z_1(t)-26z_2(t)+18z_3(t)-z_4(t)/2+16z_5(t) \\ -z_1(t)-6z_2(t)+6z_3(t)+3z_4(t)/2+7z_5(t) \\ 12z_2(t)-6z_3(t)-z_4(t)-7z_5(t) \\ z_1(t)-6z_2(t)+6z_3(t)-z_4(t)/2+7z_5(t) \end{array}\right).$$

Очевидно, что $x(t)\to 0$ при $t\to\Theta_0$. Управление $u(x)$ на этой траектории имеет вид

$$u(x(t))=\left(\begin{array}{c} v_1(t)-v_2(t)/2-2z_1(t)+z_4(t) \\ v_2(t)+3z_4(t) \end{array}\right),$$

где

$$v_1(t)=-6k_1+5(6k_2-\sqrt{6}\ k_3)\cos\alpha_1(t)+5(\sqrt{6}\ k_2+6k_3)\sin\alpha_1(t),$$
$$v_2(t)=-\Theta_0^{-1}\left(3z_4^0+5\Theta_0^{-1}z_5^0\right)\cos\alpha_2(t)-\Theta_0^{-1}\left(z_4^0+5\Theta_0^{-1}z_5^0\right)\sin\alpha_2(t).$$

Список литературы

[1] *Н.Н. Красовский*, Теория управления движением. Наука, Москва (1968).

[2] *Э.В. Ли, Л. Маркус*, Основы теории оптимального управления. Наука, Москва (1972).

[3] *А.Э. Чоке Риверо, В.И. Коробов, В.А. Скорик*, Функция управляемости, как время движения. I. — *Мат. физ., анализ, геом.* (2004), т. 11, № 2, с. 208–225.

[4] *Р. Беллман*, Динамическое программирование. Изд-во иностр. лит., Москва (1960).

[5] *В.И. Коробов.* Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости. — *Мат. сб.* (1979), № 109(151), вып. 4, с. 582–606.

The controllability function as the time of motion. II

A.E. Choque Rivero, V.I. Korobov, and V.A. Skoryk

The problem of the admissible synthesis of feedback controls for linear systems with geometric constraints on the control is considered. The investigation is carried out on the basic of the method of the controllability function. The constructed controllability functions are the time of motion from an arbitrary starting point to the zero and the controls solve the problem. Analytical representations of the trajectory are given.